Terminale

MATHS

Pour ceux qui veulent intégrer une prépa

- Synthèse de cours
- Exercices corrigés d'entrainement
- Le coin du chercheur
- Ouverture vers la prépa

ellipses

Chapitre 1

Calculs et raisonnements

1.1 Synthèse de cours

1.1.1 Identités remarquables

On appelle identité toute égalité entre deux expressions qui est vraie quelles que soient les valeurs des variables intervenant dans ces expressions. Au lycée, trois identités remarquables sont à connaître par cœur.

Propriété 1. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a que :

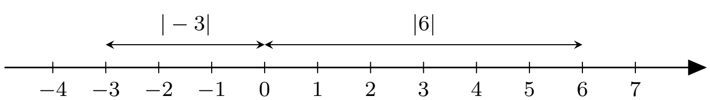
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad ; \quad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

1.1.2 Valeur absolue d'un nombre réel

Définition 1. La valeur absolue d'un nombre $x \in \mathbb{R}$ est la distance, sur un axe gradué unitaire, entre le point d'origine de l'axe et le point d'abscisse x. Ainsi, on a que :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exemples. $|6| = 6$ et $|-3| = 3$.



1.1.3 Puissances et racine carrée

Propriété 2. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ ainsi que $a, b \in \mathbb{R}$. Alors, on a que :

- $a^{m+n} = a^m a^n$;
- $(ab)^m = a^m b^m$.
- Lorsque $a \neq 0$, on a que : $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$ et $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$.
- Lorsque $b \neq 0$, on a que : $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, par convention : $a^0 = 1$.

Définition 2. Soit a un nombre réel positif. On appelle racine carrée de a l'unique réel positif dont le carré est a. On le note $\sqrt{a}$. Ainsi, pour tout nombre réel a positif, on a que :

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Exemples. Puisque $\sqrt{25}$ est l'unique nombre réel positif dont le carré est 25, on a que $\sqrt{25} = 5$. La liste des premiers carrés parfaits fournit ainsi une liste de racines carrées qu'il est indispensable d'avoir en mémoire :

$$\begin{array}{lllll} \sqrt{0} = 0 \ ; & \sqrt{9} = 3 \ ; & \sqrt{36} = 6 \ ; & \sqrt{81} = 9 \ ; & \sqrt{144} = 12 \ ; \\ \sqrt{1} = 1 \ ; & \sqrt{16} = 4 \ ; & \sqrt{49} = 7 \ ; & \sqrt{100} = 10 \ ; & \sqrt{169} = 13 \ ; \\ \sqrt{4} = 2 \ ; & \sqrt{25} = 5 \ ; \ ; & \sqrt{64} = 8 \ ; & \sqrt{121} = 11 \ ; & \sqrt{196} = 14. \end{array}$$

Le plus souvent, la racine carrée d'un nombre réel positif a est un nombre irrationnel. Dans les calculs, il est indispensable de prendre l'habitude de conserver la notation $\sqrt{a}$ et de ne la remplacer par une valeur approchée qu'en cas d'ultime nécessité.

Propriété 1. Soient a et b deux nombres réels positifs. Alors, on a que :

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$;
- Lorsque $b \neq 0$, on a aussi : $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Nous terminons ce paragraphe de rappels par une propriété trop souvent ignorée des lycéens et dont la méconnaissance est source d'erreurs dans les calculs algébriques.

Propriété 2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a que : $\sqrt{a^2} = |a|$.

Exemple. Appliquer la racine carrée à l'égalité $x^2 = 25$ conduit à $|x| = 5$ et non à $x = 5$. En particulier, comme vous le savez bien, l'équation $x^2 = 25$ possède deux solutions 5 et -5.

1.1.4 L'implication et l'équivalence logique

L'implication est la relation entre deux propositions correspondant au « si. . . , alors . . . ». Voici deux exemples d'implication :

- Si la connection internet ne fonctionne pas, alors je ne peux pas vérifier mes mails.
- Si $x = 2$, alors $x^2 = 4$.

Définition 3. En mathématiques, on écrit $P \Longrightarrow Q$ pour dire que la proposition P implique la proposition Q. La proposition P est l'hypothèse de l'implication et la proposition Q en est la conclusion. On dit que l'implication $Q \Longrightarrow P$ est la réciproque de l'implication $P \Longrightarrow Q$.

Lorsqu'une implication est vraie, il se peut que son implication réciproque ne le soit pas. Par exemple, l'implication « Il pleut. » $\Longrightarrow$ « Le sol est mouillé. » est vraie mais sa réciproque est fausse.

Définition 4. En mathématiques, on dit que deux propositions P et Q sont équivalentes lorsque l'implication $P \Longrightarrow Q$ et sa réciproque $Q \Longrightarrow P$ sont vraies. On écrit alors $P \iff Q$.

Les formulations suivantes ont toutes le même sens, elles permettent de varier un peu le discours :

- P est équivalent à Q ;
- P si, et seulement si, Q ;
- Pour P, il faut et il suffit que Q.

$\Longrightarrow$	$\Longleftarrow$
condition suffisante	condition nécessaire
il suffit	il faut
si	seulement si

1.1.5 Manipulation des inégalités

Propriété 3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

- Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a que :

$$a < b \iff a + c < b + c.$$

- Pour tout réel $c > 0$, on a que :

$$a < b \iff a \times c < b \times c \quad \text{et} \quad a < b \iff \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

- Pour tout réel $c < 0$, on a que :

$$a < b \iff a \times c > b \times c \quad \text{et} \quad a < b \iff \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

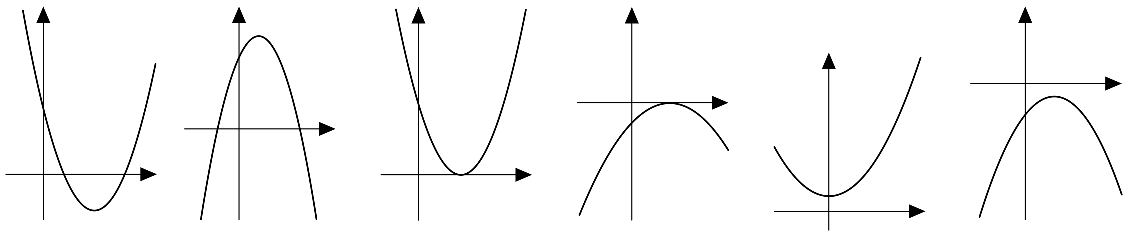
Toutes ces propriétés restent évidemment valables en remplaçant les inégalités strictes $<$ par des inégalités larges $\leqslant$. L'oubli du troisième point est source d'erreurs fréquentes : on retiendra que multiplier ou diviser une inégalité membre à membre inverse l'ordre. En particulier, lorsque l'on divise une inégalité membre à membre par une expression algébrique, il est nécessaire de connaître le signe de cette expression.

1.1.6 Équations et inéquations du second degré

Définition 5. Soient a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$. On appelle fonction polynôme de degré 2 toute f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$. On parle aussi de fonction trinôme. On appelle alors discriminant le nombre réel défini par : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Dans un repère du plan, la courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est une parabole. L'orientation de cette parabole est donnée par le signe du coefficient dominant a. Le signe du discriminant Δ détermine le nombre de point(s) d'intersection entre la parabole et l'axe des abscisses, c'est-à-dire le nombre de solution(s) de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Une telle solution est appelée une racine du polynôme.

On a représenté ci-dessous chacun des six cas possibles selon le signe du coefficient dominant a et du discriminant Δ.



$a>0$ $\Delta>0$	$a<0$ $\Delta>0$	$a>0$ $\Delta=0$	$a<0$ $\Delta=0$	$a>0$ $\Delta<0$	$a<0$ $\Delta<0$

Propriété 4. Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$. Considérons l'équation $ax^2+bx+c=0$.

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Lorsque $\Delta < 0$, cette équation possède deux solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On ne considèrera jamais ce cas dans cet ouvrage. Rappelons également la connaissance des éventuelles racines d'une fonction $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ polynôme de degré 2 donne les formes factorisées :

- Lorsque $\Delta = 0$, on a que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = a(x-x_0)^2$.
- Lorsque $\Delta > 0$, on a que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Résolution d'inéquation. En pratique, la résolution d'une inéquation du second degré se ramène à l'étude du signe d'une fonction polynôme de degré 2. Nous n'énonçons pas le résultat de cours sur le signe d'une fonction polynôme de degré 2 considérant que ce résultat se retrouve graphiquement en discutant selon les signes de a et de Δ. Par exemple, dans le cas $a < 0$ et et $\Delta > 0$ le graphique ci-dessus donne (en supposant $x_1 < x_2$ par exemple) immédiatement le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		$-$	0	$+$	0	$-$	

1.1.7 Le raisonnement par l'absurde

Définition 6. Le raisonnement par l'absurde est une méthode logique qui consiste à démontrer qu'une affirmation est vraie en montrant que son contraire aboutit à une contradiction ou à une absurdité.

En pratique, on fait l'hypothèse que l'affirmation à démontrer est fausse, et, si cette hypothèse nous permet d'aboutir à une incohérence, on en conclut que l'affirmation initiale est vraie.

1.1.8 Le raisonnement par récurrence

Propriété 3 (Raisonnement par récurrence)**.** Considérons $\mathcal{P}_n$ une propriété dépendante d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :

(i) La propriété est vraie pour un certain entier naturel n_0.

(ii) Pour tout entier $n \geqslant n_0$, la propriété $\mathcal{P}_n$ implique la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$.

Alors, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Lorsque (i) est vérifié, on dit que la propriété est initialisée au rang n_0. Lorsque (ii) est vérifié, on dit que la propriété est héréditaire. La rédaction d'un raisonnement par récurrence doit devenir un automatisme, cette rédaction doit faire apparaître explicitement les deux étapes − initialisation et hérédité − du raisonnement. Nous utiliserons le modèle de rédaction suivant :

Pour tout $n \geqslant n_0$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété $(\cdots\cdots)$
Initialisation : Au rang $n = n_0$, on a $(\cdots\cdots)$
Hérédité : Soit un entier $n \geqslant n_0$. Montrons que $\mathcal{P}_n$ implique $\mathcal{P}_{n+1}$.

$\vdots$

Conclusion : La propriété $\mathcal{P}_n$ est donc initialisée au rang $n = n_0$ et héréditaire.
D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

1.2 Énoncés des exercices

Calcul littéral

Exercice 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer et réduire :

(a) $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$

(b) $(x-1)^2(x+5)$

(c) $5(x-4)^2 + 3(x+1)(x-3) - 7(3x-1)^2$

(d) $(x^2+x+1)^2$.

Exercice 2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer :

(a) $(a+b)^3$

(b) $(a-b)^3$

(c) $(a+b)^4$

(d) $(a-b)^4$.

Exercice 3. On note x un nombre réel strictement positif qui vérifie $x + \dfrac{1}{x} = 2025$. Calculer $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

Exercice 4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Factoriser :

(a) $x^2 - 5x$

(b) $3(x-1) + (x-1)(x+5)$

(c) $(2x+5)(x-7) - (4x+8)(x-7)$

(d) $7(x+1)(2x^2+3) + x(x+1)(5-14x)$

(e) $x^2 - 49$

(f) $25x^2 - 121y^2$

(g) $(2x-1)^2 - (x+7)^2$

(h) $25(3-x)^2 - 16(7x+5)^2$

(i) $x^2 - 6x + 9$

(j) $4x^2 + 28x + 49$

(k) $1 - 16x + 64x^2$.

Exercice 5. Déterminer l'ensemble de définition des expressions suivantes puis les réduire sous la forme d'une seule fraction.

(a) $5 + \dfrac{1}{x-1}$

(b) $\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x-7}$

(c) $\dfrac{2}{x+3} - \dfrac{4x}{x(x-1)}$

(d) $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}$

(e) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x^2-1}$

Puissances et racines carrées

Exercice 6. Écrire chacun des nombres suivants sous la forme a^n avec $a, n \in \mathbb{Z}$.

(a) $5^2 \times 5^4$

(b) $6^4 \times 6^{-9}$

(c) $3^8 \times 2^8 \times 5^8$

(d) $-4 \times (-4)^7$

(e) $\dfrac{2^3 \times 7^9}{14^3}$

(f) $\left(\dfrac{4^2}{4^9}\right)^{-3}$

Exercice 7. Écrire chacun des nombres suivants sous la forme $2^a 3^b 5^c 7^d$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$:

- $a = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} \times \left(\dfrac{1}{8}\right)^5$
- $b = \dfrac{(2^3 \times 5^4)^3}{(2^2 \times 7^2)^4}$
- $c = \dfrac{3^2 \times 9^{-4} \times 6^2}{12^{-3} \times 2^4}$
- $d = 8^{12} + 8^{12} + 8^{12} + 8^{12}$

Exercice 8. Existe-t-il un nombre entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $27^n + 27^n + 27^n = 3^{46}$? Si oui, le déterminer.

Exercice 9. Écrire chacun des nombres suivants sous la forme $a\sqrt{2}$ ou sous la forme $a\sqrt{5}$ avec $a \in \mathbb{N}$.

(a) $\sqrt{50}$

(b) $\sqrt{8}$

(c) $\sqrt{128}$

(d) $\sqrt{72}$

(e) $\sqrt{18}$

(f) $\sqrt{125}$

(g) $\sqrt{320}$

(h) $\sqrt{98}$

Exercice 10. Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$.

- $A = \sqrt{12} - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{75}$
- $B = 2\sqrt{90} - 5\sqrt{40} + 7\sqrt{10}$
- $C = 7\sqrt{32} - 9\sqrt{50} + 3\sqrt{8}$

Exercice 11. Sans utiliser de calculatrice, calculer astucieusement les nombres suivants :

(a) $\sqrt{13^2 + 13^2 + 13^2 + 13^2}$

(b) $\dfrac{\sqrt{50} + \sqrt{18}}{\sqrt{32}}$

(c) $\sqrt{5 + \sqrt{11 + \sqrt{19 + \sqrt{29 + \sqrt{49}}}}}$

(d) $\sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}}}$

(e) $\dfrac{\sqrt{75} - \sqrt{50}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

(f) $\sqrt{26^2 - 24^2}$

(g) $\sqrt{2^9 + 2^9}$

Exercice 12. On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = \sqrt{12}$ et $AC = \sqrt{27}$. Calculer les valeurs exactes et simplifiées de son aire et de son périmètre.

Exercice 13 (Quantité conjuguée)**.** On dit que des quantités du type $a+b$ et $a-b$ sont conjuguées l'une de l'autre. Par exemple, on dira que $\sqrt{2} - 3$ est la quantité conjuguée de $\sqrt{2} + 3$.

1. (a) Montrer que $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-3)$ est entier.

   (b) En déduire une écriture sans racine carrée au dénominateur du nombre suivant :
   $$A = \frac{1}{\sqrt{2}+3}.$$

2. Écrire sans radical au dénominateur chacun des nombres suivants :
   - $B = \dfrac{3}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}$
   - $C = \dfrac{5}{2 - \sqrt{3}}$
   - $D = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$
   - $E = \dfrac{1}{1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$.

Exercice 14. Calculer :
$$\frac{8 - 2\sqrt{15}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} + \frac{8 + 2\sqrt{15}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$$

Exercice 15. Prouver que :
$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{6}.$$

Valeur absolue

Exercice 16. Dans chacun des cas suivants, trouver l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ vérifiant la condition donnée.

(a) $|x| \leqslant 2$

(b) $|x - 1| < 9$

(c) $|x + 5| \leqslant 7$

(d) $|x - 2| \leqslant -3$

Exercice 17. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes.

(a) $|2x + 5| = 7$

(b) $|7 - 5x| = |3x + 1|$

(c) $|x + 2| = |x - 2|$

(d) $|x-5|+4(x-2) \leqslant 3|2x-7|$

(e) $|x+1| \geqslant |x-1|$

(f) $|x+2| \geqslant 2|x+3|$

Polynômes et équations

Exercice 18. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes.

(a) $x^2+2x-3=0$

(b) $5x^2+7x+18=0$.

(c) $(x+3)(2x^2-10x+15)=0$

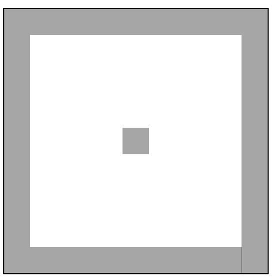
(d) $-3x^2+9x+30<0$

(e) $-x^2-5x+7 \geqslant x+1$

(f) $(x+3)(2x^2+9x-5)<0$

(g) $\dfrac{x+3}{2x^2+9x-5} \geqslant 0$

Exercice 19. Dans un carré de côté 10 centimètres, on a colorié une bande de largeur x centimètres et un carré de côté x centimètres centré comme comme sur la figure suivante.



Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire de la partie coloriée est strictement inférieure à l'aire de la partie non coloriée.

Exercice 20. L'objectif de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$(E)\ :\ x^3-x^2-14x+24=0.$$

1. Vérifier que 2 est une solution de (E).
2. Trouver trois nombres réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$x^3-x^2-14x+24=(x-2)(ax^2+bx+c).$$
3. Résoudre l'équation (E).

Exercice 21. L'objectif de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$(E)\ :\ x^4-5x^3+4x^2+5x+1=0.$$

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On pose $y = x - \dfrac{1}{x}$.
   (a) Montrer que x est solution de (E) si, et seulement si, $y^2-5y+2=0$.
   (b) Résoudre l'équation $y^2-5y+2=0$.
3. Résoudre (E).

Exercice 22. Trouver la forme factorisée de chacun des polynômes suivants. On pourra commencer par chercher une racine évidente.

1. $P(x)=2x^3-3x^2-x+2$
2. $Q(x)=x^3-2x^2+x-2$
3. $R(x)=x^3-x^2-4x+4$
4. $S(x)=x^4-8x^2+16$

Exercice 23. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$. On rappelle que la forme « canonique » d'un polynôme du second degré $P : x \mapsto ax^2+bx+c$ est donnée par :

$$P(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Trouver la forme canonique des polynômes suivants.

1. $P_1(x)=x^2-8x+16$
2. $P_2(x)=x^2+12x+10$
3. $P_3(x)=-2x^2+10x+25$
4. $P_4(x)=4x^2+5x+3$

Les raisonnements

Exercice 24. En raisonnant par l'absurde, montrer que l'équation

$$x^4-7x^3+4x^2+5x-2=0$$

ne possède pas de solution parmi les nombres entiers.

Exercice 25. Par l'absurde, démontrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal. On rappelle qu'un nombre d est décimal s'il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $d = \frac{a}{10^n}$.

Exercice 26. On souhaite démontrer par l'absurde que le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1. On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel. Il existe ainsi deux nombres $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que :
$$\sqrt{2}=\frac{a}{b}.$$
   (a) En élevant cette égalité au carré, montrer que a^2 est un nombre pair.
   (b) En déduire que a est un nombre pair. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $a=2k$.

(c) Montrer qu'alors : $b^2 = 2k^2$. En déduire que b est également un nombre pair.

2. Conclure que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 27. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 28. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Exercice 29. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

Exercice 30. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $n^3 + 5n$ est multiple de 3.

Exercice 31. Prouver que $2^n - 1 \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pourra raisonner par récurrence.

Exercice 32. Soit $x > 0$. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(1+x)^n > 1 + nx.$$

Le coin du chercheur

Exercice 33 ($\star\star$)**.** Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} = 1.$$

Exercice 34 ($\star\star$)**.** Soient ABC un triangle et H le point d'intersection de la hauteur issue de A et du segment $[BC]$. On note :

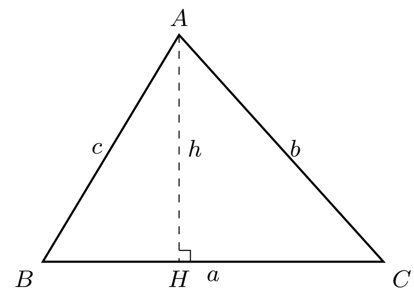
$$a = BC \quad ; \quad b = AC \quad ; \quad c = AB,$$

ainsi que

$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

L'objectif de l'exercice est de démontrer la formule de Héron affirmant que l'aire $\mathcal{A}$ du triangle est :

$$\mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$



1. Justifier que :

$$AH^2 = c^2 - \left(\frac{c^2 + b^2 - b^2}{2a}\right)^2.$$

2. Montrer que :

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{16}(a+c+b)(a+c-b)(b+c-a)(b+a-c).$$

3. Montrer que

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{16}(2s-2c)(2s-2a)(2s-2b)(2s).$$

Et déduire pour conclure la formule de Héron.

1.3 Corrigés des exercices

Exercice 1.

(a) En utilisant la deuxième identité remarquable, on obtient que :

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 &= x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= x^2 + x + \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

(b) On commence par développer $(x-1)^2$ avec la deuxième identité remarquable puis on distribue. On calcule :

$$\begin{aligned}(x-1)^2(x+5) &= (x^2 - 2x + 1)(x+5) \\ &= x^3 + 5x^2 - 2x^2 - 10x + x + 5 \\ &= x^3 + 3x^2 - 9x + 5.\end{aligned}$$

(c) Notons A l'expression à développer. On commence par développer les produits et carrés :

$$\begin{aligned}5(x-4)^2 &= 5(x^2 - 8x + 16) \\ &= 5x^2 - 40x + 80\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3(x+1)(x+3) &= 3(x^2+3x+x+3)\\ &= 3(x^2+4x+3)\\ &= 3x^2+12x+9\\ 7(3x-1)^2 &= 7(9x^2-6x+1)\\ &= 63x^2-42x+7.\end{aligned}$$

Ensuite, on calcule :

$$\begin{aligned}A &= \left(5x^2-40x+80\right)+\left(3x^2+12x+9\right)\\ &\quad -\left(63x^2-42x+7\right)\\ &= 5x^2+3x^2-63x^2-40x+12x+42x\\ &\quad +80+9-7\\ &= -55x^2+14x+82.\end{aligned}$$

(d) L'idée est d'utiliser la première identité remarquable en prenant, par exemple :

$$\begin{aligned}a &= x^2\\ b &= x+1.\end{aligned}$$

On calcule :

$$\begin{aligned}(x^2+x+1)^2 &= x^4+2x^2(x+1)+(x+1)^2\\ &= x^4+2x^3+2x^2+x^2+2x+1\\ &= x^4+2x^3+3x^2+2x+1.\end{aligned}$$

Exercice 2.

(a) On calcule :

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

(b) On calcule :

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2\\ &= (a-b)(a^2-2ab+b^2)\\ &= a^3-2a^2b+ab^2-ba^2+2ab^2-b^3\\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.\end{aligned}$$

(c) En utilisant le résultat obtenu à la première question, on calcule :

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)^3\\ &= (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)\\ &= a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3\\ &\quad +ba^3+3a^2b^2+3ab^3+b^4\\ &= a^4+4a^3b+a^2b^2+4ab^3+b^4.\end{aligned}$$

(d) Il est possible de procéder comme précédemment. Pour changer de méthode, on propose de nous ramener au cas $(a+b)^4$ en remarquant que :

$$a+b = a-(-b).$$

et que :

$$(-b)^2 = b^2 \quad ; \quad (-b)^3 = -b^3 \quad ; \quad (-b)^4 = b^4.$$

Ainsi, on calcule :

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= \left(a+(-b)\right)^4\\ &= a^4+4a^3(-b)+a^2(-b)^2\\ &\quad +4a(-b)^3+(-b)^4\\ &= a^4-4a^3b+a^2b^2-4ab^3+b^4.\end{aligned}$$

Remarque : la technique utilisée en question 4 permettait évidemment de retrouver $(a-b)^3$ à partir de $(a+b)^3$.

Exercice 3. L'idée clef du calcul est de remarquer que les termes x^2 et $\frac{1}{x^2}$ sont exactement les deux carrés du développement de l'identité remarquable

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2.$$

Cette observation étant faite, on se lance dans les calculs et on avise ! Déjà, on voit que :

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 &= x^2+2\times x\times\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2\\ &= x^2+2+\frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

Et c'est gagné ! En effet :

$$\begin{aligned}x^2+\frac{1}{x^2} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\\ &= 2025^2-2\\ &= 4100623.\end{aligned}$$

Exercice 4.

(a) On factorise :

$$\begin{aligned}x^2-5x &= x\times x-5x\\ &= x(x-5).\end{aligned}$$

(b) On factorise :

$$\begin{aligned}3(x-1)+(x-1)(x+5) &= (x-1)\left(3+(x+5)\right)\\ &= (x-1)(x+8).\end{aligned}$$

(c) On factorise :

$$\begin{aligned}&(2x+5)(x-7)+(4x+8)(x-7)\\ &\quad = (x-7)\left((2x+5)-(4x+8)\right)\\ &\quad = (x-7)(2x+5-4x-8)\\ &\quad = (x-7)(-2x-3).\end{aligned}$$

(d) On factorise :

$$\begin{aligned}&7(x+1)(2x^2+3)+x(x+1)(5-14x)\\ &\quad = (x+1)\left(7(2x^2+3)+x(5-14x)\right)\\ &\quad = (x+1)(14x^2+21+5x-14x^2)\\ &\quad = (x+1)(5x+21).\end{aligned}$$

(e) L'idée est d'utiliser la troisième identité remarquable pour $a = x$ et $b = 7$. En effet, on calcule alors :

$$\begin{aligned} x^2 - 49 &= x^2 - 7^2 \\ &= (x-7)(x+7). \end{aligned}$$

(f) De même qu'à la question précédente, avec la troisième identité remarquable, on a que :

$$\begin{aligned} 25x^2 - 121y^2 &= (5x)^2 - (11y)^2 \\ &= (5x-11y)(5x+11y). \end{aligned}$$

(g) En appliquant la troisième identité remarquable pour les nombres $a = 2x-1$ et $b = x+7$, on a que :

$$\begin{aligned} &(2x-1)^2 - (x+7)^2 \\ &\quad = \big((2x-1)-(x+7)\big)\big((2x-1)+(x+7)\big) \\ &\quad = (2x-1-x-7)(3x+6) \\ &\quad = (x-8)(3x+6). \end{aligned}$$

(h) En procédant de même qu'à la question précédente, on calcule :

$$\begin{aligned} &25(3-x)^2 - 16(7x+5)^2 \\ &\quad = \big(5(3-x)\big)^2 - \big(4(7x+5)\big)^2 \\ &\quad = \big(5(3-x)-4(7x+5)\big)\big(5(3-x)+4(7x+5)\big) \\ &\quad = (15-5x-28x-20)(15-5x+28x+20) \\ &\quad = (-33x-5)(17x+35). \end{aligned}$$

(i) L'idée est de reconnaître la forme développée de la deuxième identité remarquable pour $a = x$ et $b = 3$. En effet, on a que :

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 &= x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 \\ &= (x-3)^2. \end{aligned}$$

(j) Comme à la question précédente, on identifie la forme développée de la première identité remarquable :

$$\begin{aligned} 4x^2 + 28x + 49 &= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 7 + 7^2 \\ &= (2x+7)^2. \end{aligned}$$

(k) On identifie de nouveau la forme développée de la deuxième identité remarquable :

$$\begin{aligned} 1 - 16x + 64x^2 &= 1^2 - 2 \times 1 \times 8x + (8x)^2 \\ &= (1-8x)^2. \end{aligned}$$

Exercice 5.

(a) Cette expression est définie lorsque $x - 1 \neq 0$. Ainsi, son ensemble de définition $\mathcal{D}$ est :

$$\mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[.$$

Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on calcule :

$$\begin{aligned} 5 + \frac{1}{x-1} &= \frac{5(x-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{5(x-1)+1}{x-1} \\ &= \frac{5x-4}{x-1}. \end{aligned}$$

(b) Cette expression est définie pour tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq 0$ et $x - 7 \neq 0$. Son ensemble de définition est donc :

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 7\}.$$

Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on calcule :

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} - \frac{3}{x-7} &= \frac{2(x-7)}{x(x-7)} - \frac{3x}{x(x-7)} \\ &= \frac{2(x-7)-3x}{x(x-7)} \\ &= \frac{-x-14}{x(x-7)}. \end{aligned}$$

Remarque : On ne développe pas le dénominateur. La forme factorisée permet de voir les valeurs interdites.

(c) Cette expression est définie pour tous les $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient $x+3 \neq 0$ et $(x+5)(x-1) \neq 0$. Son ensemble de définition est donc :

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5; -3; 1\}.$$

Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on calcule :

$$\begin{aligned} &\frac{2}{x+3} - \frac{4x}{(x+5)(x-1)} \\ &\quad = \frac{2(x+5)(x-1)}{(x+3)(x+5)(x-1)} - \frac{4x(x+3)}{(x+3)(x+5)(x-1)} \\ &\quad = \frac{2(x+5)(x-1) - 4x(x+3)}{(x+3)(x+5)(x-1)} \\ &\quad = \frac{2(x^2+4x-5) - 4x^2 - 12x}{(x+3)(x+5)(x-1)} \\ &\quad = \frac{2x^2+8x-10-4x^2-12x}{(x+3)(x+5)(x-1)} \\ &\quad = \frac{-2x^2-4x-10}{(x+3)(x+5)(x-1)}. \end{aligned}$$

(d) La racine carrée n'étant définie que pour les nombres réels positifs, cette expression est définie pour tous les nombres $x \in \mathbb{R}$ tels que $x \geqslant 0$ et $x \neq 0$. Son ensemble de définition est donc :

$$\mathcal{D} =]0; +\infty[.$$

Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on calcule :

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} &= \frac{x \times \sqrt{x}}{x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}} + \frac{1}{x} \\ &= \frac{x\sqrt{x}}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x} \\ &= \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x} + 1}{x}. \end{aligned}$$

(e) Cette expression algébrique est définie pour tous les nombres $x \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq 0$, que $x - 1 \neq 0$ et que

$$\begin{aligned} x^2 - 1 \neq 0 &\iff (x-1)(x+1) \neq 0 \\ &\iff x \neq 1 \text{ et } x \neq -1. \end{aligned}$$

Son ensemble de définition est $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on calcule :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-1} \\
&\quad = \frac{x^2-1}{x(x^2-1)} + \frac{x(x+1)}{x(x-1)(x+1)} + \frac{1}{x^2-1} \\
&\quad = \frac{x^2-1+x(x+1)+x}{x(x^2-1)} \\
&\quad = \frac{x^2-1+x^2+x+x}{x(x^2-1)} \\
&\quad = \frac{2x^2+2x-1}{x(x^2-1)}.
\end{aligned}$$

Exercice 6. On simplifie chaque expression en utilisant les propriétés des puissances. Au lecteur de s'assurer qu'il identifie à chaque étape des calculs la propriété utilisée.

(a) On calcule :

$$\begin{aligned} 5^2 \times 5^4 &= 5^{2+4} \\ &= 5^6. \end{aligned}$$

(b) On calcule :

$$\begin{aligned} 6^4 \times 6^{-9} &= 6^{4+(-9)} \\ &= 6^{-5}. \end{aligned}$$

(c) On calcule :

$$\begin{aligned} 3^8 \times 2^8 \times 5^8 &= (3 \times 2 \times 5)^8 \\ &= 30^8. \end{aligned}$$

(d) On calcule :

$$\begin{aligned} -4 \times (-4)^7 &= (-4)^1 \times (-4)^7 \\ &= (-4)^8. \end{aligned}$$

(e) On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{2^3 \times 7^9}{14^3} &= \frac{2^3 \times 7^9}{(2 \times 7)^3} \\ &= \frac{2^3 \times 7^9}{2^3 \times 7^3} \\ &= 7^{9-3} \\ &= 7^6. \end{aligned}$$

(f) On calcule :

$$\begin{aligned} \left(\frac{4^2}{4^9}\right)^{-3} &= \left(4^{2-9}\right)^{-3} \\ &= \left(4^{-7}\right)^{-3} \\ &= 4^{-7\times(-3)} \\ &= 4^{21}. \end{aligned}$$

Exercice 7. Comme dans l'exercice précédent, il s'agit de manipuler habilement les formules sur les puissances.

- On calcule :

$$\begin{aligned} a &= \frac{3^{-2}}{4^{-2}} \times \frac{1}{8^5} \\ &= 3^{-2} \times 4^2 \times 8^{-5} \\ &= 3^{-2} \times \left(2^2\right)^2 \times \left(2^3\right)^{-5} \\ &= 3^{-2} \times 2^4 \times 2^{-15} \\ &= 2^{-11} \times 3^{-2} \end{aligned}$$

- On calcule :

$$\begin{aligned} b &= \frac{\left(2^3\right)^3 \times \left(5^4\right)^3}{\left(2^2\right)^4 \times \left(7^2\right)^4} \\ &= \frac{2^9 \times 5^{12}}{2^8 \times 7^8} \\ &= 2 \times 5^{12} \times 7^{-8}. \end{aligned}$$

- On calcule :

$$\begin{aligned} c &= \frac{3^2 \times \left(3^2\right)^{-4} \times (2 \times 3)^2}{\left(2^2 \times 3\right)^{-3} \times 2^4} \\ &= \frac{3^2 \times 3^{-8} \times 2^2 \times 3^2}{2^{-6} \times 3^{-3} \times 2^4} \\ &= \frac{3^{-4} \times 2^2}{2^{-2} \times 3^{-3}} \\ &= 2^4 \times 3^{-1}. \end{aligned}$$

- On calcule :

$$\begin{aligned} d &= 8^{12} + 8^{12} + 8^{12} + 8^{12} \\ &= 4 \times 8^{12} \\ &= 2^2 \times \left(2^3\right)^{12} \\ &= 2^2 \times 2^{36} \\ &= 2^{38}. \end{aligned}$$

Exercice 8. Supposons qu'un tel entier $n \in \mathbb{N}$ existe. On commence par calculer :

$$\begin{aligned} 27^n + 27^n + 27^n &= \left(3^3\right)^n + \left(3^3\right)^n + \left(3^3\right)^n \\ &= 3 \times 3^{3n} \\ &= 3^{3n+1}. \end{aligned}$$

On cherche ainsi $n \in \mathbb{N}$ tel que $3^{3n+1} = 3^{46}$. Cela implique que $3n + 1 = 46$. Et finalement, on trouve que $n = 15$.

Exercice 9. On utilise ici que $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ pour tous réels $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$. On calcule :

(a) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
(b) $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
(c) $\sqrt{128} = \sqrt{64 \times 2} = \sqrt{64} \times \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$
(d) $\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
(e) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
(f) $\sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = \sqrt{25} \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$
(g) $\sqrt{320} = \sqrt{64 \times 5} = \sqrt{64} \times \sqrt{5} = 8\sqrt{5}$
(h) $\sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

Exercice 10.

- On remarque que 3, 12 et 75 sont multiples de 3. On calcule :
$$\begin{aligned} A &= \sqrt{4\times 3} - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{25\times 3} \\ &= \sqrt{4}\times\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{25}\times\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 20\sqrt{3} \\ &= 18\sqrt{3}. \end{aligned}$$
- On remarque que 10, 40 et 90 sont multiples de 10. On calcule :
$$\begin{aligned} B &= 2\sqrt{9\times 10} - 5\sqrt{4\times 10} + 7\sqrt{10} \\ &= 2\sqrt{\times}\sqrt{10} - 5\sqrt{4}\times\sqrt{10} + 7\sqrt{10} \\ &= 6\sqrt{10} - 10\sqrt{10} + 7\sqrt{10} \\ &= 3\sqrt{10}. \end{aligned}$$
- On remarque que 8, 32 et 50 sont multiples de 2. On calcule :
$$\begin{aligned} C &= 7\sqrt{16\times 2} - 9\sqrt{25\times 2} + 3\sqrt{4\times 2} \\ &= 7\sqrt{16}\times\sqrt{2} - 9\sqrt{25}\times\sqrt{2} + 3\sqrt{4}\times\sqrt{2} \\ &= 28\sqrt{2} - 45\sqrt{2} + 6\sqrt{2} \\ &= -11\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Exercice 11.

(a) On calcule :
$$\begin{aligned} \sqrt{13^2+13^2+13^2+13^3} &= \sqrt{4\times 13^2} \\ &= \sqrt{4}\times\sqrt{13^2} \\ &= 2\times 13 \\ &= 26. \end{aligned}$$

(b) On calcule :
$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{50}+\sqrt{18}}{\sqrt{32}} &= \frac{\sqrt{25\times 2}+\sqrt{9\times 2}}{\sqrt{16\times 2}} \\ &= \frac{5\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \\ &= 4. \end{aligned}$$

(c) L'idée est de calculer progressivement en partant de la racine carrée la plus à l'intérieur de l'expression. On obtient successivement que :
$$\begin{gathered} \sqrt{49} = 7 \\ \sqrt{29+\sqrt{49}} = \sqrt{29+7} = \sqrt{36} = 6 \\ \sqrt{19+\sqrt{29+\sqrt{49}}} = \sqrt{19+6} = \sqrt{25} = 5 \\ \sqrt{11+\sqrt{19+\sqrt{29+\sqrt{49}}}} = \sqrt{11+5} = \sqrt{16} = 4 \\ \sqrt{5+\sqrt{11+\sqrt{19+\sqrt{29+\sqrt{49}}}}} = \sqrt{5+4} = 3. \end{gathered}$$

(d) On procède comme à la question précédente. Cela donne successivement :
$$\begin{gathered} \sqrt{1} = 1 \\ \sqrt{3+\sqrt{1}} = \sqrt{4} = 2 \\ \sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}} = \sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3 \\ \sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}} = \sqrt{13+3} = \sqrt{16} = 4 \\ \sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}} = \sqrt{21+4} = 5 \\ \sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}}} = \sqrt{31+5}. \end{gathered}$$
Ce nombre est donc 6.

(e) On calcule :
$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{75}-\sqrt{50}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{25\times 3}-\sqrt{25\times 2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \\ &= \frac{5\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \\ &= \frac{5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \\ &= 5. \end{aligned}$$

(f) On observe que le nombre sous le radical se prête à l'utilisation de la troisième identité remarquable. On calcule :
$$\begin{aligned} \sqrt{26^2-24^2} &= \sqrt{(26-24)(26+24)} \\ &= \sqrt{2\times 50} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10. \end{aligned}$$

(g) En utilisant les propriétés des puissances, on calcule :
$$\begin{aligned} \sqrt{2^9+2^9} &= \sqrt{2\times 2^9} \\ &= \sqrt{2^{10}} \\ &= \sqrt{\left(2^5\right)^2} \\ &= 2^5 \\ &= 32. \end{aligned}$$

Exercice 12. L'aire $\mathcal{A}_{ABCD}$ du rectangle $ABCD$ est égale à :
$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ABCD} &= AB\times AC \\ &= \sqrt{12}\times\sqrt{27} \\ &= \sqrt{3\times 4}\times\sqrt{3\times 9} \\ &= \left(\sqrt{3}\right)^2\times\sqrt{4}\times\sqrt{9} \\ &= 18. \end{aligned}$$

Et son périmètre est :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{ABCD} &= 2AB + 2AC\\ &= 2\sqrt{12} + 2\sqrt{27}\\ &= 2\times 2\sqrt{3} + 2\times 3\sqrt{3}\\ &= 4\sqrt{3} + 6\sqrt{3}\\ &= 10\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Exercice 13.

1. (a) En utilisant la troisième identité remarquable, on calcule :

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}+3\right)\left(\sqrt{2}-3\right) &= \left(\sqrt{2}\right)^2 - (3)^2\\ &= 2-9\\ &= -7.\end{aligned}$$

Ce nombre est entier.

(b) On multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée de $\sqrt{2}+3$:

$$\begin{aligned}A &= \frac{\sqrt{2}-3}{(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-3)}\\ &= \frac{\sqrt{2}-3}{-7}\\ &= \frac{3-\sqrt{2}}{7}.\end{aligned}$$

2. On procède à chaque fois de la même manière qu'à la question précédente en utilisant la quantité conjuguée du dénominateur.

- On calcule :

$$\begin{aligned}B &= \frac{3\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)}\\ &= \frac{3\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}\\ &= \frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{5})}{6-5}\\ &= 3\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right).\end{aligned}$$

- On calcule :

$$\begin{aligned}C &= \frac{5\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}\\ &= \frac{5\left(2+\sqrt{3}\right)}{(2)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}\\ &= \frac{5\left(2+\sqrt{3}\right)}{4-3}\\ &= 5\left(2+\sqrt{3}\right).\end{aligned}$$

- On calcule :

$$\begin{aligned}D &= \frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}\\ &= \frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{2-3}\\ &= \frac{\sqrt{12}-\sqrt{18}}{-1}\\ &= \sqrt{18}-\sqrt{12}\\ &= 3\sqrt{2}-2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

- On procède en deux étapes en commençant par considérer comme conjugués l'un de l'autre les nombres :

$$\left(1+\sqrt{3}\right)+\sqrt{5} \quad \text{et} \quad \left(1+\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}.$$

On calcule :

$$\begin{aligned}E &= \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}\\ &= \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}\\ &= \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{1+2\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2-5}\\ &= \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-1+2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Et ensuite, en utilisant de nouveau la quantité du dénominateur, on obtient que :

$$\begin{aligned}E &= \frac{\left(1+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(-1-2\sqrt{3}\right)}{\left(-1+2\sqrt{3}\right)\left(-1-2\sqrt{3}\right)}\\ &= \frac{-1-2\sqrt{3}-\sqrt{3}-2\left(\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{5}+2\sqrt{15}}{(-1)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}\\ &= \frac{-7-3\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\sqrt{15}}{-11}\\ &= \frac{7+3\sqrt{3}-\sqrt{5}-2\sqrt{15}}{11}.\end{aligned}$$

Exercice 14. Notons A ce nombre. Avec les expressions conjuguées des dénominateurs, on calcule déjà que :

$$\begin{aligned}\frac{\left(8-2\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)} &= \frac{8\sqrt{3}+8\sqrt{5}-2\sqrt{45}-2\sqrt{75}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}\\ &= \frac{8\sqrt{3}+8\sqrt{5}-2\sqrt{45}-2\sqrt{75}}{-2}\end{aligned}$$

et d'autre part que :

$$\begin{aligned}\frac{\left(8+2\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)} &= \frac{8\sqrt{3}-8\sqrt{5}+2\sqrt{45}-2\sqrt{75}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}\\ &= \frac{8\sqrt{3}-8\sqrt{5}+2\sqrt{45}-2\sqrt{75}}{-2}\end{aligned}$$

En additionnant les deux quantités obtenues, on obtient finalement que :

$$\begin{aligned} A &= \frac{16\sqrt{3} - 4\sqrt{75}}{-2} \\ &= 2\sqrt{75} - 8\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{25 \times 3} - 8\sqrt{3} \\ &= 10\sqrt{3} - 8\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Exercice 15. L'égalité voulue est une égalité entre deux nombres réels positifs. Deux nombres réels positifs sont égaux si, et seulement si, leurs carrés sont égaux. Ainsi, il suffit de montrer que :

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 = 6.$$

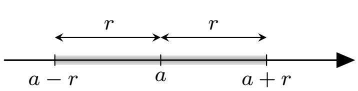
On calcule :

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 + 2\sqrt{2-\sqrt{3}} \times \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ &\quad + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 \\ &= 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)} + 2 + \sqrt{3} \\ &= 4 + 2\sqrt{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} \\ &= 4 + 2\sqrt{1} \\ &= 6. \end{aligned}$$

Exercice 16. Soient $a \in \mathbb{R}$ et un réel $r > 0$. Puisque la valeur absolue $|x - a|$ correspond à la distance (sur un axe gradué unitaire) entre les points d'abscisses x et a, on voit que l'ensemble des nombres $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$|x - a| \leqslant r$$

est l'ensemble des abscisses x des points s'écartant du point d'abscisse a d'une distance au maximum égale à r. C'est donc l'intervalle $[a - r; a + r]$.



Lorsque l'inégalité large $\leqslant$ est remplacée par une inégalité stricte $<$ l'intervalle est ouvert.

(a) On prend $a = 0$ et $r = 2$ dans le raisonnement ci-dessus. L'ensemble recherché est l'intervalle $[0; 2]$.
(b) On prend $a = 1$ et $r = 9$. L'ensemble recherché est donc l'intervalle ouvert $]-8; 10[$.
(c) On prend $a = -5$ et $r = 7$. L'ensemble recherché est donc l'intervalle $]-12; 2[$.
(d) L'inégalité $|x - 2| \leqslant -3$ est évidemment impossible. L'ensemble recherché est l'ensemble vide.

Exercice 17. Dans ce type d'exercice, le bon réflexe est de faire le nécessaire pour se débarasser des valeurs absolues. On fait des disjonctions de cas selon le signe des expressions contenues dans les valeurs absolues.

(a) On résout :

$$2x + 5 > 0 \iff x > \frac{-5}{2}.$$

Ainsi, on a que :

$$|2x+5| = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \geqslant \frac{-5}{2} \\ -(2x+5) & \text{si } x < \frac{-5}{2}. \end{cases}$$

On en déduit que :

$$|2x+5| = 7 \iff \begin{cases} 2x + 5 = 7 & \text{si } x \geqslant \frac{-5}{2} \\ -2x - 5 = 7 & \text{si } x < \frac{-5}{2}. \end{cases}$$

La première équation $2x + 5 = 7$ donne que $x = 2$ et on vérifie que $2 \geqslant \frac{-5}{2}$. La deuxième équation donne que $x = -6$ et on vérifie que $-6 < \frac{-5}{2}$. L'ensemble des solutions de l'équation est donc :

$$\mathcal{S} = \{-6; 2\}.$$

Remarque. On trouve dans la littérature mathématique l'utilisation de la propriété (qui est claire par définition de la valeur absolue) donnant que, pour tout réel $a \geqslant 0$:

$$|x| = a \iff (x = a \text{ ou } x = -a).$$

Son utilisation donne une résolution rapide de l'équation précédente. Nous avons préféré rédiger la disjonction de cas en détail car il s'agit de la méthode générale pour traiter toute équation/inéquation avec des valeurs absolues.

(b) On résout :

$$7 - 5x > 0 \iff x < \frac{7}{5}$$

et

$$3x + 1 > 0 \iff x > \frac{-1}{3}.$$

On distingue trois cas que l'on peut présenter sous la forme du tableau suivant :

x	$-\infty$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{7}{5}$	$+\infty$
$7-5x$	$7-5x$	$7-5x$	$5x-7$	
$3x+1$	$-3x-1$	$3x+1$	$3x+1$	

Premier cas : Lorsque $x \in \left]-\infty; \frac{-1}{3}\right[$, l'équation est équivalente à

$$\begin{aligned} 7 - 5x = -3x - 1 &\iff -2x = -8 \\ &\iff x = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Ce cas est finalement impossible car $\frac{8}{3} \notin \left]-\infty; \frac{-1}{3}\right[$.

Deuxième cas : Lorsque $x \in \left[\frac{-1}{3}; \frac{7}{5}\right]$, on obtient que l'équation est équivalente à

$$\begin{aligned} 7 - 5x = 3x + 1 &\iff -8x = -6 \\ &\iff x = \frac{-3}{4}. \end{aligned}$$

Ce cas est encore impossible puisque $\frac{-3}{4} \notin \left[\frac{-1}{3}; \frac{7}{5}\right]$.

Troisième cas : Lorsque $x \in \left]\frac{7}{5} : +\infty\right[$, on obtient que l'équation est équivalente à

$$\begin{aligned} 5x - 7 = 3x + 1 &\iff 2x = 8 \\ &\iff x = 4. \end{aligned}$$

Ce cas est valable puisque l'on a bien $4 \in \left]\frac{7}{5} : +\infty\right[$.

En conclusion, l'équation admet une unique solution. On a que :

$$\mathcal{S} = \{4\}.$$

(c) Nous laissons ici le lecteur rédiger la disjonction de cas et vérifier que $\mathcal{S} = \{0\}$.

(d) On résout :

$$x - 5 > 0 \iff x > 5$$

et

$$2x - 7 > 0 \iff x > \frac{7}{2}.$$

On distingue trois cas que l'on présente sous la forme du tableau suivant :

x	$-\infty$	$\frac{7}{2}$	5	$+\infty$
$x-5$	$5-x$		$5-x$	$x-5$
$2x-7$	$-2x+7$		$2x-7$	$2x-7$

Premier cas : Lorsque $x \in \left]-\infty; \frac{7}{2}\right[$, l'inéquation est équivalente à

$$\begin{aligned} & 5 - x + 4(x-2) \leqslant 3(-2x+7) \\ \iff & 5 - x + 4x - 8 \leqslant -6x + 21 \\ \iff & 9x \leqslant 24 \\ \iff & x \leqslant \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Tous les nombres $x \leqslant \frac{8}{3}$ sont bien solutions car ils appartiennent à l'intervalle $\left]-\infty; \frac{7}{2}\right[$.

Deuxième cas : Lorsque $x \in \left[\frac{7}{2}; 5\right]$, on obtient que l'inéquation est équivalente à

$$\begin{aligned} & 5 - x + 4(x-2) \leqslant 3(2x-7) \\ \iff & 5 - x + 4x - 8 \leqslant 6x - 21 \\ \iff & -3x \leqslant -18 \\ \iff & x \geqslant 6. \end{aligned}$$

Ce cas n'apporte aucune solution puisque aucun nombre réel $x \geqslant 6$ est dans l'intervalle $\left[\frac{7}{2}; 5\right]$.

Troisième cas : Lorsque $x \in \ ]5; +\infty[$, l'inéquation est équivalente à

$$\begin{aligned} & x - 5 + 4(x-2) \leqslant 3(2x-7) \\ \iff & x - 5 + 4x - 8 \leqslant 6x - 21 \\ \iff & -x \leqslant -8 \\ \iff & x \geqslant 8. \end{aligned}$$

Tous les nombres $x \geqslant 8$ sont bien solutions car ils appartiennent à l'intervalle $]5; +\infty[$.

En conclusion, on a que l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$\mathcal{S} = \left]-\infty; \frac{7}{2}\right[\ \cup \ ]5; +\infty[\,.$$

(e) On effectue le même raisonnement. Les expressions changent de signe en $x = -1$ et $x = 1$. Le tableau suivant présente la disjonction de cas :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x-1$	$-x+1$		$-x+1$	$x-1$
$x+1$	$-x-1$		$x+1$	$x+1$

Premier cas : Lorsque $x \in]-\infty; 1[$, l'inéquation est équivalente à

$$\begin{aligned} |x+1| \geqslant |x-1| &\iff -x-1 \geqslant -x+1 \\ &\iff -1 \geqslant 1 \end{aligned}$$

Ceci est impossible, ce cas n'apporte aucune solution.

Deuxième cas : Lorsque $x \in [-1; 1]$, on obtient alors que :

$$\begin{aligned} |x+1| \geqslant |x-1| &\iff x+1 \geqslant -x+1 \\ &\iff x \geqslant 0. \end{aligned}$$

Les solutions apportées par ce cas sont les nombres réels vérifiant $x \in [-1; 1] \cap [0; +\infty[$, donc $x \in [0; 1]$.

Troisième cas : Lorsque $x \in]1; +\infty[$, la résolution de l'inéquation est :

$$\begin{aligned} |x+1| \geqslant |x-1| &\iff x+1 \geqslant x-1 \\ &\iff 1 \geqslant -1. \end{aligned}$$

Ce qui est toujours vrai, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, tous les nombres $x \in]1; +\infty[$ sont bien des solutions.

Pour conclure, en combinant les trois cas, l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$\mathcal{S} = [0; +\infty[.$$

(f) On procède encore de la même manière. Les expressions changent de signe en $x = -3$ et $x = -2$. Le tableau suivant présente la disjonction de cas :

x	$-\infty$	-3	-2	$+\infty$
$x+2$	$-x-2$		$-x-2$	$x+2$
$x+3$	$-x-3$		$x+3$	$x+3$

Premier cas : Lorsque $x \in]-\infty;-3[$, l'inéquation est équivalente à

$$\begin{aligned}|x+2| \geqslant 2|x+3| &\iff -x-2 \geq 2(-x-3)\\ &\iff x \geqslant -4\end{aligned}$$

Les solutions sont les réels $x \in]-\infty;-3[\cap [-4;\infty[$, ce qui donne $x \in [-4;-3[$
Deuxième cas : Lorsque $x \in [-3;-2]$, l'inéquation est équivalente à

$$\begin{aligned}|x+2| \geqslant 2|x+3| &\iff -x-2 \geqslant 2x+6\\ &\iff -\frac{8}{3} \geqslant x.\end{aligned}$$

Les solutions sont les $x \in [-3;-2] \cap \left]-\infty; \frac{-8}{3}\right]$, ce qui donne $x \in \left[-3;-\frac{8}{3}\right]$.

Troisième cas : Pour $x \in]-2;+\infty[$, l'inéquation est équivalente à

$$\begin{aligned}|x+2| \geqslant 2|x+3| &\iff x+2 \geqslant 2x+6\\ &\iff -4 \geqslant x.\end{aligned}$$

Comme $[-2;+\infty[\cap]-\infty;-4]$ est vide, il n'y a pas de solution pour ce cas.

En réunissant les solutions obtenues dans les trois cas, l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$\mathcal{S} = \left[-4;-\frac{8}{3}\right].$$

Exercice 18.

(a) Une première méthode commence évidemment par le calcul du discriminant de cette équation :

$$\begin{aligned}\Delta &= 2^2 - 4 \times 1 \times (-3)\\ &= 16.\end{aligned}$$

Puisque $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions qui sont :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1} & \text{et} \qquad x_2 &= \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times 1}\\ &= 1 & &= -3.\end{aligned}$$

Plus habilement, on pouvait remarquer que 1 est une solution « évidente » de l'équation. Ainsi, le trinôme se factorise sous la forme :

$$x^2+2x-3 = (x-1)(x-x_2).$$

En développant l'expression de droite et en égalisant les termes constants, on retrouve que :

$$-3 = x_2.$$

Avec un peu d'habitude, cela se fait mentalement… Pour les amateurs de la méthode, il est aussi possible d'utiliser la somme ou le produit des racines.

(b) On calcule :

$$\begin{aligned}\Delta &= 7^2 - 4 \times 5 \times 18\\ &= -311.\end{aligned}$$

Puisque $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution dans l'ensemble des nombres réels.

(c) Un produit de nombres réels est nul si, et seulement si, au moins l'un de ses facteurs est nul. L'équation est donc équivalente à :

$$x+3=0 \quad \text{ou} \quad 2x^2-10x+15=0.$$

La première équation donne évidemment que $x = -3$. Le discriminant de la seconde est :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-10)^2 - 4 \times 2 \times 15\\ &= -20.\end{aligned}$$

Comme $\Delta < 0$, l'équation $2x^2-10x+15=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Ainsi, l'unique solution est -3.

(d) On commence par déterminer le tableau de signes de la fonction $P : x \mapsto -3x^2+9x+30$. Son discriminant est :

$$\begin{aligned}\Delta &= 9^2 - 4 \times (-3) \times 30\\ &= 441.\end{aligned}$$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme P possède deux racines qui sont :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-9+\sqrt{441}}{2\times(-3)} & \text{et} \qquad x_2 &= \frac{-9-\sqrt{441}}{2\times(-3)}\\ &= -2 & &= 5.\end{aligned}$$

Puisque $a=-3$, la parabole est tournée vers le bas et l'on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions est : $]-\infty;-2[\cup]5;+\infty[$.

(e) Le premier réflexe est de se ramener à l'étude du signe d'une fonction polynôme P de degré 2. On a :

$$-x^2-5x+7 \geqslant x+1 \iff -x^2-6x+6 \geqslant 0.$$

On calcule :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-6)^2 - 4 \times (-1) \times 6\\ &= 60.\end{aligned}$$

Puisque $\Delta > 0$, le trinôme P possède deux racines qui sont :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{6-\sqrt{60}}{2\times(-1)} & \text{et} \qquad x_2 &= \frac{6+\sqrt{60}}{2\times(-1)}\\ &= \sqrt{15}-3 & &= \sqrt{15}+3.\end{aligned}$$

Puisque $a=-3$, la parabole est tournée vers le bas et l'on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\sqrt{15}-3$		$\sqrt{15}+3$		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de notre inéquation est donc l'intervalle

$$\left[\sqrt{15}-3;\sqrt{15}+3\right].$$

(f) On étudie le signe de chacun des facteurs afin de dresser le tableau de signes de la fonction

$$f : x \longmapsto (x+3)(2x^2+9x-5).$$

Il est clair que $x+3>0$ si, et seulement si, $x>-3$. Le discriminant du trinôme est :

$$\begin{aligned}\Delta &= 9^2 - 4\times 2\times(-5)\\ &= 121.\end{aligned}$$

Puisque $\Delta > 0$, le trinôme P possède deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-9-\sqrt{121}}{2\times 2} = -5 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-9+\sqrt{121}}{2\times 2} = \frac{1}{2}.$$

Puisque $a=2$, la parabole est tournée vers le haut et l'on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-5		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc :

$$]-\infty;-5[\ \cup \left]-3;\frac{1}{2}\right[.$$

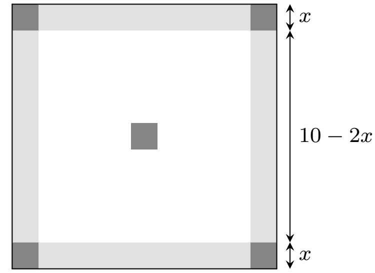
(g) L'étude des signes est identique à celle de la question précédente. Rappelons que les racines du trinôme au dénominateur sont des valeurs interdites et que l'usage est de le signaler par des « doubles barres » dans le tableau. On obtient :

x	$-\infty$		-5		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	$\Vert$	$-$		$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc :

$$]-5;-3]\ \cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right[.$$

Exercice 19. On commence par remarquer que la construction de la figure impose que $x\in [0;10]$. Dans le cas $x=0$, la figure ne comporte que le carré initial. Dans le cas $x=10$, l'intégralité du carré initial est colorié. Ce sont des cas extrêmes : si l'on préfère exclure ces cas, on choisit $x\in\,]0;10[$. Ce détail n'a pas grande importance. Nous prenons $x\in[0;10]$.



Exprimons en fonction de x chacune des aires coloriées et non coloriées. On les note $\mathcal{A}$ et $\overline{\mathcal{A}}$ respectivement.

- On remarque (par exemple) que l'aire coloriée est composée de 4 rectangles de longueur $10-2x$ et de largeur x ainsi que de 5 carrés de côté x. Ainsi, on a que :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= 4x(10-2x)+5x^2\\ &= 40x-8x^2+5x^2\\ &= 40x-3x^2.\end{aligned}$$

- L'aire non coloriée s'obtient par différence de l'aire totale du carré initial avec l'aire coloriée. Ainsi, on calcule que :

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{A}} &= 10^2-(40x-3x^2)\\ &= 100-40x+3x^2.\end{aligned}$$

On résout donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}<\overline{\mathcal{A}} &\iff 40x-3x^2<100-40x+3x^2\\ &\iff 6x^2-80x+100>0.\end{aligned}$$

Il s'agit d'une inéquation du second degré. On calcule son discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-80)^2-4\times 6\times 100\\ &= 4000.\end{aligned}$$

Puisque $\Delta>0$, le trinôme possède deux racines que nous notons α et β pour changer :

$$\alpha = \frac{80-\sqrt{4000}}{2\times 6} = \frac{20-5\sqrt{10}}{3} \simeq 1,4 \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{80+\sqrt{4000}}{2\times 6} = \frac{20+5\sqrt{10}}{3} \simeq 11,9.$$

Puisque $a=6$, la parabole est tournée vers le haut : le trinôme prend des valeurs négatives sur $[\alpha;\beta]$ et positives sinon. Puisque $\beta\notin[0;10]$, on obtient le tableau de signes suivant.

x	0		α		10
$P(x)$		$+$	0	$-$	

En conclusion, l'aire coloriée est strictement inférieure à l'aire non coloriée lorsque $x\in[0;\alpha[$.

Exercice 20.

1. On calcule :
$$\begin{aligned}2^3 - 2^2 - 14 \times 2 + 24 &= 8 - 4 - 28 + 24\\ &= 0.\end{aligned}$$
Donc 2 est solution de (E).
2. L'idée est de développer la forme factorisée que l'énoncé propose afin d'identifier des conditions sur les coefficients a, b et c permettant d'avoir l'égalité. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on calcule :
$$\begin{aligned}&(x-2)(ax^2+bx+c)\\ &\quad= ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c\\ &\quad= ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c.\end{aligned}$$
En identifiant les coefficients devant les monômes de même degré, on conclut que :
$$\begin{aligned}&x^3 - x^2 - 14x + 24 = (x-2)(ax^2+bx+c)\\ \iff& \begin{cases} a = 1\\ b - 2a = -1\\ c - 2b = -14\\ -2c = 24\end{cases}\\ \iff& \begin{cases} a = 1\\ b = 1\\ c = -12.\end{cases}\end{aligned}$$
Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = (x-2)(x^2+x-12).$$
3. L'équation (E) est donc maintenant équivalente à l'équation suivante :
$$\begin{aligned}&(x-2)(x^2+x-12) = 0\\ \iff& x - 2 = 0 \quad\text{ou}\quad x^2 - x - 12 = 0.\end{aligned}$$
La première équation donne que $x = 2$. Le discriminant de la seconde est :
$$\begin{aligned}\Delta &= 1^2 - 4 \times 1 \times 12\\ &= 49.\end{aligned}$$
Puisque $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions qui sont :
$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-1-\sqrt{49}}{2\times 1} &\quad\text{et}\quad x_2 &= \frac{-1+\sqrt{49}}{2\times 1}\\ &= -4 & &= 3.\end{aligned}$$
En définitive, on conclut que l'équation (E) admet trois solutions : -4, 2 et 3.

Remarque : Vous verrez en 1^{re} année qu'un polynôme de degré n possède au maximum n racines. Vous verrez aussi que la propriété de factorisation vue pour les polynômes de degré 2 est vraie pour tout polynôme : tout polynôme admettant $\alpha \in \mathbb{R}$ pour racine se factorise par $(x - \alpha)$. Cela justifie la factorisation par $(x-2)$ dans cet exercice et donc l'existence des nombres a, b et c.

Exercice 21.

1. On a que :
$$0^4 - 5 \times 0^3 + 4 \times 0^2 + 5 \times 0 + 1 \neq 0.$$
Donc 0 n'est pas solution de (E).
2. (a) Comme 0 n'est pas solution de l'équation (E), on peut calculer (diviser par x^2 est licite) ainsi :
$$\begin{aligned}&x \text{ est solution de } (E)\\ \iff& x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 5x + 1 = 0\\ \iff& \frac{x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 5x + 1}{x^2} = 0\\ \iff& x^2 - 5x + 4 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0\\ \iff& \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x - \frac{1}{x}\right) + 4 = 0.\end{aligned}$$
En remarquant alors (comme cela a déjà été vu dans l'exercice 3) que :
$$y^2 - 2 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right),$$
on obtient que :
$$\begin{aligned}&x \text{ est solution de } (E)\\ \iff& (y^2 - 2) - 5y + 4 = 0\\ \iff& y^2 - 5y + 2 = 0.\end{aligned}$$
(b) Le discriminant de cette équation est $\Delta = 17$. Elle admet donc deux solutions :
$$y_1 = \frac{5-\sqrt{17}}{2} \qquad\text{et}\qquad y_2 = \frac{5+\sqrt{17}}{2}.$$
3. Compte tenu de l'équivalence obtenue à la question précédente, on a que :
$$x \text{ solution de } (E) \iff x + \frac{1}{x} = y_1 \text{ ou } x + \frac{1}{x} = y_2.$$
Il reste à résoudre ces deux équations. La première déjà. En multipliant membre à membre par $2x$, on obtient que :
$$\begin{aligned}x + \frac{1}{x} = y_1 \iff& x + \frac{1}{x} = \frac{5-\sqrt{17}}{2}\\ \iff& 2x^2 + 2 = \left(5 - \sqrt{17}\right)x\\ \iff& 2x^2 - \left(5 - \sqrt{17}\right)x + 2 = 0.\end{aligned}$$
On calcule son discriminant :
$$\begin{aligned}\Delta &= \left(5 - \sqrt{17}\right)^2 - 4 \times 2 \times 2\\ &= 26 - 10\sqrt{17}\\ &\simeq -15,2.\end{aligned}$$
Puisque $\Delta < 0$, cette première équation ne possède pas de solution réelle. Pour la seconde équation, on a de la même manière que :
$$\begin{aligned}x + \frac{1}{x} = y_2 \iff& x + \frac{1}{x} = \frac{5+\sqrt{17}}{2}\\ \iff& 2x^2 + 2 = \left(5 + \sqrt{17}\right)x\\ \iff& 2x^2 - \left(5 + \sqrt{17}\right)x + 2 = 0.\end{aligned}$$

Son discriminant est :

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(5+\sqrt{17}\right)^2 - 4\times 2\times 2\\ &= 26+10\sqrt{17}\end{aligned}$$

Puisque $\Delta > 0$, elle admet deux solutions que l'on note α et β et qui sont égales à :

$$\alpha = \frac{5+\sqrt{17}-\sqrt{2+10\sqrt{17}}}{4}$$

et

$$\beta = \frac{5+\sqrt{17}+\sqrt{2+10\sqrt{17}}}{4}.$$

Pour conclure, l'équation (E) admet exactement deux solutions réelles : les nombres α et β ci-dessus.

Exercice 22. Nous allons procéder avec la démarche de l'exercice 20 : factoriser par $(x-\alpha)$ avec α une racine. N'ayant pas d'indication dans l'énoncé, on commence par chercher une racine évidente.

1. On trouve que $x=1$ est racine car $P(1)=0$. Il existe donc a, b et c des nombres réels tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c).$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on calcule :

$$\begin{aligned}&(x-1)(ax^2+bx+c)\\ &\quad = ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c\\ &\quad = ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients devant les monômes de même degré, on obtient que :

$$\begin{aligned}&2x^3-3x^2-x+2 = (x-1)(ax^2+bx+c)\\ &\iff \begin{cases} a=2\\ b-a=-3\\ c-b=-1\\ -c=2\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} a=2\\ b=-1\\ c=-2.\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$P(x) = (x-1)(2x^2-x-2).$$

Il reste à factoriser le polynôme $2x^2-x-2$. Nous laissons le lecteur vérifier que son discriminant est égal à $\Delta = 17$ et que ses deux racines réelles sont :

$$\alpha = \frac{1-\sqrt{17}}{4} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1+\sqrt{17}}{4}.$$

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$2x^2-x-2 = 2(x-\alpha)(x-\beta).$$

Finalement, nous avons que la forme factorisée du polynôme P est donnée, pour tout $x\in\mathbb{R}$, par :

$$P(x) = 2(x-1)(x-\alpha)(x-\beta).$$

2. En testant avec les petites valeurs entières, on trouve que $x=2$ est une racine car $Q(2)=0$. Il existe donc des réels a, b et c tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}Q(x) &= (x-2)(ax^2+bx+c)\\ &= ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c.\end{aligned}$$

Et comme

$$Q(x) = x^3-2x^2+x-2,$$

en identifiant les coefficients devant les monômes de même degré, on obtient que :

$$\begin{cases} a=1\\ b-2a=-2\\ c-2b=1\\ -2c=-2\end{cases} \iff \begin{cases} a=1\\ b=0\\ c=1.\end{cases}$$

Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$Q(x) = (x-2)(x^2+1).$$

Puisque x^2+1 n'admet pas de racine réelle, cette factorisation est la meilleure possible dans $\mathbb{R}$.

3. On trouve que $x=2$ est une racine. Il existe donc des réels a, b et c tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}R(x) &= (x-2)(ax^2+bx+c)\\ &= ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c.\end{aligned}$$

Et comme

$$R(x) = x^3-x^2-4x+4,$$

en identifiant les coefficients devant les monômes de même degré, on obtient que :

$$\begin{cases} a=1\\ b-2a=-1\\ c-2b=-4\\ -2c=4\end{cases} \iff \begin{cases} a=1\\ b=1\\ c=-2.\end{cases}$$

Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$R(x) = (x-2)(x^2+x-2).$$

On laisse le lecteur factoriser x^2+x-2 et vérifier que, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$x^2+x-2 = (x+2)(x-1).$$

Et finalement, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$R(x) = (x-2)(x+2)(x-1).$$

4. On peut voir que $x=2$ est racine. Cependant, il est plus habile de remarquer (par la deuxième identité remarquable) que, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$S(x) = (x^2-4)^2.$$

Et comme

$$x^2-4 = (x-2)(x+2),$$

on a finalement que la (meilleure) forme factorisée du polynôme $S(x)$ est donnée, pour tout $x\in\mathbb{R}$, par :

$$S(x) = (x-2)^2(x+2)^2.$$

Exercice 23. Une **première méthode** consiste simplement à utiliser la forme canonique

$$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

rappelée dans l'énoncé. Ce n'est pas la méthode la plus maligne. Elle nécessite déjà de mémoriser la formule !

1. Avec
$$a = 1, \quad b = -8, \quad c = 16,$$
on obtient que :
$$P_1(x) = (x-4)^2.$$

2. Avec
$$a = 1, \quad b = 12, \quad c = 10,$$
on obtient que :
$$P_2(x) = (x+6)^2 - 26.$$

3. Avec
$$a = -2, \quad b = 10, \quad c = 25,$$
on obtient que :
$$P_3(x) = -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{75}{2}.$$

4. Avec
$$a = 4, \quad b = 5, \quad c = 3,$$
on obtient que :
$$P_4(x) = 4\left(x + \frac{5}{8}\right)^2 - \frac{11}{8}.$$

La **deuxième méthode** consiste à reconnaître dans les premiers termes « ax^2+bx » de l'expression $P(x)$ le début de l'une des deux premières identités remarquables.

1. On remarque que $x^2-8x+16$ peut s'écrire comme une identité remarquable. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned} P_1(x) &= x^2 - 2\times 4\times x + 4^2 \\ &= (x-4)^2. \end{aligned}$$

2. On commence par voir $x^2 + 12x$ comme le début de l'identité $(x+6)^2 = x^2 + 12x + 6^2$. Ainsi, on a que :
$$x^2 + 12x = (x+6)^2 - 36.$$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc :
$$\begin{aligned} P_2(x) &= x^2 + 12x + 10 \\ &= (x+6)^2 - 36 + 10 \\ &= (x+6)^2 - 26. \end{aligned}$$

3. On commence par factoriser par -2 pour faciliter la reconnaissance de la deuxième identité remarquable. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a que :
$$P_3(x) = -2\left(x^2 - 5x\right) + 25.$$
Et comme :
$$\begin{aligned} x^2 - 5x &= x^2 - 2\times\frac{5}{2}x \\ &= \left[x^2 - 2\times\frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ &= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}, \end{aligned}$$
il vient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} P_3(x) &= -2\left(x^2 - 5x\right) + 25 \\ &= -2\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right] + 25 \\ &= -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{75}{2}. \end{aligned}$$

4. Comme dans l'exemple précédent, on factorise d'abord par 4 pour faciliter la reconnaissance de l'identité remarquable. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on calcule :
$$\begin{aligned} P_4(x) &= 4x^2 + 5x + 3 \\ &= 4\left(x^2 + \frac{5}{4}x\right) + 3 \\ &= 4\left[\left(x + \frac{5}{8}\right)^2 - \frac{25}{64}\right] + 3 \\ &= 4\left(x + \frac{5}{8}\right)^2 - \frac{13}{16}. \end{aligned}$$

Exercice 24. On raisonne par l'absurde. Supposons que cette équation possède une solution $\alpha \in \mathbb{Z}$. Alors, on a que :

$$\begin{aligned} & \alpha^4 - 7\alpha^3 + 4\alpha^2 + 5\alpha - 2 = 0 \\ \iff & \alpha^4 - 7\alpha^3 + 4\alpha^2 + 5\alpha = 2 \\ \iff & \alpha(\alpha^3 - 7\alpha^2 + 4\alpha + 5) = 2. \end{aligned}$$

Mais comme α est un nombre entier, il est évident que le nombre $\alpha^3 - 7\alpha^2 + 4\alpha + 5$ est également entier. Ainsi, notre dernière égalité

$$\alpha(\alpha^3 - 7\alpha^2 + 4\alpha + 5) = 2$$

implique que α est un diviseur de 2. Et nous savons que les diviseurs de 2 sont : $-2; -1; 1$ et 2. Reprenons le fil du raisonnement : si α est solution entière de l'équation, alors on a nécessairement que $\alpha \in \{-2; -1; 1; 2\}$. Il nous reste à tester chacune de ces quatre possibilités :

- 1 n'est pas solution car
$$1^4 - 7\times 1^3 + 4\times 1^2 + 5\times 1 - 2 = 1;$$
- 2 n'est pas solution car
$$2^4 - 7\times 2^3 + 4\times 2^2 + 5\times 2 - 2 = -16;$$
- -1 n'est pas solution car
$$(-1)^4 - 7\times(-1)^3 + 4\times(-1)^2 + 5\times(-1) - 2 = 5;$$
- -2 n'est pas solution car
$$(-2)^4 - 7\times(-2)^3 + 4\times(-2)^2 + 5\times(-2) - 2 = 76.$$

L'hypothèse d'existence d'une solution entière à l'équation conduit ainsi à une absurdité. Cette équation ne possède donc pas de solution entière.

Exercice 25. On raisonne par l'absurde. Supposons que le nombre $\frac{1}{3}$ soit décimal. Par définition, il existerait des entiers $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}.$$

Donc :

$$10^n = 3a,$$

si bien que 10^n serait un nombre divisible par 3. Or, la décomposition (qui est unique) en facteurs premiers

$$10^n = 2^n \cdot 5^n$$

ne comporte pas de 3. Ainsi, le nombre 10^n n'est donc pas divisible par 3 et l'hypothèse faite nous a conduits à une absurdité. On en conclut que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Exercice 26.

1. (a) En élevant les deux côtés de l'égalité au carré, on obtient :

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2,$$

c'est-à-dire :

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

En multipliant cette égalité membre à membre par b^2, on obtient que :

$$a^2 = 2b^2$$

Cette égalité prouve que a^2 est un multiple de 2. Autrement dit, il est pair.

(b) Nous allons démontrer par contraposée qu'un nombre dont le carré est pair est lui-même pair. Soit $x \in \mathbb{Z}$. La propriété à démontrer est :

$$x^2 \text{ pair} \Longrightarrow x \text{ pair}$$

La négation de « être un nombre pair » étant le fait d'« être un nombre impair », la contraposée de notre propriété est :

$$x \text{ impair} \Longrightarrow x^2 \text{ impair }.$$

Supposons donc x impair. Par définition, il existe alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k + 1$. Cela implique que :

$$\begin{aligned} x^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2) + 1 \\ &= 2q + 1 \end{aligned}$$

en posant $q = 2k^2 + 2$. Ainsi, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $x^2 = 2q+1$ et le nombre x^2 est impair. Par contraposée, on a bien l'affirmation voulue.

La question précédente donne que x^2 est pair. Avec la propriété démontrée à l'instant, on en conclut que a est pair. Dans la suite, on désigne par $k \in \mathbb{N}$ l'entier tel que $a = 2k$.

(c) En substituant $a = 2k$ dans l'égalité $2b^2 = a^2$, on obtient que :

$$2b^2 = (2k)^2$$

puis que :

$$2b^2 = 4k^2$$

Et enfin que :

$$b^2 = 2k^2$$

Ainsi b^2 est pair. L'argument vu à la question précédente nous donne que b est pair.

2. Supposant par l'absurde la rationnalité de $\sqrt{2}$, nous avons écrit que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ des entiers premiers entre eux, c'est-à-dire la fraction irréductible. Cette hypothèse nous a conduits à une absurdité. Si a et b sont des nombres premiers entre eux, ils ne peuvent pas être pairs (donc divisible par 2) tous les deux. Donc, le nombre $\sqrt{2}$ est bien irrationnel.

Exercice 27. Nous allons raisonner par récurrence. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Pour simplifier la rédaction du raisonnement, on notera également :

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

Initialisation : Au rang $n = 1$, on a que $S_1 = 1^2$ d'une part et, d'autre part, que :

$$\frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = 1.$$

Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathcal{P}_n$ implique $\mathcal{P}_{n+1}$. On suppose donc que :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Et, on calcule alors :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}. \end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned}(n+2)\Big(2(n+1)+1\Big) &= (n+2)(2n+3)\\ &= 2n^2+3n+4n+6\\ &= 2n^2+7n+6,\end{aligned}$$

on conclut que :

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)\Big(2(n+1)+1\Big)}{6}.$$

Et cette dernière égalité est exactement la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$.
Conclusion : On a prouvé que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang $n = 1$ et qu'elle est héréditaire. Par le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 28. Nous allons raisonner par récurrence. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété :

$$1\times 2 + 2\times 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Pour simplifier la rédaction du raisonnement, on notera également :

$$S_n = 1\times 2 + 2\times 3 + \cdots + n(n+1).$$

Initialisation : Au rang $n = 1$, on a que $S_1 = 1\times 2$ d'une part et, d'autre part, que :

$$\frac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2.$$

Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathcal{P}_n$ implique $\mathcal{P}_{n+1}$. On suppose donc que :

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Et, on calcule alors :

$$\begin{aligned}S_{n+1} &= S_n + (n+1)(n+2)\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}\end{aligned}$$

Et cette dernière égalité est exactement la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$.
Conclusion : On a prouvé que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang $n = 1$ et qu'elle est héréditaire. Par le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 29. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}_n$ la propriété « $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7 ».
Initialisation : Pour $n = 0$, on a que $3^{2\times 0} - 2^0 = 0$ est divisible par 7. Donc $\mathcal{P}_0$ est bien vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrons que $\mathcal{P}_n$ implique la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$. On suppose donc que $3^{2n} - 2^n$ est un nombre divisible par 7, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $3^{2n} - 2^n = 7k$. Alors, on calcule :

$$\begin{aligned}3^{2(n+1)} - 2^{n+1} &= 3^{2n}\times 3^2 - 2^n \times 2\\ &= (7k+2^n)\times 9 - 2^n\times 2\\ &= 9\times 7k + 9\times 2^n - 2\times 2^n\\ &= 9\times 7k + 7\times 2^n\\ &= 7(9k+2^n).\end{aligned}$$

Et comme $9k + 2^n$ est un nombre entier, la dernière égalité prouve que $3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$ est divisible par 7.
Conclusion : On a prouvé que $\mathcal{P}_0$ est vraie et que $\mathcal{P}_n$ est héréditaire. Le principe de récurrence permet de conclure que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 30. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}_n$ la propriété « $n^3 + 5n$ est un multiple de 3 ».
Initialisation : Pour $n = 0$, on a que $0^3 + 5\times 0 = 0$ est bien un multiple de 3. C'est 3×0. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrons que $\mathcal{P}_n$ implique la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$. On suppose que l'entier $n^3 + 5n$ est un multiple de 3, c'est-à-dire qu'il existe un certain $k \in \mathbb{Z}$ pour lequel $n^3 + 5n = 3k$. Alors, on calcule :

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 5(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5\\ &= \Big(n^3+5n\Big) + \Big(3n^2+3n+6\Big)\\ &= 3k + 3(n^2+n+2)\\ &= 3(k+n^2+n+2).\end{aligned}$$

Et comme $k + n^2 + n + 2$ est un entier, cette dernière égalité prouve que $(n+1)^3 + 5(n+1)$ est multiple de 3.
Conclusion : On a prouvé que $\mathcal{P}_0$ est vraie et que $\mathcal{P}_n$ est héréditaire. Le principe de récurrence permet de conclure que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 31. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathcal{P}_n$ la propriété $2^n - 1 \geqslant n$.
Initialisation : Au rang $n = 0$, on a que $2^0 - 1 = 0$ et donc bien que $2^0 - 1 \geqslant 0$. La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathcal{P}_n$ implique $\mathcal{P}_{n+1}$. On suppose que $2^n - 1 \geqslant n$. En multipliant cette inégalité membre à membre par 2 puis en lui ajoutant 1, on obtient que :

$$\begin{aligned}&2\Big(2^n - 1\Big) \geqslant 2n\\ \Longrightarrow\ &2^{n+1} - 2 \geqslant 2n\\ \Longrightarrow\ &2^{n+1} - 1 \geqslant 2n+1\end{aligned}$$

Étant donné que $2n + 1 \geqslant n + 1$, il vient que $2^{n+1} - 1 \geqslant n + 1$. C'est excatement $\mathcal{P}_{n+1}$.
Conclusion : On a prouvé que $\mathcal{P}_0$ est vraie et que $\mathcal{P}_n$ est héréditaire. Le principe de récurrence permet de conclure que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 32. L'inégalité de cet exercice généralise celle de l'exercice précédent. C'était le cas particulier $x = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}_n : (1+x)^n \geqslant 1 + nx$.
Initialisation : Pour $n = 1$, on a $(1+x)^1 = 1 + x$ d'une part, d'autre part que $1 + 1\times x = 1 + x$. Donc, on a bien que $(1+x)^1 \geqslant 1 + 1\times x$ et que la propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On démontre que $\mathcal{P}_n$ implique la

propriété $\mathcal{P}_{n+1}$. En d'autres termes, on va supposer que l'on a $(1+x)^n \geq 1+nx$ et l'on va montrer que :

$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x.$$

En multipliant l'inégalité $\mathcal{P}_n$ par $1+x$ membre à membre, on obtient que :

$$(1+x)^{k+1} \geqslant (1+kx)(1+x).$$

Comme $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a que $kx^2 > 0$. Ainsi, obtient que :

$$\begin{aligned}(1+kx)(1+x) &= 1+x+kx+kx^2 \\ &= 1+(k+1)x+kx^2 \\ &\geqslant 1+(k+1)x.\end{aligned}$$

Finalement, on a bien :

$$(1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x.$$

Conclusion : On a prouvé que $\mathcal{P}_0$ est vraie et que $\mathcal{P}_n$ est héréditaire. Le principe de récurrence permet de conclure que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 33. Commençons par dire que cette équation n'est définie que sur l'ensemble :

$$\mathbb{R} \setminus \{2;3;4;5\}.$$

On calcule :

$$\begin{aligned}&\frac{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} \\ &\qquad = \frac{(x+2)(x+5)(x+3)(x+4)}{(x-2)(x-5)(x-3)(x-4)} \\ &\qquad = \frac{(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)}{(x^2-7x+10)(x^2-7x+12)} \\ &\qquad = \frac{a(a+2)}{b(b+2)}\end{aligned}$$

en posant :

$$\begin{cases} a = x^2+7x+10 \\ b = x^2-7x+10. \end{cases}$$

Ainsi, avec ce changement d'inconnues, l'équation est équivalente à la recherche de a et b vérifiant :

$$\frac{a(a+2)}{b(b+2)} = 1.$$

Or :

$$\begin{aligned}\frac{a(a+2)}{b(b+2)} = 1 &\iff a(a+2) = b(b+2) = \\ &\iff a^2+2a = b^2+2b \\ &\iff a^2-b^2+2(a-b) = 0 \\ &\iff (a-b)(a+b)+2(a-b) = 0 \\ &\iff (a-b)(a+b+2) = 0 \\ &\iff a-b = 0 \text{ ou } a+b+2 = 0.\end{aligned}$$

On raisonne maintenant en traitant séparément ces deux équations :

$$\begin{aligned}a-b = 0 &\iff x^2+7x+10-\left(x^2-7x+10\right) = 0 \\ &\iff 14x = 0 \\ &\iff x = 0.\end{aligned}$$

Ainsi 0 est une solution de l'équation. On examine le deuxième cas :

$$\begin{aligned}&a+b+2 = 0 \\ &\qquad \iff x^2+7x+10+\left(x^2-7x+10\right)+2 = 0 \\ &\qquad \iff 2x^2+22 = 0 \\ &\qquad \iff x^2 = -11.\end{aligned}$$

Puisque $x^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce cas est impossible. En définition, la seule solution de notre équation est $x = 0$.

Exercice 34.

1. Le théorème de Pythagore appliqué sur les triangles rectangles ABH et ACH donne :
$$BH^2+AH^2 = AB^2 \quad \text{et} \quad CH^2+AH^2 = AC^2.$$
Donc, on a que :
$$BH^2+AH^2 = c^2 \quad \text{et} \quad CH^2+AH^2 = b^2.$$
Ensuite :
$$\begin{aligned}b^2 &= CH^2+AH^2 \\ &= \left(a-BH\right)^2+AH^2 \\ &= a^2-2aBH+BH^2+AH^2 \\ &= a^2-2aBH+BH^2+c^2-BH^2 \\ &= a^2-2aBH+c^2.\end{aligned}$$
Donc, on obtient :
$$BH^2 = \frac{c^2+a^2-b^2}{2a}.$$
Et finalement :
$$\begin{aligned}AH^2 &= AB^2-BH^2 \\ &= c^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)^2.\end{aligned}$$

2. On calcule :
$$\begin{aligned}\mathcal{A}^2 &= \frac{1}{4}\times a^2\times h^2 \\ &= \frac{1}{4}a^2c^2-\frac{1}{16}\left(c^2+a^2-b^2\right)^2 \\ &= \frac{1}{16}\left((2ac)^2-(c^2+a^2-b^2)^2\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(2ac+c^2+a^2-b^2\right)\left(2ac-c^2-a^2+b^2\right) \\ &= \frac{1}{16}\left((a+c)^2-b^2\right)\left(b^2-(a-c)^2\right) \\ &= \frac{1}{16}(a+c+b)(a+c-b)(b+c-a)(b+a-c).\end{aligned}$$

3. On calcule :
$$\begin{aligned}\mathcal{A}^2 &= \frac{1}{16}(a+c+b)(a+c-b)(b+c-a)(b+a-c) \\ &= 2s(2s-2b)(2s-2a)(2s-2c) \\ &= s(s-b)(s-a)(s-c).\end{aligned}$$
Et finalement, en prenant la racine dans cette égalité, on en déduit la formule de Héron :
$$\mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Chapitre 2

Dénombrement

2.1 Synthèse de cours

Lorsqu'un ensemble A possède un nombre fini d'éléments, son nombre d'éléments est appelé son cardinal. Il existe diverses notations pour cette notion, on notera ici $\text{Card}(A)$.

2.1.1 Principes additif et multiplicatif

Propriété 1 (Principe additif)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des ensembles finis deux à deux disjoints. Alors, on a que :

$$\text{Card}\left(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n\right) = \text{Card}\left(E_1\right) + \text{Card}\left(E_2\right) + \cdots + \text{Card}\left(E_n\right).$$

L'hypothèse clef est évidemment que les ensembles soient deux à deux disjoints, c'est-à-dire qu'ils n'aient aucun élément en commun. Lorsque A et B sont deux parties d'un ensemble fini, nous savons bien que :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

Plus généralement, il existe une formule (dite formule du crible) qui donne le cardinal d'une réunion quelconque de n ensembles. Le cas $n = 3$ sera proposé en exercice.

Définition 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E, E_1, E_2, \ldots, E_n$ des ensembles non vides. On appelle produit cartésien des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ et l'on note $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ l'ensemble des suites ordonnées de n éléments $(e_1; e_2; \ldots; e_n)$ avec $e_k \in E_k$ pour tout $k \in \{1; \ldots; n\}$. De plus, le produit cartésien $E \times E \times \cdots \times E$ est noté E^n et ses éléments sont appelés des $n-$uplets.

Lorsque $n = 2$, on parle de couple plutôt que de $2-$uplet. Et pour $n = 3$, on parle de triplet. Les coordonnées d'un point du plan sont, par exemple, des couples d'éléments de $\mathbb{R}$.

Propriété 2 (Principe multiplicatif)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que $E, E_1, E_2, \ldots, E_n$ des ensembles finis non vides. Alors, on a que :

- $\text{Card}\left(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n\right) = \text{Card}\left(E_1\right) \times \text{Card}\left(E_2\right) \times \ldots \times \text{Card}\left(E_n\right)$.
- $\text{Card}\left(E^n\right) = \big(\text{Card}\left(E\right)\big)^n$.

2.1.2 Arrangements, permutations et combinaisons

On rappelle que la factorielle $n!$ d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ est le produit de tous les entiers naturels compris entre 1 et n. Et l'on pose $0! = 1$ par convention. Pour tout $n \geqslant 1$, on a donc :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n.$$

Définition 2. Soient E un ensemble non vide et un entier naturel non nul $p \leqslant \mathrm{Card}(E)$. Un arrangement de p éléments de E est un p-uplet d'éléments deux à deux distincts de E. Un arrangement de tous les éléments de E est appelé une permutation de E.

Modélisation. Dans un arrangement, l'ordre des éléments a de l'importance et les éléments sont deux à deux distincts. Il n'y a pas de répétition. Un arrangement de p éléments de E peut être interprété comme le résultat de p tirages successifs et sans remise dans l'ensemble E.

Propriété 3. Soient E un ensemble non vide de cardinal n ainsi qu'un entier naturel $p \leqslant n$. Le nombre d'arrangements de p éléments de E est égal à :

$$\frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$$

Ce nombre est parfois noté A_p^n. En prenant $p = n$, on voit que le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est égal à $n!$.

Définition 3. Soit E un ensemble non vide et un entier naturel non nul $p \leqslant \mathrm{Card}(E)$. Une combinaison de p éléments de E est un sous-ensemble de E possédant p éléments.

Modélisation. Dans une combinaison, l'ordre des éléments n'a pas d'importance et les éléments sont deux à deux distincts. Il n'y a pas de répétition. Ainsi, une combinaison de p éléments d'un ensemble E peut être interprétée comme le tirage simultané de p éléments dans l'ensemble E.

Propriété 4. Soient E un ensemble non vide de cardinal n et un entier naturel $p \leqslant n$. Le nombre de combinaisons de p éléments de E est égal au coefficient binomial :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Pour résumer les caractéristiques clefs de la modélisation par un produit cartésien, un arrangement ou une combinaison, on peut retenir le tableau suivant.

	Produit cartésien	Arrangement	Combinaison
Prise en compte de l'ordre	oui	oui	non
Répétition possible	oui	non	non

2.2 Énoncés des exercices

Dénombrer en pratique

Exercice 1. Un groupe de dix personnes se réunit, et chacun serre la main de tous les autres. Combien y aura-t-il de poignées de main au total ? Justifier.

Exercice 2. Une course oppose 12 cyclistes.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y a-t-il de classements possibles ?

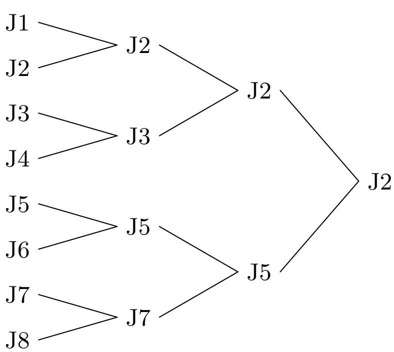
Exercice 3. En fin d'année de Seconde, un élève doit choisir trois spécialités parmi les douze qui lui sont proposées pour la classe de Première.

1. Combien de choix différents peut-il faire ?
2. Cet élève sait qu'il devra abandonner une des trois spécialités en Terminale. Il décide donc de choisir les deux spécialités qu'il conservera et une troisième qu'il abandonnera. Combien de choix peut-il faire ?

Exercice 4. Un jeu de 52 cartes comporte 13 cartes de chacune des 4 couleurs (trèfle, pique, carreau et coeur) qui sont, en classant par ordre croissant de valeur, celles allant de 1 à 10, puis le valet, la dame et le roi. On tire 5 cartes successivement et sans remise. Ces 5 cartes constituent une « main » dans laquelle on ne tient pas compte de l'ordre des cartes. Dénombrer les mains qui contiennent :

(a) Quatre cartes de valeur identique.
(b) Trois cartes possédant la même valeur et deux autres cartes avec également la même valeur.
(c) Cinq cartes de la même couleur qui se suivent.
(d) Exactement deux cartes de trèfle.

Exercice 5 ($\star$)**.** Un tournoi à élimination directe de tennis débute en quart de finale avec huit joueurs. On a schématisé une possibilité de déroulement du tournoi dans laquelle $J2$ sort gagnant :



1. Déterminer le nombre de matchs qu'un joueur a gagné s'il a remporté ce tournoi.
2. Combien de matchs ce tournoi comporte-t-il ?
3. Combien de finales différentes sont possibles ?
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Reprendre ces questions dans le cas d'un tournoi qui débute avec 2^n joueurs.

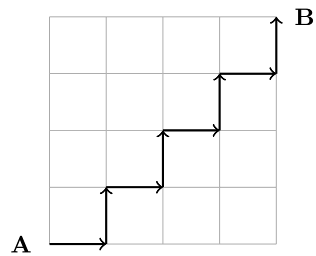
Exercice 6. Un anagramme est un mot formé en changeant l'ordre les lettres d'un autre mot. On ne tient pas compte de la signification du mot obtenu. Déterminer le nombre d'anagrammes de :

1. Manchot
2. Canal
3. Mississippi.

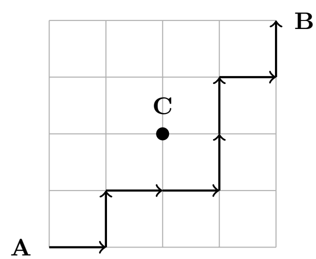
Exercice 7. Dans une petite association, on veut former un bureau constitué de six personnes, avec la parité homme-femme. Il y a sept hommes et cinq femmes dans cette association.

1. Combien y a-t-il de bureaux possibles ?
2. Même question si Monsieur Dupont fait partie du bureau et si Madame Martin ne veut pas en faire partie.

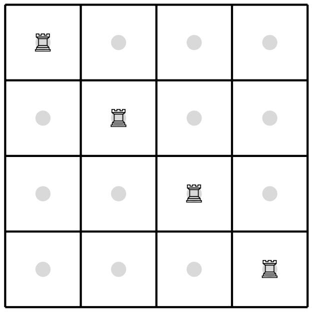
Exercice 8 ($\star$)**.** Sur une grille carrée de 4×4 cases, on peut se déplacer uniquement vers la droite ou vers le haut. On part du point $A(0,0)$ en bas à gauche pour rejoindre le point $B(4,4)$ en haut à droite. On donne ci-dessous un exemple d'un tel chemin.



1. Déterminer le nombre de chemins différents permettant d'aller de A à B en respectant ces règles de déplacement. Justifier.
2. On place un obstacle en C$(2,2)$, on ne peut plus passer par ce point. Combien de chemins différents permettent encore d'atteindre B ?



Exercice 9. On souhaiter positionner quatre tours sur un échiquier 4×4 de manière à ce qu'aucune d'elles ne se menace. Pour rappel, une tour peut se déplacer horizontalement ou verticalement d'autant de cases que souhaité. Une configuration satisfaisante est représentée ci-dessous.



1. Les quatre tours sont noires et indiscernables. Trouver le nombre de configurations possibles.
2. Les tours sont de quatre couleurs différentes. Trouver le nombre de configurations possibles.
3. Deux tours sont blanches, deux sont noires. Trouver le nombre de configurations possibles.

Un peu plus abstrait

Exercice 10. Soient p et n deux entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$. Démontrer que :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad \text{et} \quad \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}.$$

Exercice 11 ($\star$)**.** On considère E un ensemble non vide de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que le nombre de sous-parties de E est égal à :

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n.$$

Exercice 12. Dans chacun des cas suivants, donner les ensembles :

$$A \cup B \quad ; \quad A \cap B \quad ; \quad A \times B \quad ; \quad B \times A.$$

1. $A = \{1; 2; 3\}$ et $B = \{1; 2; 4\}$
2. $A = \{a; b\}$ et $B = \{\varepsilon, \delta\}$

Exercice 13. On considère $A = \{1; 2; 3; 4\}$. Écrire les deux arrangements, les trois combinaisons ainsi que les permutations de A.

Le coin du chercheur

Exercice 14 ($\star$)**.** Considérons E un ensemble non vide ainsi que A, B deux sous-ensembles de E. On appelle différence symétrique de A et B le sous-ensemble de E, noté $A\Delta B$, contenant les éléments de $A \cup B$ n'appartenant pas à $A \cap B$. Autrement dit :

$$A\Delta B = \left\{x \in A \cup B \mid x \notin A \cap B\right\}.$$

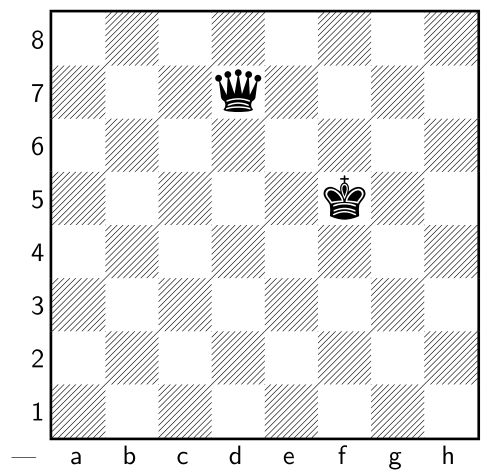
1. On pose :

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5\} \quad \text{et} \quad B = \{3; 4; 5; 6; 7\}.$$

   (a) Déterminer $A \cap B$ et $A\Delta B$.
   (b) Préciser le cardinal de $A\Delta B$ et $A \cap B$.
2. On revient au cas général en supposant que les ensembles A et B sont de cardinaux finis. Prouver que le cardinal de $A\Delta B$ est égal à :

$$\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - 2\,\mathrm{Card}(A \cap B).$$

Exercice 15 ($\star\star$)**.** On veut placer le roi noir et la dame noire sur deux cases distinctes d'un échiquier.



Déterminer le nombre de positions telles que :

1. La dame soit située sur une ligne strictement plus au-dessus de celle où se trouve le roi.
2. Le roi et la dame soient sur la même ligne.

2.3 Corrigés des exercices

Exercice 1. On numérote les personnes de 1 à 10 et on note $E = \{p_1; \ldots; p_{10}\}$ l'ensemble des personnes. Choisir une poignée de mains revient à choisir deux personnes qui se serrent la main. C'est une combinaison (pas d'ordre, pas de répétition) de 2 éléments parmi 10. Le nombre de poignées de mains est donc :

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\,8!} = \frac{10 \times 9}{2} = 45.$$

Exercice 2. On numérote les cyclistes de 1 à 12 et on note $E = \{c_1; \ldots; c_{12}\}$ l'ensemble de ces cyclistes.

1. Choisir un podium, c'est choisir 3 cyclistes au sein de l'ensemble E sans répétition et en tenant compte de l'ordre. Il s'agit donc d'un arrangement de 3 cyclistes parmi 12. Au total, le nombre de podium est donc :
$$A_3^{12} = \frac{12!}{9!} = 12 \times 11 \times 10 = 1320.$$
2. Un classement des 12 cyclistes est une permutation des 12 éléments de E. Le nombre de classements est donc égal à :
$$12! = 479\,001\,600.$$

Exercice 3. On numérote les spécialités de 1 à 12 et on note $E = \{s_1; \ldots; s_{12}\}$ l'ensemble de ces spécialités.

1. L'élève doit choisir trois éléments différents de E sans tenir compte de l'ordre. Chaque choix possible est une combinaison de 3 éléments parmi 12. Le nombre de choix possibles est donc :
$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!\,9!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3} = 440.$$
2. L'élève fait d'abord le choix des 2 spécialités qu'il va conserver en Terminale puis le choix de celle qu'il abandonnera. On note C l'ensemble des choix pour les deux spécialités conservées et A l'ensemble des choix possibles pour la spécialité abandonnée. L'ensemble des choix possibles pour les 3 spécialités en Première est alors :
$$C \times A.$$
Or, nous savons que :
$$\mathrm{Card}(C \times A) = \mathrm{Card}(C) \times \mathrm{Card}(A).$$
L'ensemble C est l'ensemble des parties à 2 éléments distincts de E. Ce sont les combinaisons de 2 éléments de E. Donc :
$$\mathrm{Card}(C) = \binom{12}{2} = \frac{12!}{2!\,10!} = \frac{12 \times 11}{2} = 66.$$
Le choix de la spécialité abandonnée se fait parmi les 10 spécialités restantes. C'est une combinaison d'un élément parmi 10. Donc :
$$\mathrm{Card}(A) = \binom{10}{1} = \frac{10!}{1!\,9!} = 10.$$
En définitive, si l'élève fait le choix de cette manière, le nombre total de possibilités est :
$$66 \times 10 = 660.$$

Exercice 4.

(a) Comme l'ordre des cartes dans une main n'est pas pris en compte, on peut supposer que l'on commence par choisir les quatre cartes de même valeur puis la cinquième. Il y a au total 13 choix possibles pour les quatre cartes portant la même valeur : soit les 4 rois, soit les 4 dames, soit les 4 valets, soit les 4 dix, etc. Puis, on choisit une autre carte quelconque parmi les quarantes-huits cartes restantes. Ainsi, choisir une telle main revient à choisir un élément de l'ensemble
$$E = \{1; \ldots; 13\} \times \{1; \ldots; 48\}.$$
Finalement, le nombre de mains comportant quatre cartes de même valeur est :
$$\mathrm{Card}(E) = 13 \times 48 = 624.$$

(b) Dans le jeu, chaque valeur n'existe qu'en quatre exemplaires. Ainsi, les trois cartes de même valeur ne peuvent pas avoir la même valeur que les deux autres cartes qui, elles aussi, sont de même valeur. Comme l'ordre des cartes dans une main n'est pas pris en compte, on peut commencer par dénombrer les possibilités pour les trois cartes, puis celles pour les 2 cartes.

- Pour les 3 cartes de même valeur, on choisit une valeur parmi les 13 valeurs possibles. Ensuite, on choisit 3 couleurs parmi 4. Par exemple, si l'on choisit la valeur « valet », il reste à en choisir trois parmi les valets de pique, trèfle, carreau ou coeur. C'est une combinaison de 3 couleurs parmi 4. Au total, le nombre de possibilités est :
$$13 \times \binom{4}{3} = 13 \times \frac{4!}{3!\,1!} = 13 \times 4 = 52.$$
- Pour le choix des 2 autres cartes, il reste 12 choix possibles pour la valeur. Ensuite, on fait le choix de deux couleurs parmi les 4 couleurs. C'est une combinaison de 2 parmi 4, ce qui donne 6 choix possibles. On peut d'ailleurs les lister :
$$\{\heartsuit, \clubsuit\}, \{\heartsuit, \diamondsuit\}, \{\heartsuit, \spadesuit\}, \{\clubsuit, \diamondsuit\}, \{\clubsuit, \spadesuit\}, \{\diamondsuit, \spadesuit\}$$
Au total, le nombre de possibilités pour ce choix de 2 cartes de même valeur est :
$$12 \times 6 = 72.$$

Par le principe multiplicatif, le nombre de total de possibilités avec les conditions données est :
$$52 \times 72 = 3744.$$

(c) Choisir cinq cartes de la même couleur qui se suivent revient à choisir la première carte, les quatres autres se suivent sans choix. Avoir cinq cartes qui se suivent impose que la carte de plus petite valeur dans la main soit le 9. Ainsi cela revient à choisir une carte de l'as au neuf dans l'une ou l'autre des quatre couleurs. Il y a donc $9 \times 4 = 36$ mains possibles.

(d) Comme l'ordre des cartes dans une main n'est pas pris en compte, on peut commencer par choisir les deux cartes de trèfle puis les trois autres. Un choix de 2 trèfles est une combinaison de 2 éléments parmi 13. Le choix des 3 autres cartes est une combinaison de 3 éléments parmi $52 - 13 = 39$. Ainsi, le nombre de mains possibles est :

$$\begin{aligned}\binom{13}{2} \times \binom{39}{3} &= \frac{13!}{2!\,11!} \times \frac{39!}{3!\,36!} \\ &= \frac{13 \times 12}{2} \times \frac{39 \times 38 \times 37}{3 \times 2} \\ &= 712\,842.\end{aligned}$$

Exercice 5.

1. On compte simplement le nombre de matchs qu'il a gagné : le quart de finale, la demi-finale et la finale. Il faut donc gagner 3 matchs pour remporter le tournoi.
2. Il suffit de compter le nombre de matchs sur le schéma. Il y a 7 matchs. En anticipation de la généralisation de la dernière question, proposons deux méthodes pour trouver cette valeur :
   - Il y a quatre quarts de finale, deux demi-finales et une finale. Ainsi, il faut gagner 7 matchs.
   - Il y a 8 joueurs, à la fin du tournoi il ne reste qu'un seul joueur. Chaque match élimine un joeur. Ainsi, il doit y avoir $8 - 1 = 7$ matchs.
3. Un finale oppose 2 joueurs. Il y a 8 joueurs inscrits au tournoi. Une finale est un choix de 2 parmi 8, sans répétition et sans tenir compte de l'ordre. C'est une combinaison de deux joueurs dans un groupe de huit. Le nombre de finales possibles est donc :

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,6!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28.$$

4. (a) À chaque tour, un joueur sur 2 est éliminé. Au premier tour, il y a 2^n joueurs, au deuxième tour, il y a 2^{n-1} joueurs, au troisième tour, il y a 2^{n-2} joueurs. Si l'on généralise, au k-ième tour, il y a $2^{n-(k-1)}$ joueurs. Ainsi, à la finale, il reste

$$2 = 2^{n-(n-1)}$$

joueurs. Ainsi, la finale est le n-ième tour du tournoi. En conclusion, pour gagner le tournoi, il est nécessaire de gagner n matchs.

   (b) Il y a 2^n joueurs au début du tournoi et un seul gagnant. Le tournoi doit éliminer $2^n - 1$ joueurs. Chaque match élimine un joueur. On en conclut que le tournoi comporte $2^n - 1$ matchs.

   (c) Il y a 2^n joueurs inscrits. Une finale est une combinaison de 2 joueurs parmi 2^n. Le nombre de finales possibles est donc :

$$\binom{2^n}{2}.$$

Exercice 6.

1. Un anagramme de « manchot » est une permutation de l'ensemble $E = \{m; a; n; c; h; o; t; \}$. Cet ensemble comportant 7 éléments, le nombre d'anagramme recherché est :

$$7! = 5040.$$

2. *Première méthode.* Le mot « canal » est formé de cinq lettres. A priori, si l'on procède comme à la question précédente, on devrait dénombrer 5! anagrammes. Or, dans ces anagrammes, si les deux « a » sont permutés, le mot est inchangé. Ainsi, pour ne pas compter ces anagrammes deux fois, on divise 5! par le nombre de permutations possibles des deux « a ». Le nombre d'anagrammes recherché est donc :

$$\frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$

Deuxième méthode. Choisir un anagramme revient à choisir l'emplacement des deux « a » puis à placer les autres lettres dans les emplacements restants. Si l'on note $E = \{1; \dots; 5\}$ les emplacements possibles, on remarque que le choix des places pour les « a » est une combinaison de 2 places parmi 5 : il n'y pas de répétition et pas d'ordre. Choisir les emplacements des autres lettres est une permutation de 3 places. En définitive, par le principe multiplicatif, le nombre d'anagrammes est :

$$\binom{5}{2} \times 3! = \frac{5!}{2!\,3!} \times 3! = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$

3. Avec la première méthode : le mot « mississippi » est composé de 11 lettres dont les lettres « s » et « i » qui apparaissent 4 fois et le « i » qui apparait 2 fois. Le nombre d'anagramme de « mississippi » est donc :

$$\frac{11!}{4!\,4!\,2!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 2} = 34\,650.$$

Avec la seconde méthode, on observe que choisir un anagramme revient à choisir 4 places parmi 11 pour les lettres « i » puis 4 places parmi les 7 restantes pour les lettres « s » puis enfin 2 places parmi les 3 restantes pour les lettres « p ». Il ne reste qu'une place. Ainsi, le nombre d'anagrammes est :

$$\binom{11}{4} \times \binom{7}{4} \times \binom{3}{2} \times 1 = 34\,650.$$

Exercice 7. Un bureau de 6 membres constitué à parité contient 3 hommes et 3 femmes.

1. Il n'y a pas d'ordre entre les membres du bureau, on peut donc commencer par choisir les hommes puis les femmes. Si l'on note $H = \{h_1; \dots; h_7\}$ l'ensemble des 7 hommes membres de l'association, le choix des hommes pour le bureau est une combinaison (ni ordre, ni répétition) de 3 éléments de H. De même, le choix des femmes est une combinaison de 3 éléments de l'ensemble F des 5 femmes membres de l'association. Par le principe multiplicatif, le nombre de possibilités pour le bureau est donc :

$$\binom{7}{3} \times \binom{5}{3} = \frac{7!}{3!\,4!} \times \frac{5!}{3!\,2!} = 35 \times 10 = 350.$$

2. On adapte le raisonnement de la question précédente. Puisque Monsieur Dupont est membre du bureau, il reste 2 hommes à choisir parmi les 6 hommes restants. Puisque Madame Martin ne peut pas être au bureau, le choix des 3 femmes se fait parmi 4 femmes. Ainsi, le nombre de possibilités est :

$$\binom{6}{2} \times \binom{4}{3} = \frac{6!}{2!\,4!} \times \frac{4!}{3!\,1!} = 15 \times 4 = 60.$$

Exercice 8.

1. Un chemin correspond à huit déplacements, quatre vers le Haut et quatre vers la Droite. Ainsi, choisir un chemin revient à choisir un anagramme de $DDDDHHHH$. En reprenant l'une ou l'autre des méthodes données dans l'exercice 6, on obtient que le nombre de chemins possibles est :

$$\frac{8!}{4!\,4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{2 \times 3 \times 4} = 70.$$

2. On va compter le nombre de chemins qui passent par cet obstacle, passer par le point $(2;2)$ revient à choisir un chemin de A à C puis de C à B. Le nombre de chemins de A à C est (en utilisant le même raisonnement que précédemment) de 6, de même pour les chemins de C à B. Ainsi le nombre de chemin ne passant pas par C est le nombre de chemins total moins le nombre de chemins passant par C :

$$70 - 2 \times 6 = 58.$$

Exercice 9.

1. On raisonne par placement successif des tours. On peut s'aider d'un schéma où l'on colorie au fur et à mesure les lignes/colonnes de l'échiquier des cases où l'on positionne une tour.
   - On place la première tour. Il y a 16 choix possibles.
   - On place la deuxième tour. Elle ne peut être mise ni sur la ligne, ni sur la colonne où l'on a mis la première tour. Cela retire 7 cases de l'échiquier. Il y a donc $16 - 7 = 9$ emplacements possibles.
   - On place la troisième tour. Elle ne peut être mise ni sur les lignes, ni sur les colonnes où se situent les deux premières tours. Cela retire 5 cases de l'échiquier. Il y a donc $9 - 5 = 4$ choix possibles.
   - Pour la dernière tour, il ne reste qu'un seul choix.

   Ainsi, choisir une configuration pour les quatre tours revient à choisir un élément de l'ensemble :

$$\{1;\ldots;16\} \times \{1;\ldots;9\} \times \{1;2;3;4\} \times \{1\}$$

   dont le cardinal est $16 \times 9 \times 5 \times 1 = 720$. En définitive, il y a 720 configurations possibles.

2. Choisir une configuration pour quatre tours toutes de couleurs différentes, cela revient à choisir une des configurations de la question précédente puis ensuite une permutation des quatre couleurs. Ainsi, le nombre de possibilités est :

$$720 \times 4! = 720 \times 24 = 17\,280.$$

3. Choisir une configuration avec deux tours noires et deux blanches revient à choisir une configuration de la première question puis un ensemble à deux éléments parmi quatre. Ainsi, le nombre de possibilités est :

$$720 \times \binom{4}{2} = 720 \times \frac{4!}{2!\,2!} = 720 \times 6 = 4320.$$

Exercice 10.

1. Par définition, on a :

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!\big(n-(n-p)\big)!} \\ &= \binom{n}{n-p}.\end{aligned}$$

2. On propose deux méthodes pour cette question : par un calcul direct et par un argument de dénombrement.

   Première solution. On fait un calcul direct en partant du membre de gauche de l'égalité. On met au même dénominateur les deux fractions intervenant dans le calcul. On calcule :

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p-1} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} \\ &= \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!}\end{aligned}$$

   et :

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!}.\end{aligned}$$

   On a multiplié le numérateur et le dénominateur de la première fraction par p. La seconde par $n-p$. Dans ce type de calculs, on doit être vigilant aux parenthèses et bien comprendre que

$$p(n-1)! \neq \big(p(n-1)\big)!.$$

   Ainsi, en factorisant par $(n-1)!$ au numérateur, on obtient :

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!\big(p+n-p\big)}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \binom{n}{p}.\end{aligned}$$

   Deuxième solution. Dans un ensemble à n éléments, on cherche le nombre de possibilités pour choisir un sous-ensemble de p éléments. Notons E_p l'ensemble des sous-ensembles de E qui ont pour cardinal p :

$$E_p = \Big\{A \subset E \,|\, \mathrm{Card}(A) = p\Big\}.$$

Pour $x \in E$, notons $E_{x,p}$ les sous-ensembles de E de cardinal p et contenant x, c'est-à-dire :

$$E_{p,x} = \Big\{ A \in E_p \,|\, x \in A \Big\}.$$

Notons également $E_{\bar{x},p}$ les sous-ensembles de E de cardinal p ne contenant pas x. On a clairement que :

$$E_p = E_{x,p} \cup E_{\bar{x},p} \quad \text{et} \quad E_{x,p} \cap E_{\bar{x},p} = \emptyset.$$

De plus, on remarque que choisir un sous-ensemble à p éléments de E contenant x revient à choisir un sous-ensemble à $p-1$ éléments dans $E - \{x\}$. Ainsi :

$$\operatorname{Card}(E_{x,p}) = \binom{n-1}{p-1}$$

Et, choisir un sous-ensemble à p éléments de E qui ne contient pas x est équivalent à choisir un sous-ensemble à p éléments dans $E - \{x\}$. Ainsi :

$$\operatorname{Card}(E_{\bar{x},p}) = \binom{n}{k-1}.$$

En définitive, donc par principe d'additivité, on conclut que :

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} &= \operatorname{Card}(E_p)\\ &= \operatorname{Card}(E_{x,p}) + \operatorname{Card}(E_{\bar{x},p})\\ &= \binom{n-1}{p-1} + \binom{n}{p-1}.\end{aligned}$$

Exercice 11. On considère E un ensemble non vide fini de cardinal n. Nous devons démontrer que le nombre de sous-ensembles (on parle aussi de sous-parties) de E est donné par la formule suivante :

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n.$$

Nous allons montrer séparément que le nombre de sous-parties de E est égal à la somme du membre de gauche puis qu'il est égal à 2^n. On notera $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E : c'est une notation usuelle.

- Notons E_p l'ensemble des sous-ensembles de E qui contiennent p éléments. Autrement dit :

  $$E_p = \Big\{ A \subset E \,|\, \operatorname{Card}(A) = p \Big\}.$$

  Pour deux entiers naturels $p, q \leqslant n$ tels que $p \neq q$, on a clairement que :

  $$E_p \cap E_q = \emptyset.$$

  En effet, par l'absurde : si cette intersection était non vide, il existerait un sous-ensemble $A \subset E$ tel que $\operatorname{Card}(A) = p$ et $\operatorname{Card}(A) = q$, ce qui est absurde. D'après le cours, nous savons que le nombre de sous-ensemble de E à p éléments est :

  $$\operatorname{Card}(E_p) = \binom{n}{p}.$$

  Enfin, comme un sous-ensemble de E peut contenir soit 0, soit 1, ..., soit n éléments (autrement dit, les ensembles E_p pour $p \in \{0; 1; \ldots; n\}$ définissent une partition de E) on obtient, par principe d'additivité :

  $$\begin{aligned}\operatorname{Card}\Big(\mathcal{P}(E)\Big) &= \operatorname{Card}\Big(\bigcup_{p=0}^{n} E_p\Big)\\ &= \sum_{p=0}^{n} \operatorname{Card}(E_p)\\ &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.\end{aligned}$$

- Maintenant démontrons que le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est égal à 2^n. Pour cela, on prouve que $\mathcal{P}(E)$ est de même cardinal que l'ensemble :

  $$\{0; 1\}^n = \{0; 1\} \times \{0; 1\} \times \cdots \times \{0; 1\}.$$

  Cet ensemble est l'ensemble de tous les n-uplets avec les nombres 0 ou 1. Écrivons que $E = \{x_1; ...; x_n\}$. À chaque sous-ensemble $A \subset E$, on associe le n-uplet :

  $$(a_1; \ldots; a_n) \;\text{ avec }\; \begin{cases} a_k = 1 & \text{si } x_k \in A \\ a_k = 0 & \text{si } x_k \notin A. \end{cases}$$

  Par ce procédé, à tout sous-ensemble $A \subset E$ on fait correspondre un n-uplet de $\{0; 1\}$. Réciproquement, à tout n-uplet de $\{0; 1\}$, on fait correspondre un unique ensemble A composé des x_k tels que $a_k = 1$. Ainsi, compter le nombre de sous-ensembles de E revient à compter le nombre de n-uplets de $\{0; 1\}$. D'après le principe multiplicatif, on en déduit que :

  $$\begin{aligned}\operatorname{Card}\Big(\mathcal{P}(E)\Big) &= \operatorname{Card}\Big(\{0; 1\}^n\Big)\\ &= 2^n.\end{aligned}$$

Exercice 12. On donne juste les résultats. Faisons juste remarquer que $A \times B$ n'est en général pas égal à $B \times A$.

1. $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$
   $A \cap B = \{1; 2\}$
   $A \times B = \{(1,1); (1,2); (1,4); (2,1); (2,2); (2,4); (3,1); (3,2); (3,4)\}$
   $B \times A = \{(1,1); (1,2); (1,3); (2,1); (2,2); (2,3); (4,1); (4,2); (4,3)\}$

2. $A \cup B = \{a; b; \varepsilon; \delta\}$
   $A \cap B = \emptyset$
   $A \times B = \{(a,\varepsilon); (a,\delta); (b,\varepsilon); (b,\delta)\}$
   $B \times A = \{(\varepsilon,a); (\varepsilon,b); (\delta,a); (\delta,b)\}$

Exercice 13.

1. Un arrangement de deux éléments de A consiste à choisir deux éléments distincts et à les ordonner. Nous savons qu'il y en a :

   $$A_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12.$$

   Les voici :

$(1;2)$	$(1;3)$	$(1;4)$
$(2;1)$	$(2;3)$	$(2;4)$
$(3;1)$	$(3;2)$	$(3;4)$
$(4;1)$	$(4;2)$	$(4;3)$.