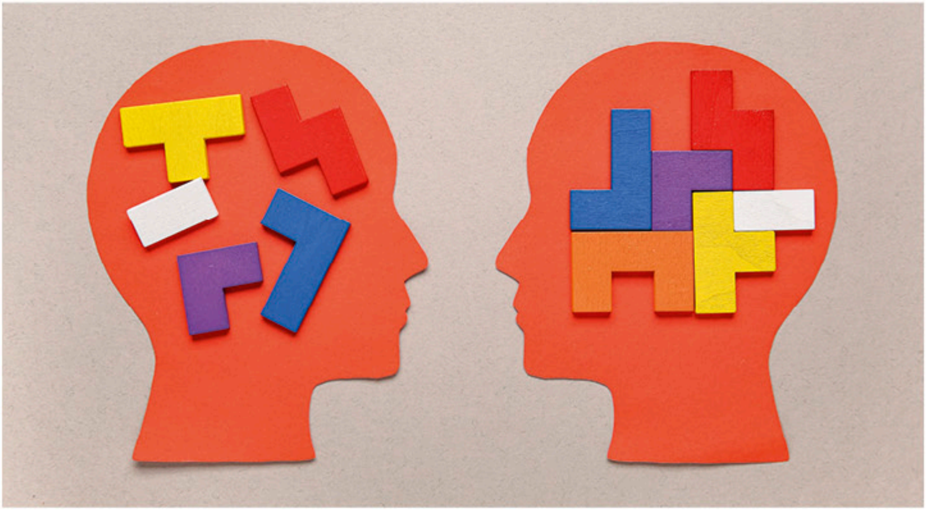
MANUEL DE LOGIQUE



Zoé McConaughey

Introduction à la logique des dialogues

Exercices corrigés

ellipses

Première partie

La logique des propositions

Chapitre 1

Notation en logique des propositions

La logique formelle peut se définir comme l'étude du langage et du raisonnement au moyen d'outils formels. Ces outils formels ne mettent pas l'accent sur le contenu de ce qui est dit, comme le fait le langage ordinaire. En effet, lorsque quelqu'un dit, dans la vie de tous les jours, « la porte est fermée », on s'intéresse immédiatement à la porte : soit on estime que la porte est effectivement fermée, soit on regarde pour déterminer si oui ou non elle est fermée. Le langage ordinaire s'attache ainsi au contenu de ce qui est dit. Le contenu est ce qu'on cherche à communiquer par le langage, et c'est ce contenu qu'on cherche à comprendre. Si les outils formels de la logique ne s'intéressent pas au contenu de ce qui est dit, contrairement au langage ordinaire, à quoi s'intéressent-ils, et à quoi ces outils ressemblent-ils ?

La logique formelle ne s'intéresse pas au contenu de ce qui est dit mais à sa structure et à ses articulations. De cette façon, elle est dite « formelle » parce qu'elle s'intéresse à la force du raisonnement et non à son contenu, appelé aussi sa « matière ».

Si on a reprend notre exemple, « la porte est fermée », on peut se demander deux choses du point de vue formel :

S'agit-il d'une proposition ? Une proposition peut se comprendre comme une unité de sens dans laquelle quelque chose est affirmé ou nié de quelque chose (son contenu). La proposition, ou cette unité de sens qui affirme ou nie quelque chose de quelque chose, peut être vraie ou fausse (c'est sa valeur de vérité). Cette unité de sens fait l'objet d'un jugement : elle peut ainsi être crue, mise en doute, sue, etc., il s'agit de l'attitude épistémique (c'est-à-dire l'attitude relative à la connaissance) portée envers la proposition.

☛ *« La porte est fermée » est bien une unité de sens dans laquelle quelque chose (être fermé) est affirmé de quelque chose (la porte) ; il est possible de dire que cette unité de sens est vraie ou fausse, et il est possible de croire que « la porte est fermée », d'en douter, etc. Il s'agit donc d'une proposition.*

S'agit-il d'une proposition simple ou complexe ? Une fois établi qu'il s'agit bien d'une proposition, la question qui se pose est de savoir s'il s'agit d'une proposition simple ou d'une proposition complexe. Une **proposition complexe** est une unité de sens qui est articulée. Le but de l'analyse logique consiste à expliciter toutes les articulations à partir de propositions simples. Une **proposition simple** est une unité de sens minimale, sans articulation logique. Les quatre articulations logiques de base sont la conjonction (… et …), la disjonction (… ou …), l'implication (si …, alors …) et la négation (ne pas… / ce n'est pas le cas que …). On les appelle des « connecteurs logiques ».

☛ *Puisque « la porte est fermée » est une proposition, on se demande s'il s'agit d'une proposition simple ou d'une proposition complexe. Une proposition complexe s'identifie par la présence d'une articulation logique ; or, dans cette proposition, il n'y a pas de conjonction exprimée, pas de disjonction, pas d'implication, ni de négation. Cette proposition est donc une proposition simple.*

L'analyse logique ne s'intéresse pas au contenu de ce qui est dit, sauf si celui-ci exprime une articulation (un des quatre « connecteurs logiques »). Pour gommer les particularités du contenu et ne pas le laisser nous distraire, toute proposition simple est remplacée, en logique des propositions, par une **lettre propositionnelle** : il s'agit d'une lettre, A, B, …, P, Q, etc. qui tient lieu de proposition. De cette façon, la proposition simple « la porte est fermée », peut être représentée par n'importe quelle lettre propositionnelle (A, par exemple).

Pour bien révéler les articulations logiques entre les propositions simples, elles aussi sont représentées par des symboles, les « connecteurs logiques ». Il y a deux principaux types de connecteurs logiques : les connecteurs binaires, qui lient ensemble deux propositions (simples ou complexes) en une proposition plus complexe ; et le connecteur unaire, qui s'applique à une seule proposition (simple ou complexe) et en fait une proposition plus complexe.

Connecteurs binaires Les trois connecteurs binaires de base sont la conjonction, la disjonction et l'implication.

Conjonction La conjonction se note $(\bullet \land \bullet)$, où chaque point doit être remplacé par une proposition (simple ou complexe). Chaque proposition est appelée un « conjoint ». Les parenthèses délimitent l'étendue du connecteur, identifiant les deux propositions jointes ensemble (celle avant le symbole de conjonction et celle après). L'ensemble forme une proposition complexe. La conjonction consiste à joindre ensemble deux propositions, dire « et ».

Disjonction La disjonction se note $(\bullet \lor \bullet)$, où, de même, chaque point doit être remplacé par une proposition (simple ou complexe), et où l'ensemble, avec les parenthèses, forme une proposition complexe. Les deux propositions dans la disjonction sont appelées des « disjoints ». La disjonction en logique est inclusive, il s'agit de dire que c'est l'une des choses, *ou* l'autre, *ou les deux*. Ce type de disjonction se distingue de la disjonction exclusive, qui *n'est pas* représentée par la notation $(\bullet \lor \bullet)$. En langage naturel, la disjonction exclusive est explicite dans l'expression « ou bien » : dire que c'est l'un *ou bien* l'autre signifie que c'est l'un ou l'autre, mais pas les deux.

☛ *Exemple de disjonction* **inclusive** *: « le restaurant propose un menu à 10€ ou à 15€. » (Le restaurant propose bien les deux menus).*

☛ *Exemple de disjonction* **exclusive** *: « tu commandes un menu à 10€ ou à 15€. » (Tu commandes l'un ou bien l'autre, mais pas les deux).*

Implication L'implication, appelée aussi « implication matérielle », se note $(\bullet \rightarrow \bullet)$. De nouveau, les points sont à remplacer par des propositions (simples ou complexes), mais ici l'ordre est important : la première proposition (celle à gauche de la flèche) est appelée « antécédent », le seconde (celle à droite de la flèche) est appelée « conséquent ». L'ensemble forme une proposition complexe. En langage naturel, l'implication correspond à l'énoncé conditionnel « si …, alors … ». Il faut prendre garde que l'implication n'exprime pas la causalité, même si une relation causale est souvent signifiée en langage naturel[1].

Connecteur unaire Le seul connecteur unaire que nous aborderons ici est celui de la négation. Il est noté $\neg\bullet$, avec une seule proposition (simple ou complexe) à la place du point. L'ensemble forme une proposition complexe. En langage naturel, la négation consiste à dire « ne … pas … » ou « ce n'est pas le cas que … ». Cette seconde formulation se dit principalement pour nier une proposition complexe. La négation représentée par $\neg\bullet$ en logique est la négation contradictoire[2].

Quelques exemples

Prenons quelques exemples pour illustrer ces propos. Voici une série d'affirmations. Il faut identifier s'il s'agit de propositions simples ou complexes, et, dans le cas de propositions complexes, il faut identifier les propositions simples présentes et les articulations logiques qui les lient.

1. « La porte est fermée. »
2. « La porte n'est pas fermée. »
3. « La porte est ouverte. »
4. « La porte est ouverte ou fermée. »
5. « Ce n'est pas le cas que la porte est ouverte ou fermée. »
6. « Si la porte est ouverte, alors elle n'est pas fermée. »
7. « La porte est fermée ou bien ouverte. »

---

1. Voir l'article de Grice, « Logique et conversation », sur les « implicatures conversationnelles » pour une analyse de ce qui est dit de façon non-explicite dans une conversation, mais qui est toutefois compris par les interlocuteurs du fait des normes de conversation. Pour un aperçu des différents traitements logiques de l'implication et des limites de l'« implication matérielle », se référer à l'article de Poggiolesi, « Les conditionnels ».

2. Comme nous le verrons rapidement dans le chapitre 4, la négation peut recouvrir différents sens. Pour un aperçu de nombreux traitements différents de la négation en logique, voir Tranchini, « La négation ».

> La logique des propositions est mal adaptée pour exprimer la structure précise du langage naturel et la richesse de sa signification. Il existe pour cela d'autres logiques : la logique de prédicats entre déjà un peu plus dans la structure des propositions (voir chapitre 5), mais elle est aussi rudimentaire puisque son but n'est pas non plus l'analyse précise des langues. La grammaire logique de Richard Montague (1930–1971), par exemple, est un cadre logique plus adapté à ce genre d'analyse (se reporter par exemple au manuel de Roussarie, *Sémantique formelle. Volume 1 : Introduction à la grammaire de Montague*). Les exemples et les exercices de cette section n'ont pas pour objet d'étudier précisément le langage naturel, mais de familiariser les lecteurs avec les propositions simples et complexes, et avec les connecteurs logiques de base : conjonction, disjonction, implication, négation.

1. « La porte est fermée. »
   Nous avons déjà examiné ce cas plus haut : il s'agit d'une proposition simple. Nous pouvons la représenter formellement avec la lettre propositionnelle A.
2. « La porte **n'**est **pas** fermée. »
   Cette expression est une unité de sens, susceptible d'être vraie ou fausse, d'être sue, crue, mise en doute, etc. Il s'agit donc bien d'une proposition. Cette proposition n'est toutefois pas simple : il y a une négation. Si on enlève la négation dans cette proposition, nous obtenons « la porte est fermée », ce que nous avons identifié comme la proposition simple A. Cette proposition complexe peut donc se noter $\neg A$, c'est la négation de la proposition A.
3. « La porte est ouverte. »
   Il s'agit d'une proposition puisque cette unité de sens peut être vraie ou fausse, crue, sue, etc. La proposition est simple puisqu'elle ne comprend ni conjonction, ni disjonction, ni implication, ni négation. Cette proposition simple est différente de la proposition simple A. On la représentera donc avec une autre lettre propositionnelle, par exemple B.

4. « La porte est ouverte **ou** fermée. »
   Cette proposition comporte une disjonction, il s'agit donc d'une proposition complexe. Les propositions plus simples composant la disjonction sont : « la porte est ouverte » et « la porte est fermée » (attention, « fermée », tout court, n'est pas une proposition : ce n'est pas une unité de sens qui peut être vraie ou fausse, qui peut être crue, mise en doute, etc.). La proposition complexe est la disjonction de ces deux propositions simples, qui ont déjà été identifiées comme étant, respectivement, B et A. Cette proposition complexe s'exprime donc ainsi : $(B \vee A)$. Il ne faut pas oublier les parenthèses autour d'une proposition comportant un connecteur binaire : les parenthèses délimitent bien la proposition complexe pour en marquer l'unité. Cette proposition complexe, avec les parenthèses, peut être utilisée comme proposition dans une proposition encore plus complexe.

5. « **Ce n'est pas le cas que** la porte est ouverte **ou** fermée. »
   Cette proposition est complexe : elle comporte une négation (« ce n'est pas le cas que… ») et une disjonction (« … ou … »). Ce qui est nié, c'est que « la porte est ouverte ou fermée », ce que nous venons d'identifier comme étant formellement $(B \vee A)$. La proposition complexe totale sera donc la négation de cela, à savoir : $\neg(B \vee A)$. La négation se colle à la proposition niée : (a) directement à la lettre propositionnelle s'il s'agit de la négation d'une proposition simple (comme dans le cas 2 ci-dessus), (b) devant les parenthèses, comme ici, lorsqu'il s'agit d'une proposition complexe avec un connecteur binaire, (c) devant une négation s'il s'agit de la négation d'une négation.

6. « **Si** la porte est ouverte, **alors** elle **n'**est **pas** fermée. »
   Cette proposition complexe comporte une implication (« si …, alors … »). L'antécédent (entre « si » et « alors », la condition) est la proposition « la porte est ouverte », qui est la proposition simple B. Le conséquent (après « alors ») est la proposition « la porte n'est pas fermée » (attention, pour former une proposition indépendante, explicitez autant que possible la signification des pronoms) : c'est le cas 2 ci-dessus, la proposition complexe $\neg A$. La proposition complexe totale s'exprime donc par l'implication $(B \rightarrow \neg A)$.

7. « La porte est fermée **ou bien** ouverte. »
   Cette proposition comporte une disjonction, il s'agit donc d'une proposition complexe. Mais attention : la disjonction en logique est une disjonction inclusive (l'un, ou l'autre, ou les deux), tandis que « … ou bien … » exprime en français la disjonction exclusive (l'un ou l'autre, mais pas les deux). Il va donc falloir exprimer la disjonction exclusive en ne se servant que des connecteurs logiques à notre disposition pour l'heure : conjonction, disjonction (inclusive), implication et négation. Les propositions simples composant cette proposition complexe sont : « la porte est fermée », A, et « la porte est ouverte », B. Il s'agit donc d'exprimer en langage formel « A ou B, mais pas A et B ». Dans cette proposition, il y a non seulement une disjonction (« A ou B »), mais il y a aussi une conjonction (« A et B »), la négation de cette conjonction (« pas A et B ») et la conjonction entre la disjonction d'une part (« A ou B ») et la négation de la conjonction d'autre part (« pas A et B »).
   Il n'y a plus qu'à utiliser les connecteurs logiques : la disjonction « A ou B » s'écrit $(A \vee B)$; la conjonction « A et B » s'écrit $(A \wedge B)$; la négation de la conjonction s'exprime en mettant une négation devant les parenthèses : $\neg(A \wedge B)$. Et la proposition totale est la conjonction de la disjonction $(A \vee B)$ et de la négation $\neg(A \wedge B)$, soit : $\big((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)\big)$.
   Cette proposition complexe exprime bien, avec le langage formel étudié, la disjonction exclusive : l'un ou l'autre, mais pas les deux. En effet, nous avons $(A \vee B)$, une disjonction inclusive (l'un, ou l'autre, ou les deux), à laquelle nous ajoutons (conjonction) la négation du cas où on aurait les deux en même temps, à savoir le cas où on aurait $(A \wedge B)$.

> Lorsque nous parlons d'une proposition complexe composée de plusieurs propositions complexes, nous appelons la proposition du nom du connecteur « principal », à savoir celui qui articule l'ensemble de la proposition. Dans le cas 6, on dit que la proposition totale est une conjonction, puisque c'est la conjonction du milieu qui articule ensemble la disjonction $(A \vee B)$ et la négation $\neg(A \wedge B)$ pour former une seule grande proposition complexe.

Synthèse

Propositions simples : sans connecteur, représentées par une lettre propositionnelle (A, B, C, … , P, Q, …)

Propositions complexes : avec au moins un connecteur

Connecteurs binaires : deux places, avec des parenthèses autour

- ▹ **Conjonction :** « … et … » $(\ldots \wedge \ldots)$
- ▹ **Disjonction :** « … ou … » $(\ldots \vee \ldots)$
  attention, en logique, la disjonction est **inclusive**
  (= l'un ou l'autre **ou les deux***)*
- ▹ **Implication :** « si …, alors … » $(\ldots \rightarrow \ldots)$

Connecteur unaire : une seule place, sans parenthèses
on cale le connecteur directement devant la proposition en question

- ▹ **Négation :** « ne… pas… »/« ce n'est pas le cas que… » $\neg \ldots$
  attention, il n'y a pas de parenthèses autour de la négation, le symbole se colle directement à la proposition niée

Exercices : langage formel

Traduisez les propositions suivantes en langage formel. Pour cela, suivez ces trois étapes (un exemple guidé est donné plus bas) :

1. Repérez dans la phrase en français les connecteurs logiques (et ; ou ; si …, alors ; ne … pas)
   ▹*attention, certains connecteurs ne sont parfois pas évidents : par exemple « mais » signifie généralement « et » (notamment avant ou après une négation).*
2. Identifiez toutes les propositions simples et assignez-leur une lettre propositionnelle (A, B, …)
   ▹*attention, les propositions doivent avoir un sens, être indépendantes les unes des autres, et ne comporter aucun connecteur.*
3. Écrivez la phrase avec les lettres propositionnelles identifiées et les connecteurs logiques.
   ▹*attention aux parenthèses !*

Les solutions des exercices se trouvent pages 111 à 112.

Exercice 1 *Si Socrate est philosophe, alors Socrate est sage.*

Exercice 2 *Ce moteur n'est pas bruyant, mais il consomme beaucoup.*

Exercice 3 *Platon et Aristote étaient philosophes.*

Exercice 4 *Je suis ou je ne suis pas.*

Exercice 5 *Ce n'est pas vrai que Guy vient si Pierre ou Henry viennent.*

Exercice 6 *Le résumé est long, mais il est d'une grande clarté.*

Exercice 7 *Si nous n'avions point d'orgueil, nous ne nous plaindrions pas de celui des autres.*

Exercice 8 *Si tu es vieux, ne t'éloigne pas beaucoup du navire.*

Exercice 9 *Il n'est pas possible de vivre de manière agréable sans vivre de manière prudente.*

Exercice 10 *Il ne faut approuver ni ceux qui donnent leur amitié aussitôt, ni ceux qui le font trop lentement.*

Exercice 11 *C'est à la guerre et à la bataille qu'il faut arriver trop tard.*

Exercice 12 *Sarah va au parc si John n'y va pas.*

Exercice 13 *Tu n'es pas sincère, et si tu l'es, je ne te crois pas.*

Exercice 14 *Les Sceptiques ou les Dogmatiques ont raison, mais ils n'ont pas raison ensemble.*

Exercice 15 *Charles vient si Elsa vient, et inversement.*

Exemple guidé : traduction en langage formel

« Aristote et Frege sont les pères de la logique formelle, mais pas de l'informatique. »

1. Il y a trois connecteurs logiques dans cette phrase (en gras) : « Aristote **et** Frege sont les pères de la logique formelle, **mais pas** de l'informatique. »
2. Il y a quatre propositions simples :
   (la clause « mais pas de l'informatique » comporte deux propositions simples à expliciter)
   A : « Aristote est le père de la logique formelle. »
   B : « Frege est le père de la logique formelle. »
   C : « Aristote est le père de l'informatique. »
   D : « Frege est le père de l'informatique. »
3. La phrase peut être traduite ainsi :
   $\big((A \land B) \land (\neg C \land \neg D)\big)$
   ▹*Aristote* **et** *Frege sont les pères de la logique,* **et ni** *l'un* **ni** *l'autre n'est le père de l'informatique (= Aristote* **ne** *l'est* **pas et** *Frege* **ne** *l'est* **pas***).*
   Par ailleurs, en gardant à l'esprit le fait que la disjonction en logique est une disjonction inclusive (l'un ou l'autre, ou les deux), une autre traduction est possible :
   $\big((A \land B) \land \neg(C \lor D)\big)$
   ▹*Aristote* **et** *Frege sont les pères de la logique,* **et** *ce* **n'est pas le cas qu'***Aristote* **ou** *que Frege (ou les deux = inclusif) sont les pères de l'informatique.*

> La similitude partielle entre ces quatre propositions est gommée en logique des propositions : on ne voit pas que A et C ont le même sujet, Aristote, ni que B et D ont aussi le même sujet, Frege. On ne voit pas non plus que la même chose est dite du sujet de A et de B (être le père de la logique formelle), de même pour C et D (être le père de l'informatique). L'identité entre sujets, d'une part, et entre prédicats, d'autre part n'est pas présente. Pour révéler ces similitudes, il faut passer à la logique des prédicats, qui est présentée chapitre 5.

Références

Grice, Paul H. « Logique et conversation ». Trad. par Frédéric Berthet et Michel Bozon. In : *Communications* 30 (1975-1979), p. 57-72. DOI : 10.3406/comm.1979.1446.

Poggiolesi, Francesca. « Les conditionnels ». In : *Précis de philosophie de la logique et des mathématiques. Volume 1 : Philosophie de la logique*. Sous la dir. de Francesca Poggiolesi et Pierre Wagner. 2021, p. 303-338.

Roussarie, Laurent. *Sémantique formelle. Volume 1 : Introduction à la grammaire de Montague*. Language Science Press, 2017. DOI : 10.5281/ZENODO.1000504.

Tranchini, Luca. « La négation ». In : *Précis de philosophie de la logique et des mathématiques. Volume 1 : Philosophie de la logique*. Sous la dir. de Francesca Poggiolesi et Pierre Wagner. Éditions de la Sorbonne, 2021, p. 253-302.

CHAPITRE 2

La logique des propositions dans la « logique des dialogues »

2.1 La logique des dialogues, un aperçu

La logique des dialogues est un jeu de questions et de réponses entre deux joueurs, Proposant et Opposante. Le joueur qui défend une thèse est le Proposant et le joueur qui va mettre cette thèse à l'épreuve est l'Opposante.

> Par convention, les pronoms masculins `il/lui` désignent le Proposant et le pronom féminin `elle` désigne l'Opposante. De cette manière, on peut facilement repérer de quel joueur on parle sans avoir à répéter « Opposante » et « Proposant » à chaque fois.

On peut se représenter la logique des dialogues comme un jeu à deux joueurs, avec des règles semblables aux jeux de société.

> Tout comme dans un jeu, on doit absolument connaître les règles (par cœur s'il le faut !) pour pouvoir jouer.

Remarquez que dans les jeux de société, on peut distinguer deux niveaux de règles, le niveau local et le niveau structurel.

Le niveau local Ces règles définissent les coups permis au sein du jeu.

☛ *Aux échecs, ce sont les règles pour le mouvement des pièces : les pions n'avancent que d'une case vers l'avant, les fous avancent autant de cases qu'ils veulent en diagonale, etc.*

Le niveau structurel Ces règles définissent la structure du jeu, comment il commence, se déroule, se termine, etc.

☛ *Le jeu des échecs est le jeu qui se joue à deux avec 32 pièces disposées de façon spécifique sur un échiquier de 64 cases ; les joueurs jouent un seul coup à tour de rôle ; le jeu se termine lorsqu'un roi est capturé.*

En logique des dialogues, la structure du jeu est définie par les *règles structurelles.* Au début, on commence avec quatre règles structurelles de base qui disent comment une partie commence, comment elle se déroule et comment elle se termine, avec une règle spéciale nommée la « règle socratique ».

L'interaction précise entre les deux joueurs est déterminée par les *règles locales.* En logique des propositions, on s'intéresse à *l'articulation logique* entre des propositions, à savoir, si ces propositions sont conjointes (il s'agira alors d'une conjonction) ou disjointes (il s'agira alors d'une disjonction), si l'une est condition de l'autre (il s'agira alors d'une implication), s'il y a une négation, ou s'il y a une combinaison de ces articulations. Le cadre de la logique des dialogues aborde ces articulations logiques sous la forme d'*interaction* entre les deux joueurs (Proposant et Opposante). Ce sont les règles locales qui déterminent comment réagir face à une conjonction, une disjonction, une implication ou une négation.

Il s'agira de comprendre les règles de la logique des dialogues et d'apprendre à les appliquer.

2.2 Les règles structurelles de base

Il y a quatre règles structurelles de base en logique des dialogues : la règle d'initialisation (comment la partie commence), la règle de déroulement (comment elle se déroule), la règle socratique (une règle spéciale particulièrement importante) et la règle de victoire (comment la partie se termine). Ces règles sont à connaître.

Règle structurelle 1 = *Règle d'initialisation*

Un dialogue commence avec un joueur qui affirme une thèse, à savoir une proposition complexe. Ce joueur est le Proposant, l'autre est l'Opposante. C'est le coup 0. Chaque joueur choisit à tour de rôle un rang de répétition : l'Opposante choisit le rang 1 ($rg = 1$) et le Proposant choisit le rang 2 ($rg = 2$)[1].

Règle structurelle 2 = *Règle de déroulement*

Chaque joueur joue un coup à tour de rôle. Après le choix des rangs de répétition, chaque coup est soit un défi lancé contre un coup précédent de l'interlocuteur, soit la réponse à un défi lancé par l'interlocuteur, le tout en accord avec les règles locales du jeu.

Règle structurelle 3 = *Règle socratique*

Le Proposant ne peut pas affirmer de proposition simple (A, B, etc.) si l'Opposante ne l'a pas déjà affirmée précédemment.

> **!** La règle socratique impose une restriction sur les coups *du Proposant* et ne concerne que les *propositions simples* (voir chapitre 1). Elle ne limite aucunement les coups de l'Opposante, et ne concerne pas les propositions complexes.

Règle structurelle 4 = *Règle de victoire*

Un dialogue s'arrête lorsqu'à son tour de jouer, un joueur n'a plus de coup disponible, ni défi ni réponse. Ce joueur a perdu la partie, l'autre a gagné.

La mise en place du jeu

Pour commencer une partie en logique des dialogues, on dessine un tableau dans lequel on va prendre en note les coups des joueurs à mesure qu'ils jouent. Il s'agit d'un tableau avec deux colonnes principales : une colonne pour les coups de l'Opposante (à gauche) et une colonne pour ceux du Proposant (à droite).

1. Voir section 2.3, page 33, pour l'utilisation des rangs de répétition. Pour faciliter l'introduction aux dialogues, les rangs ne seront pas utilisés avant page 33.

	Opposante		Proposant	

La partie (ou le dialogue) commence avec le Proposant qui soutient une thèse. Cette affirmation est inscrite dans la colonne du Proposant, c'est le coup zéro, le numéro du coup est marqué à côté, dans la colonne extérieure.

La partie peut commencer. On va remplir le tableau progressivement, à mesure que la partie avance : les coups des joueurs seront notés dans la colonne sous leur nom ; on indiquera aussi le numéro du coup dans la colonne extérieure, et lorsqu'il s'agit d'un défi, le numéro du coup défié sera marqué dans la colonne intérieure. Conformément à la règle de victoire, la partie se termine lorsqu'un joueur, à son tour, n'a plus de coup à jouer : ce joueur a alors perdu.

	Opposante		Proposant	
			thèse	0
1	*défi à la thèse*	0	*réponse au défi*	2
3	*défi au coup 2*	2	…	
	…		…	

Le Proposant ou l'Opposante gagne

Coup # 0 – Le Proposant affirme la thèse.
Coup # 1 – C'est à l'Opposante de jouer, elle lance un défi à la thèse. On note le numéro du coup, 1, dans la colonne extérieure, côté Opposante. On note le numéro du coup défié, 0, dans la colonne extérieure, côté Opposante aussi puisque c'est elle qui lance le défi.
Coup # 2 – C'est au Proposant de jouer. Il répond au défi (les réponses se notent sur la même ligne que le défi). C'est le coup 2, qu'on note dans la colonne extérieure.
Coup # 3 – C'est à l'Opposante de jouer, elle lance un défi au coup 2 : on note le numéro du coup, 3, dans la colonne extérieure et le numéro du coup défié, 2, dans la colonne intérieure.
Et ainsi de suite.

Les défis sont toujours inscrits sur une nouvelle ligne et les réponses se mettent sur la même ligne que leur défi. On peut ainsi facilement repérer un défi qui n'a pas encore été répondu. Il faut donc bien faire attention à l'ordre des coups (colonnes extérieures) : le déroulé de l'ordre des coups ne suit pas toujours le déroulé des lignes du tableau.

Par exemple dans certains cas, que nous verrons plus tard, le Proposant peut non pas répondre au défi lancé à sa thèse mais lancer un défi au défi lui-même !

	Opposante		Proposant	
			thèse	0
1	*défi à la thèse*	0	…	
3	*réponse au défi*	1	*défi au coup 1*	2
	…		…	

2.3 Les règles locales de base

Nous allons aborder les règles locales pour les quatre connecteurs logiques vus au chapitre 1 : la conjonction, la disjonction, l'implication et la négation. Comme les règles pour la conjonction et la disjonction sont très semblables, elles sont présentées ensemble.

Notez que les dialogues commencent à devenir intéressants avec l'introduction de l'implication et de la négation : c'est à partir de ce moment que l'Opposante se met à affirmer des propositions au cours du dialogue, ce qui permet au Proposant de lancer des défis à son tour.

La conjonction et la disjonction

La conjonction

notée (● ∧ ●)

La conjonction est une proposition complexe composée de deux conjoints, les deux membres de la conjonction, reliés ensemble pour former une conjonction.

Que fait-on dans un dialogue argumenté lorsque nous affirmons une conjonction ? Autrement dit, quelle est la signification dialogique de $(\phi \wedge \psi)$?

> Ici nous utilisons les lettres ϕ et ψ de l'alphabet grec pour faire référence à n'importe quelle proposition, simple ou complexe. Cela permet d'avoir des règles générales, qui valent dans tous les cas (il suffit de remplacer ϕ et ψ par les propositions qui nous concernent dans chaque cas).

Affirmer une conjonction, c'est s'engager à affirmer *les deux* conjoints (les deux membres de la conjonction, ϕ et ψ séparément). Donc, si j'affirme $(\phi \wedge \psi)$, on peut me demander de me justifier et d'affirmer ϕ ou d'affirmer ψ, *au choix de mon interlocuteur.*

Cette explication du sens de la conjonction dans un dialogue argumenté peut se traduire sous la forme d'une règle : si quelqu'un (disons **X**) affirme une conjonction, son interlocuteur (disons **Y**) peut lancer un défi contre cette affirmation en demandant soit le premier conjoint, soit le second ; pour répondre à ce défi, **X** doit alors affirmer le conjoint demandé.

Cette règle se résume sous forme de tableau :

Règle	Affirmation **X**	Défi **Y**	Réponse **X**
Conjonction	$(\phi \wedge \psi)$	$?\wedge_1$	ϕ
		$?\wedge_2$	ψ

Si le Proposant affirme $(A \wedge B)$, l'Opposante lance son défi en choisissant l'un des deux conjoints, soit le premier ($?\wedge_1$), soit le second ($?\wedge_2$) ; le Proposant devra alors répondre au défi en affirmant respectivement A (premier cas) ou B (second cas).

(Mais si c'est l'Opposante qui affirme une conjonction, alors c'est le Proposant qui lancera le défi en choisissant l'un des deux conjoints.)

> Avec la conjonction, c'est le joueur qui lance le défi qui a le choix.

☛ Exemple de dialogue avec conjonction

On veut résoudre un dialogue pour la thèse $((A \wedge B) \wedge C)$, qui ne comporte que des conjonctions. On commence par dessiner le tableau de dialogue, avec l'Opposante à gauche et le Proposant à droite. On inscrit la thèse dans la colonne du Proposant, c'est le coup 0 (on note 0 dans la colonne extérieure).

	Opposante		Proposant	
			$((A \wedge B) \wedge C)$	0
	…			

Coup # 1 – C'est à l'Opposante de jouer. Elle va lancer un défi à la thèse, ce sera son coup 1 (on note 1 dans la colonne extérieure, de son côté). Le connecteur logique principal de la thèse est une conjonction, avec $(A \wedge B)$ pour premier conjoint et C pour deuxième conjoint. D'après la règle locale de la conjonction, l'Opposante doit choisir le conjoint que le Proposant devra affirmer pour répondre au défi. Supposons qu'elle choisisse le premier conjoint. Elle demande donc $?\wedge_1$. Comme il s'agit d'un défi, on le note sur une nouvelle ligne et on indique dans la colonne intérieure le numéro du coup défié, ici 0.

	Opposante		Proposant	
			$((A \wedge B) \wedge C)$	0
1	$?\wedge_1$	0	…	

Coup # 2 – C'est au Proposant de jouer. En théorie, le Proposant a le choix soit de répondre au défi, soit de lancer un défi. Cependant pour lancer un défi, il faut que l'autre joueur ait affirmé quelque chose et en l'occurence, l'Opposante n'a rien affirmé, elle n'a fait qu'émettre une demande (marquée par un point d'interrogation). Le Proposant ne peut donc pas lancer de défi, il doit répondre à celui lancé contre sa thèse. Pour répondre à un défi lancé contre une conjonction, il doit affirmer le conjoint demandé, à savoir, ici, le premier conjoint, $(A \wedge B)$. Comme il s'agit d'une proposition complexe, il a le droit de l'affirmer (voir la règle socratique), ce qu'il fait. C'est le coup 2 (on note 2 dans la colonne extérieure, de son côté). Il s'agit d'une réponse à un défi, on la note donc sur la même ligne que le défi.

	Opposante		Proposant	
			$((A \wedge B) \wedge C)$	0
1	$?\wedge_1$	0	$(A \wedge B)$	2
	…			

Coup # 3 – C'est à l'Opposante de jouer. Elle n'a aucun défi en attente de réponse, mais elle peut lancer un défi au coup 2, qui est aussi une conjonction avec A pour premier conjoint et B pour second conjoint. Elle doit choisir quel conjoint demander. Supposons qu'elle demande le deuxième conjoint. On indique donc son coup $?\wedge_2$ sur une nouvelle ligne, car il s'agit d'un défi. On note le numéro du coup, 3, dans la colonne extérieure, et le numéro du coup défié, 2, dans la colonne intérieure.

	Opposante		Proposant	
			$((A \wedge B) \wedge C)$	0
1	$?\wedge_1$	0	$(A \wedge B)$	2
3	$?\wedge_2$	2	…	

Coup # 4 – C'est au Proposant de jouer. Pour répondre, il doit affirmer le conjoint demandé, à savoir B. Mais B est une proposition simple que l'Opposante n'a pas affirmée jusqu'à présent dans le dialogue : on le voit bien, il n'y a pas B inscrit dans la colonne de l'Opposante. Or la règle socratique stipule que le Proposant ne peut affirmer de proposition simple que si l'Opposante a déjà affirmé cette proposition plus tôt dans la partie. Le Proposant n'a donc pas le droit d'affirmer B, il ne peut pas répondre au défi. Et comme l'Opposante n'a pas affirmé de proposition complexe, le Proposant ne peut pas lancer de défi. Il ne peut donc ni lancer de défi, ni répondre à un défi, il n'a plus de coup à jouer : la partie s'arrête, il a perdu, l'Opposante a gagné.

	Opposante		Proposant	
			$((A \wedge B) \wedge C)$	0
1	$?\wedge_1$	0	$(A \wedge B)$	2
3	$?\wedge_2$	2		

L'Opposante gagne

Question Que se serait-il passé si l'Opposante avait choisi de demander le deuxième conjoint au coup 1, au lieu du premier ?

Réponse *En demandant le deuxième conjoint ($?\wedge_2$), l'Opposante aurait en fait gagné plus vite : ce deuxième conjoint, C, est une proposition simple que l'Opposante n'a pas affirmée, donc le Proposant n'aurait pas eu le droit de l'affirmer au coup 2 à cause de la règle socratique, il aurait donc perdu dès le coup 2.*

La disjonction
notée $(\bullet \vee \bullet)$

La disjonction est une proposition complexe composée de deux disjoints, les deux membres de la disjonction, reliés ensemble pour former une disjonction.

Dans un dialogue argumenté, affirmer une disjonction revient à s'engager à affirmer l'un ou l'autre des disjoints si on nous le demande, mais pas forcément à affirmer les deux en même temps, ni à dire que c'est l'un et pas l'autre. Donc si un joueur **X** affirme une disjonction $(\phi \vee \psi)$ et si un autre joueur, **Y**, le met au défi de justifier cette affirmation, il suffit à **X** d'affirmer ou bien ϕ ou bien ψ pour répondre au défi [2]. Contrairement

2. Nous verrons avec les rangs de répétition que le Proposant peut affirmer les deux disjoints avec son rang de 2, ce qui correspond bien à une disjonction inclusive, voir chapitre 1.

à la conjonction, c'est le joueur qui affirme la disjonction qui a le choix et non celui qui lance le défi.

Cette règle se résume dans le tableau suivant :

Règle	Affirmation **X**	Défi **Y**	Réponse **X**
Disjonction	$(\phi \vee \psi)$	$?\vee$	ϕ ψ

Si le Proposant affirme $(A \vee B)$, l'Opposante lance un défi en lui demandant de choisir l'un des deux disjoints ($?\vee$). C'est alors le Proposant qui peut choisir le disjoint qu'il souhaite affirmer en guise de réponse, ou bien A, ou bien B. (Mais si c'est l'Opposante qui affirme une disjonction, inversement, le Proposant n'aura pas le choix, c'est elle qui pourra choisir en répondant au défi.)

Contrairement à la conjonction, avec la disjonction, c'est le joueur qui *répond* au défi qui a le choix.

Exemple de dialogue avec disjonction

On veut résoudre un dialogue pour la thèse $\big((A \vee B) \vee (C \vee A)\big)$, qui ne comporte que des disjonctions. On commence par dessiner le tableau de dialogue, avec l'Opposante à gauche et le Proposant à droite. On inscrit la thèse dans la colonne du Proposant, c'est le coup 0.

Opposante	Proposant	
	$\big((A \vee B) \vee (C \vee A)\big)$	0
…		

Coup # 1 – C'est à l'Opposante de jouer. Elle va lancer un défi contre la thèse, qui est une disjonction avec $(A \vee B)$ pour premier disjoint et $(C \vee A)$ pour deuxième disjoint. Contrairement à la conjonction, avec une disjonction le joueur qui lance le défi ne peut pas choisir : l'Opposante lance son défi en demandant au Proposant de choisir le disjoint qu'il affirmera. On inscrit donc le défi $?\vee$ dans une nouvelle ligne, le numéro du coup, 1, est mis dans la colonne extérieure, le coup défié, 0, dans la colonne intérieure.

	Opposante		Proposant	
			$((A \vee B) \vee (C \vee A))$	0
1	$?\vee$	0	…	

Coup # 2 – C'est au Proposant de jouer. Il n'a pas d'autre coup à jouer que de répondre au défi lancé contre sa thèse. Il doit donc choisir l'un des disjoints et l'affirmer. Les deux disjoints sont des propositions complexes, la règle socratique ne le restreint donc pas dans ses choix. Il peut choisir celui qu'il veut, disons par exemple le deuxième, $(C \vee A)$, qu'on inscrit sur la même ligne que le défi. C'est le coup 2.

	Opposante		Proposant	
			$((A \vee B) \vee (C \vee A))$	0
1	$?\vee$	0	$(C \vee A)$	2
	…			

Coup # 3 – C'est à l'Opposante de jouer. Elle peut lancer un défi contre le coup 2, qui est une disjonction avec C pour premier disjoint et A pour second disjoint. Elle demande donc au Proposant de choisir l'un des deux disjoints et de l'affirmer. On note $?\vee$ sur une nouvelle ligne (attention, nouveau défi = nouvelle ligne), le numéro du coup, 3, dans la colonne extérieure, et le numéro du coup défié, 2, dans la colonne intérieure.

	Opposante		Proposant	
			$((A \vee B) \vee (C \vee A))$	0
1	$?\vee$	0	$(C \vee A)$	2
3	$?\vee$	2	…	

Coup # 4 – C'est au Proposant de jouer. Comme pour l'exemple avec les conjonctions, le Proposant doit affirmer une proposition simple pour répondre au défi : il peut choisir entre C et A, mais toutes deux sont simples. Or l'Opposante n'a pas encore affirmé de proposition simple, donc la règle socratique empêche le Proposant de répondre au défi. Il ne peut pas non plus lancer de défi puisque l'Opposante n'a pas affirmé de proposition complexe. Il n'a donc pas de coup à jouer, la partie s'arrête, il a perdu et l'Opposante a gagné.

	Opposante		Proposant	
			$((A \vee B) \vee (C \vee A))$	0
1	$?\vee$	0	$(C \vee A)$	2
3	$?\vee$	2		

L'Opposante gagne

Question Le Proposant aurait-il pu gagner s'il avait choisi d'affirmer le premier disjoint, $(A \vee B)$, au lieu du deuxième au coup 2 ? Pourquoi ?

Réponse *Non, cela n'aurait rien changé : il s'agit aussi d'une disjonction composée de deux propositions simples, A et B, donc l'Opposante aurait lancé un défi contre la disjonction et le Proposant se serait de nouveau retrouvé à devoir répondre au défi en affirmant une proposition simple que l'Opposante n'aurait pas déjà affirmée, ce qui est interdit par la règle socratique.*

Exercices : conjonction et disjonction

Faites un dialogue pour les thèses suivantes. Précisez qui gagne. Y avait-il d'autres parties possibles ?

Les solutions des exercices se trouvent pages 113 à 114.

Exercice 16 $((A \vee B) \wedge (B \vee A))$

Exercice 17 $\big(((N \vee P) \wedge M) \vee (O \vee M)\big)$

Exercice 18 $\big(((P \wedge Q) \vee P) \vee ((Q \vee P) \wedge Q)\big)$

L'implication notée (• → •)

L'implication est une proposition complexe composée d'un antécédent (représenté avant la flèche) et d'un conséquent (représenté après la flèche), liés ensemble pour former une implication.

Dans un dialogue argumenté, affirmer une implication revient à s'engager à affirmer le *conséquent* (tout ce qui est après la flèche), mais seulement à condition que l'interlocuteur affirme d'abord l'antécédent (tout ce qui est avant la flèche).

De cette manière, si quelqu'un (disons **X**) affirme une implication, son interlocuteur (disons **Y**) peut lancer un défi contre cette affirmation en affirmant l'antécédent. Pour répondre à ce défi, **X** doit alors affirmer le conséquent. On peut remarquer que l'implication permet de répartir la charge de la preuve : les deux joueurs doivent affirmer une partie de l'implication, l'antécédent pour **Y**, le conséquent pour **X**. Ces affirmations peuvent être utilisées ou défiées à leur tour dans la suite du dialogue.

Cette règle se résume dans le tableau suivant :

Règle	AFFIRMATION **X**	DÉFI **Y**	RÉPONSE **X**
Implication	$(\phi \rightarrow \psi)$	ϕ	ψ

Contrairement à la conjonction et à la disjonction, lorsqu'on lance un défi contre une implication on est obligé d'affirmer quelque chose (l'antécédent). Lorsqu'une thèse comporte une implication, l'Opposante se trouve donc devoir affirmer des propositions, simples ou complexes, que le Proposant pourra défier à son tour ou utiliser pour affirmer des propositions simples (permettant ainsi de lever la restriction imposée par la règle socratique).

Exemple de dialogue avec implication

On veut résoudre le dialogue pour la thèse $\big(((B \rightarrow A) \rightarrow C\big) \rightarrow (A \rightarrow C)\big)$, qui ne comporte que des implications. La mise en place du dialogue est la même que pour les exemples précédents, certains détails ne seront donc plus précisés.

Coup # 0 – On commence en notant la thèse dans la colonne du Proposant, au coup 0.

Opposante	Proposant	
	$\big(((B \rightarrow A) \rightarrow C\big) \rightarrow (A \rightarrow C)\big)$	0
…		

Coup # 1 – C'est à l'Opposante de jouer. Elle lance un défi contre la thèse, qui est une implication : l'antécédent est $\big((B \rightarrow A) \rightarrow C\big)$ et le conséquent est $(A \rightarrow C)$. Son défi va donc consister à affirmer l'antécédent pour les besoins de la discussion ; le Proposant devra affirmer le conséquent pour répondre au défi. L'Opposante affirme donc $\big((B \rightarrow A) \rightarrow C\big)$ au coup 1, en défiant le coup 0.