

Oraux
corrigés et commentés

Concours PC-PC*

Physique

CCINP

Centrale-Supélec

Mines-Ponts

X-ESPCI-ENS



Zakarya Ouzit

Première partie

Concours Commun des Instituts
Nationaux Polytechniques

Passer un oral de physique n'est pas systématique au concours CCINP. En effet, chaque candidat admissible en filière PC est convoqué pour une interrogation orale et une épreuve de travaux pratiques de physique ou de chimie. Le choix de la matière pour chaque épreuve est tiré au sort, de sorte que :

- si le candidat est convoqué pour une interrogation orale de physique, alors il sera convoqué pour une épreuve de travaux pratiques de chimie ;
- si le candidat est convoqué pour une interrogation orale de chimie, alors il sera convoqué pour une épreuve de travaux pratiques de physique.

Pour ce qui suit, nous nous plaçons dans la situation d'un candidat convoqué pour une interrogation orale de physique (et donc une épreuve de travaux pratiques de chimie).

L'oral de physique du concours CCINP est une épreuve composée de 30 min de préparation et 30 min de passage devant un examinateur. Les planches remises au candidat au début de sa préparation sont composées de deux exercices portant sur deux parties distinctes du programme de physique de PCSI et de PC :

- un premier problème, appelé « exercice majeur », composé de plusieurs questions et assez proche du cours ;
- un deuxième problème, appelé « exercice mineur », de type résolution de problème et qui s'appuie généralement sur un document (photo, courbe expérimentale...) où la démarche est à définir et conduire par le candidat.

L'interrogation peut aussi, éventuellement, aborder des aspects expérimentaux vus en travaux pratiques. Le jury recommande d'accorder 20 min à la présentation de l'exercice majeur et 10 min à celle de l'exercice mineur.

L'interrogation orale est coefficient 9, qu'elle soit une interrogation de physique ou de chimie, ce qui représente 22,5% des épreuves orales.

Problèmes

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Mesure de distance focale | 16 |
| 2.2 | Mesure interférométrique d'indice optique | 18 |
| 2.3 | Interférences entre ondes gravitationnelles | 22 |

2.1 Mesure de distance focale

Soit \mathcal{L} une lentille convergente de distance focale f' et \mathcal{M} un miroir plan, distants d'une distance $D = 60$ cm. On considère par ailleurs un point objet réel A de l'axe optique. Pour deux positions de ce point, le système optique réalise une image confondue avec le point objet. Ces deux positions sont espacées de 10 cm.

Déterminer la distance focale de la lentille convergente.

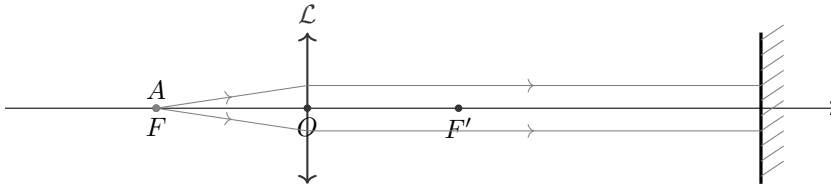
On rappelle les relations de conjugaison, respectivement de Descartes et de Newton, pour une lentille mince de centre optique O , de foyers objet F et image F' et de distance focale f' qui donne d'un point objet A une image ponctuelle A'

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

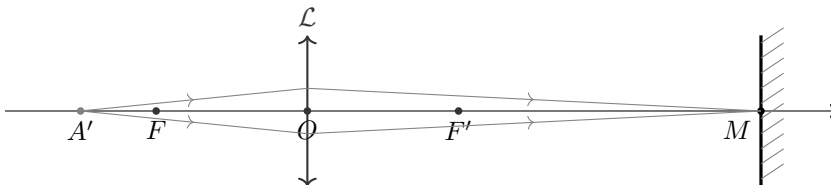
$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2$$

Solution

Il convient tout d'abord d'identifier les deux positions du point objet pour lesquelles son image par le système $\mathcal{L}\mathcal{M}\mathcal{L}$ lui est confondue. On retrouve tout d'abord la situation d'autocollimation, c'est-à-dire lorsque l'objet est au foyer objet de la lentille.



Pour la deuxième, il s'agit d'une situation où le point objet admet une image réelle que l'on notera A' par la lentille \mathcal{L} . Alors, par le principe de retour inverse de la lumière, A' en tant qu'objet réel admet une image réelle par \mathcal{L} située en A . Il suffit alors que le miroir se trouve au point où l'image A' se forme.



 Recommandation du jury

« Les constructions géométriques manquent souvent de rigueur et surtout de clarté. »
Il faut donc veiller à soigner ses schémas en optique. Notamment, lorsque des rayons sont tracés, il ne faut pas les tracer au hasard et justifier les déviations.

Si l'on note $d = 10$ cm la distance entre les deux positions du point objet A entre les deux situations évoquées, la première position coïncidant avec le foyer objet de la lentille, Alors $\overline{FA} = -d$ dans la deuxième situation. Si l'on applique la relation de conjugaison de Newton (avec origine aux foyers) à la deuxième situation, on en déduit

$$\begin{aligned}\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} &= -f'^2 \\ -d(\overline{F'O} + \overline{OA'}) &= -f'^2 \\ -d(D - f') &= f'^2\end{aligned}$$

avec D la distance entre le miroir et la lentille. Ainsi, la distance focale de la lentille est la solution du polynôme du second degré

$$f'^2 + df' - dD = 0$$

de discriminant $\Delta = d^2 + 4dD$. Les solutions sont donc de la forme

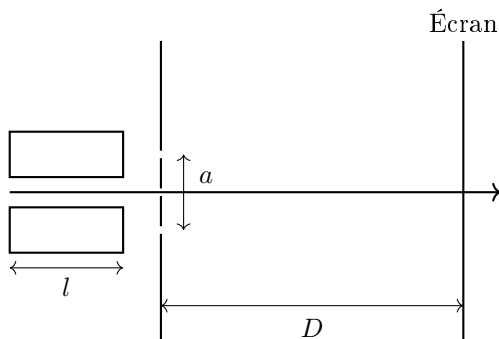
$$f' = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 + 4dD}}{2}$$

Ainsi, la distance focale est la racine positive du polynôme, soit

$$f' = \frac{\sqrt{d^2 + 4dD} - d}{2} = 20 \text{ cm}$$

2.2 Mesure interférométrique d'indice optique

Grâce à deux fibres optiques, on amène des rayons lumineux dans deux cuves identiques remplies d'air de longueur $l = 20$ cm. On place alors un trou à la sortie de chaque cuve. On observe alors des interférences sur un écran placé à une distance D .



On vide une des cuves pour ensuite la remplir d'un gaz d'indice $n_2 > n_{air}$. On observe alors un décalage de la figure d'interférence de 70 franges. Calculer $n_2 - n_{air}$ ainsi que la distance parcourue par la frange centrale.

Données :

- $D = 1$ m
- $a = 0,5$ mm
- $\lambda = 0,6$ μ m

Solution

Rappel - Trous d'Young

L'expérience des trous d'Young est une expérience d'interférométrie à division du front d'onde. Deux trous sont placés derrière une source lumineuse, ce qui permet de « cloner » la source. On obtient alors deux sources secondaires synchrones et cohérentes. Cette dernière condition est indispensable pour observer des interférences lumineuses.

Les trous diffractent la lumière. On modélise alors les sources secondaires par des sources d'ondes sphériques (donc quasi-ponctuelles). On peut alors observer des interférences en tout point de l'écran d'observation atteint par des rayons issus des deux sources.

On appelle S_1 et S_2 les deux sources secondaires situées respectivement au trou 1, en $x = \frac{a}{2}$, et au trou 2, en $x = -\frac{a}{2}$. On note par ailleurs C_1 (respectivement C_2) le point d'entrée de la fibre optique dans la cuve placée devant S_1 (respectivement S_2) et n_1 (respectivement n_2) l'indice du gaz dans la cuve placée devant S_1 (respectivement devant S_2). On considère un point M de l'écran de coordonnées dans le plan $(x, 0)$. La différence de chemin optique entre les rayons issus de S_1 et S_2 qui interfèrent en M s'écrit

$$\begin{aligned}\delta &= (SM)_2 - (SM)_1 \\ &= ((SC_2) + (C_2S_2) + (S_2M)) - ((SC_1) + (C_1S_1) + (S_1M))\end{aligned}$$

On pourrait supposer que $(SC_1) = (SC_2)$ en considérant que les rayons parcourent la même distance dans la fibre, mais cette hypothèse n'est pas nécessaire. On pose $\delta_0 = (SC_2) - (SC_1)$. Ensuite, on peut écrire $(C_1S_1) = n_1l$ et $(C_2S_2) = n_2l$ les chemins optiques des rayons passant dans les cuves. Par ailleurs, on peut écrire

$$\begin{aligned}(S_1M) &= n_{air}S_1M \\ &= n_{air}\sqrt{(x_M - x_{S1})^2 + (y_M - y_{S1})^2} \\ &= n_{air}\sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + (0 - (-D))^2} \\ &= n_{air}D\sqrt{1 + \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2} \\ &\approx n_{air}D\left(1 + \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{2D^2}\right)\end{aligned}$$

en considérant que l'observation de la figure d'interférence se fait suffisamment loin pour considérer $D \gg x$ et $D \gg a$. Ainsi,

$$(S_1M) = n_{air}\frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{2D}$$

De la même manière, on montre que

$$(S_2M) = n_{air}\frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2}{2D}$$

On en déduit donc

$$(S_2M) - (S_1M) = n_{air}\frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2}{2D} - n_{air}\frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{2D}$$

$$\begin{aligned}
 &= n_{air} \frac{(x + \frac{a}{2})^2 - (x - \frac{a}{2})^2}{2D} \\
 &= n_{air} \frac{(x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2})(x + \frac{a}{2} - (x - \frac{a}{2}))}{2D} \\
 &= n_{air} \frac{xa}{D}
 \end{aligned}$$

Par conséquent, la différence de chemin optique au point M est de la forme

$$\delta = \delta_0 + (n_2 - n_1)l + n_{air} \frac{xa}{D}$$

On obtient une figure d'interférences composée de franges rectilignes. On peut par ailleurs exprimer l'ordre d'interférences

$$p(M) = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\delta_0}{\lambda} + (n_2 - n_1) \frac{l}{\lambda} + n_{air} \frac{ax}{\lambda D}$$

☰ Rappel - Interfrange

L'interfrange est la plus petite distance séparant deux franges de même nature consécutives sur une figure d'interférence. Ici, on peut montrer à partir de l'expression de la différence de chemin optique que l'interfrange s'exprime

$$i = \frac{\lambda D}{a}$$

En particulier, au centre de la figure d'interférence, c'est-à-dire au point O , l'ordre d'interférences vaut

$$p(O) = \frac{\delta_0}{\lambda} + (n_2 - n_1) \frac{l}{\lambda}$$

Lorsque les deux cuves sont remplies d'air, l'ordre d'interférence vaut alors $p_{air}(O) = \frac{\delta_0}{\lambda}$. Puis, lorsque l'on vide l'une des cuves, par exemple la cuve 2, on obtient un nouvel ordre d'interférence s'écrivant

$$p_2(O) = \frac{\delta_0}{\lambda} + (n_2 - n_{air}) \frac{l}{\lambda}$$

Le décalage de la figure d'interférence correspond à la variation de l'ordre d'interférence en un point donné, par exemple ici au point O . On écrit alors

$$\Delta p = p_2(O) - p_{air}(O) = (n_2 - n_{air}) \frac{l}{\lambda} \Leftrightarrow n_2 - n_{air} = \frac{\Delta p \lambda}{l}$$

Avec $\Delta p = 70$, on en déduit

$$n_2 - n_{air} = 2,1 \times 10^{-4}$$

Pour déterminer la distance parcourue par la frange centrale (i.e. le décalage de la figure d'interférence sur l'écran), il faut retrouver le point M de l'écran dont la valeur d'ordre d'interférence après avoir remplacé le gaz de la cuve 2 correspond à celle au point O avant le changement de gaz. On cherche alors x tel que

$$\begin{aligned} p_2(M) &= p_{air}(O) \\ \Leftrightarrow \frac{\delta_0}{\lambda} + (n_2 - n_{air})\frac{l}{\lambda} + \frac{ax}{\lambda D} &= \frac{\delta_0}{\lambda} + (n_{air} - n_{air})\frac{l}{\lambda} + 0 \\ \Leftrightarrow \frac{ax}{\lambda D} &= -(n_2 - n_{air})\frac{l}{\lambda} \\ \Leftrightarrow x &= (n_{air} - n_2)\frac{Dl}{a} \end{aligned}$$

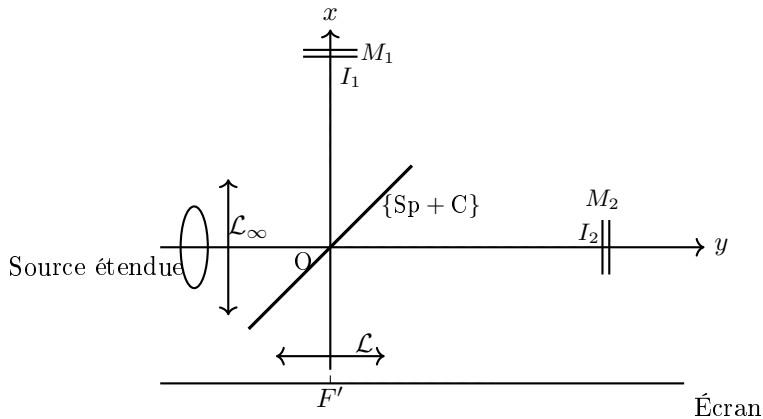
On obtient $x < 0$, ce qui signifie que la figure d'interférence se décale vers le bas. Cela est cohérent puisque si la cuve 2 est remplie d'un gaz d'indice plus grand que celui de l'air, il faut que le rayon issu de la cuve 1 parcourt une distance plus grande pour « compenser » le temps supplémentaire mis par le rayon issu de la cuve 2. On obtient

$$x = -8 \text{ cm}$$

Si c'était la cuve 1 qui était vidée puis remplie par le gaz d'indice n_2 , la figure se serait décalée de la même distance mais cette fois-ci vers le haut.

2.3 Interférences entre ondes gravitationnelles

L'interféromètre de Michelson ci-dessous est entouré d'air d'indice de réfraction égal à 1. Le dispositif est en configuration « lame d'air ». On note alors : $OI_1 = L$. Le miroir chariotable correspond au miroir M_2 et on note e l'épaisseur de la lame d'air.



1. Quel est l'intérêt de l'ensemble $\{S_p + C\}$? Quel est le nom de S_p et de C ? Retrouver la différence de marche induite en un point M de l'écran ainsi que l'intensité lumineuse en ce point. Quelle est la figure observée à l'écran?
2. On remplace l'ensemble $\{\text{Source étendue} + \mathcal{L}_\infty\}$ par un laser et on éclaire le miroir M_2 sous incidence normale. Quelle est la nouvelle différence de marche? Quelle est l'intensité lumineuse en M ? et en F' ?
3. L'interféromètre est désormais placé dans un milieu perturbé par des ondes gravitationnelles, ce qui impose une variation de l'indice de réfraction de l'air dépendant des axes x et y : $n_x = 1 - \frac{h}{2}$; $n_y = 1 + \frac{h}{2}$. Que valent alors (OI_1) et (OI_2) ?
4. Quelle est la nouvelle différence de marche due seulement à la perturbation du milieu par les ondes gravitationnelles? Exprimer l'intensité lumineuse en F' .
5. En déduire la variation relative d'intensité entre la détection des ondes gravitationnelles et la situation de repos. On effectuera un développement limité.

Données :

- Variation d'indice $h = 1 \times 10^{-21}$
- Taille d'un bras $L = 3 \text{ km}$
- Longueur d'onde du laser $\lambda = 1 \mu\text{m}$

Solution

☰ Rappel - Interféromètre de Michelson

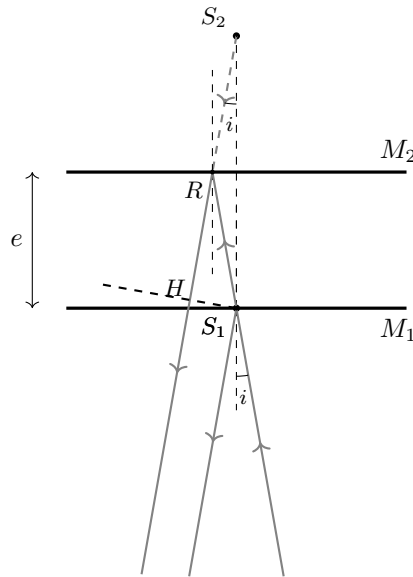
L'interféromètre de Michelson est un dispositif permettant d'observer des interférences lumineuses à division d'amplitude. Une séparatrice sépare un faisceau incident en deux faisceaux traversant chacun un bras de l'interféromètre. Deux configurations sont possibles :

- Configuration « lame d'air » : les deux miroirs sont parallèles mais l'un d'eux est charrioté de sorte à ce que les rayons, réfléchi et transmis, parcourt des distances différentes via chaque bras ce qui induit une différence de marche ; la figure d'interférence, localisée à l'infini, est composé d'anneaux concentriques.
- Configuration « coin d'air » : les deux miroirs sont égale distance de la séparatrice mais l'un des miroirs est incliné d'un certain angle par rapport à la direction de l'autre miroir ; la figure d'interférence, localisée au voisinage des miroirs, est composé de franges rectilignes.

1. L'ensemble $\{S_p + C\}$ est constitué d'une lame séparatrice, S_p , et d'une compensatrice.

- La séparatrice est une lame semi-réfléchissante 50 :50 qui réfléchit la moitié de l'énergie de l'onde incidente et transmet l'autre moitié. La compensatrice est une lame transparente, généralement de même épaisseur que la séparatrice ; elle permet de compenser la différence de chemin optique induite entre les rayons transmis et réfléchis par la séparatrice du fait que l'un traverse plusieurs fois la lame. Ainsi, avec la compensatrice, les deux parties réfléchie et transmise d'un rayon incident ont parcouru la même distance dans le verre qui constitue les lames en sortie de l'interféromètre et aucune différence de chemin optique supplémentaire n'est à prendre en compte.

Pour retrouver la différence de chemin optique induite en un point M de l'écran, on travaille sur le modèle dit replié de l'interféromètre où l'on prend le symétrique du bras portant le miroir M_2 par rapport à l'ensemble $\{S_p + C\}$. La source étant placée dans le plan focal objet de la lentille L_1 , chaque point de la source produit des rayons qui entrent dans l'interféromètre parallèlement entre eux. On considère un de ces rayons et on note i l'angle d'incidence à l'entrée de l'interféromètre. Ce rayon se sépare en deux rayons qui interfèrent alors entre eux.



On définit alors deux sources secondaires S_1 et S_2 desquelles proviendraient chacun des deux rayons qui interfèrent, S_2 étant le symétrique de S_1 par rapport au miroir M_2 . Les deux rayons étant parallèles entre eux, ils font partie d'une même onde plane, dans lesquels les surfaces d'onde sont des plans. Ainsi, par le théorème de Malus, les points S_1 et H vibrent en phase. La différence de chemin optique calculée en un point M de l'écran s'écrit donc

$$\begin{aligned}
 \delta &= (S_2M) - (S_1M) \\
 &= (S_2H) + (HM) - (S_1M) \\
 &= (S_2H) \\
 &= n_{air} S_2H \\
 &= n_{air} S_1 S_2 \cos i \\
 &= 2n_{air} e \cos i
 \end{aligned}$$

Ainsi, par la formule de Fresnel, l'intensité lumineuse au point M s'écrit en fonction de la différence de phase calculée au point M

$$\begin{aligned}
 I(M) &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi) \\
 &= \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2} + 2\sqrt{\frac{I_0}{2} \frac{I_0}{2}} \cos\left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda}\right)
 \end{aligned}$$

$$= I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi n_{air} e \cos i}{\lambda} \right) \right)$$

Les points qui vibrent en phase sont ceux associés à des rayons correspondant aux mêmes angles d'incidence. Cela donne lieu à une figure d'interférence ayant une symétrie de révolution autour de l'axe optique de la lentille L . Ce sont donc des franges circulaires, appelées « anneaux d'égales inclinaisons ».

Recommandations du jury

« L'origine de la différence de marche dans un montage interférentiel n'est pas toujours bien comprise, que ce soit pour le dispositif des trous d'Young en montage de Fraunhofer ou pour un interféromètre de Michelson ». Ici en particulier, la différence de marche est donnée par l'épaisseur de la lame d'air qui implique une différence de parcours entre les rayons réfléchis et transmis par la séparatrice. Il faut veiller aussi à être clair sur la localisation des interférences. En l'occurrence, les franges d'égales inclinaisons sont localisées à l'infini.

2. En remplaçant la source ponctuelle par un laser, on obtient en entrée de l'interféromètre une onde plane dont les rayons sont parallèles à l'axe optique, c'est-à-dire pour lesquels $i = 0$. La nouvelle différence de marche s'écrit

$$\delta = 2en_{air}$$

et l'intensité lumineuse, concentrée en un point, s'écrit

$$I = I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi en_{air}}{\lambda} \right) \right)$$

3. Dans le milieu perturbé par des ondes gravitationnelles, les chemins optiques s'écrivent

$$(OI_1) = n_x L = \left(1 - \frac{h}{2} \right) e \quad \text{et} \quad (OI_2) = n_y L = \left(1 + \frac{h}{2} \right) e$$

4. La différence de chemin optique est due à la différence de parcours des rayons entre réflexion et transmission. Ainsi, elle s'exprime en un point M de l'écran par

$$\delta(M) = (OO)_2 - (OO)_1$$

$$\begin{aligned}
 &= (OI_2) + (I_2O) - (OI_1) - (I_1O) \\
 &= 2(OI_2) - 2(OI_1) \quad \text{par le principe de retour inverse de la lumière} \\
 &= 2L(n_y - n_x) \\
 &= 2hL
 \end{aligned}$$

L'intensité lumineuse en F' s'écrit donc

$$\begin{aligned}
 I(F') &= I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} \right) \right) \\
 &= I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi hL}{\lambda} \right) \right)
 \end{aligned}$$

5. On peut réexprimer l'intensité lumineuse en F' connaissant l'ordre de grandeur du terme $\frac{4\pi hL}{\lambda} \approx 4 \times 10^{-11}$, on peut approximer l'intensité lumineuse par

$$I(F') \approx I_0 \left(1 + 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi hL}{\lambda} \right)^2 \right)$$

Ainsi, la variation relative d'intensité s'écrit

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\Delta I}{I_0} \right| &= \left| \frac{I(F') - 2I_0}{I_0} \right| = \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi hL}{\lambda} \right)^2 \\
 \text{soit } \left| \frac{\Delta I}{I_0} \right| &= 1 \times 10^{-21}
 \end{aligned}$$

Problèmes

| | | |
|-----|--|----|
| 3.1 | Anneau sur une tige en rotation | 28 |
| 3.2 | Tige reliée à un ressort | 32 |
| 3.3 | Pierre dans une benne en mouvement | 36 |
| 3.4 | Erreur de pilotage d'un satellite | 40 |

3.1 Anneau sur une tige en rotation

On fait tourner une tige autour de l'axe vertical ascendant Oz à la vitesse angulaire ω . La tige est inclinée d'un angle θ_0 par rapport à l'axe. On place un anneau de masse m susceptible de se déplacer sans frottement sur la tige. À l'état initial, l'anneau est situé à une distance r_0 de l'origine O et part sans vitesse initiale. Deux référentiels sont à considérer dans cette situation :

- un premier référentiel supposé galiléen \mathcal{R} ,
 - et le référentiel \mathcal{R}' de la tige qui tourne dans le référentiel \mathcal{R}
1. Définir le vecteur de rotation $\vec{\omega}$.
 2. Faire le bilan des forces subies par l'anneau.
 3. Écrire l'énergie potentielle relative à la force d'inertie d'entraînement, en la prenant nulle à l'origine.
 4. En déduire l'énergie potentielle totale.
 5. Déterminer la (les) position(s) d'équilibre et discuter sa (leur) stabilité.
 6. Décrire les évolutions possibles de l'anneau en fonction de r_0 .

Solution

Il s'agit d'un exercice de mécanique du point en référentiel non galiléen. L'énoncé définit en effet clairement un référentiel galiléen ainsi qu'un référentiel en mouvement de rotation par rapport à ce référentiel.

Rappel - Résolution d'un problème de mécanique du point

1. Définition du système étudié
2. Définition du référentiel d'étude
3. Bilan des actions extérieures appliquées au système : forces et éventuellement puissance et/ou moment associés
4. Application d'un des théorèmes fondamentaux de la mécanique
 - théorème de la résultante cinétique (deuxième loi de Newton)
 - théorème de l'énergie cinétique/mécanique
 - théorème du moment cinétique
5. Obtention de l'équation du mouvement

Bien que l'énoncé ne l'exige généralement pas explicitement, il faut veiller à bien définir le système étudié ainsi que le référentiel d'étude en début de résolution.

On assimile l'anneau à un point matériel noté M de masse m en mouvement dans le référentiel \mathcal{R}' lié à la tige en rotation par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R} .

1. Le vecteur rotation est un vecteur dont la norme correspond à la vitesse angulaire du système étudié dirigé et orienté selon le vecteur unitaire lié à l'axe de rotation. Ici, il peut être défini par

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$$

2. Les forces appliquées au système sont les suivantes :

— Poids $\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{u}_z$

— Réaction du support, purement normale car les frottements solides sont négligés \vec{R}_N

— Force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e$

— Force d'inertie de Coriolis $\vec{f}_{ic} = -m \vec{a}_c$

avec \vec{a}_e l'accélération d'entraînement dont l'expression se simplifie en définissant H le projeté orthogonal du point matériel M sur l'axe de rotation Oz

$$\vec{a}_e = -\omega^2 \overline{HM}$$

et \vec{a}_c l'accélération de Coriolis d'expression

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}}(M)$$

⚠ Attention ⚠

☞ Ne pas oublier les forces d'inertie lors de l'étude du mouvement d'un système dans un référentiel non galiléen, en particulier la force d'inertie de Coriolis pour un référentiel en rotation.

3. On peut montrer que la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle dans le cas d'un mouvement dans un référentiel en rotation uniforme. En effet, en se munissant d'un repère cylindrique $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, la force d'inertie d'entraînement s'écrit

$$\vec{f}_{ie} = m\omega^2 \overline{HM} = m\omega^2 \rho \vec{u}_\rho$$

avec $\rho = r \sin \theta_0 = HM$. On peut donc écrire cette force sous la forme

$$\vec{f}_{ie} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$$

avec $E_p = -\frac{1}{2}\omega^2\rho^2 = -\frac{1}{2}\omega^2r^2\sin^2\theta_0$ et $E_p = 0$ en $r = 0$.

4. La réaction normale du support et la force d'inertie de Coriolis ne travaillent pas. En effet, \overrightarrow{R}_N est par définition perpendiculaire à la tige, donc à $\overrightarrow{v}_{/R}(M)$ puisque le point M glisse sur la tige; c'est également le cas de f_{ic} puisque le résultat du produit vectoriel $\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v}_{/R}(M)$ est orthogonal à $\overrightarrow{v}_{/R}(M)$. La seule autre force qui dérive d'une énergie potentielle est le poids. Son expression est donnée par

$$E_{p,pes} = mgz = mgr \cos \theta_0$$

On en déduit donc l'expression de l'énergie potentielle totale du point matériel

$$E_{p,tot}(M) = -\frac{1}{2}m\omega^2r^2\sin^2\theta_0 + mgr \cos \theta_0$$

5. On se retrouve avec une énergie potentielle fonction de la variable r . Les positions d'équilibres sont données par les maxima de la fonction $E_{p,tot}(r)$. On calcule alors la dérivée de la fonction

$$\frac{dE_{p,tot}}{dr} = -m\omega^2r\sin^2\theta_0 + mg \cos \theta_0$$

et on cherche les valeurs r_{eq} annulant cette dérivée :

$$\left. \frac{dE_{p,tot}}{dr} \right|_{r_{eq}} = 0 \Leftrightarrow -m\omega^2r_{eq}\sin^2\theta_0 + mg \cos \theta_0 = 0$$

Si $\theta_0 = 0$, alors il n'existe pas de position d'équilibre. Sinon,

$$r_{eq} = \frac{g \cos \theta_0}{\omega^2 \sin^2 \theta_0}$$

La stabilité de la position d'équilibre est donnée par le signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle calculée en r_{eq} .

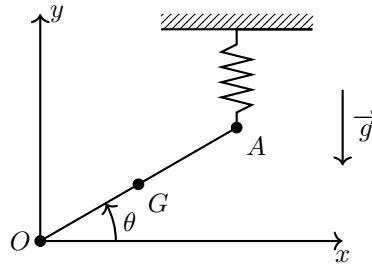
$$\frac{d^2E_{p,tot}}{dr^2} = -m\omega^2 \sin^2 \theta_0 < 0$$

La dérivée seconde étant négative en r_{eq} , cette position est une position d'équilibre instable. Elle correspond alors à un maximum local d'énergie potentielle.

6. Une unique position d'équilibre instable a été trouvée. Toute évolution du système tend à l'éloigner de cette position.
- Si $\theta_0 = 0$, alors l'anneau ne présente pas de position d'équilibre. Dans ce cas-ci, la tige est verticale et la force d'inertie d'entraînement est nulle. L'anneau glisse vers le bas sous l'effet du poids, $r \rightarrow 0$.
 - Si $\theta_0 \neq 0$, l'anneau présente une unique position d'équilibre $r_{eq} = \frac{g \cos \theta_0}{\omega^2 \sin^2 \theta_0}$. Si $r_0 = r_{eq}$, alors l'anneau reste fixe dans le référentiel \mathcal{R}' . Si $r_0 < r_{eq}$, alors l'anneau glisse vers le bas de sorte à ce que $r \rightarrow 0$. Si $r_0 > r_{eq}$, alors l'anneau glisse vers le haut et r croît jusqu'à quitter la tige.

3.2 Tige reliée à un ressort

On considère une tige de masse m , de longueur $2a$, de centre de masse G , fixée en O et d'extrémité A . En A est fixé un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 . La tige possède un moment d'inertie $I = ma^2$. La tige est en rotation dans le plan xOy sans frottement. On note \vec{g} le champ de pesanteur. À l'équilibre, la tige est horizontale et le ressort sera considéré constamment parallèle à l'axe vertical Oy .



1. Rappeler les conditions d'équilibre pour un solide dans un référentiel galiléen.
2. Faire un bilan des forces s'appliquant sur la tige.
3. Trouver alors une relation entre la longueur l_e du ressort à l'équilibre et l_0 .
4. Exprimer le moment cinétique de la tige.
5. Déterminer l'équation vérifiée par l'angle de rotation $\theta(t)$.
6. Exprimer la période des petites oscillations T_0 .

Solution

Il s'agit d'un exercice de mécanique du solide en référentiel galiléen. La mise en équation se fera via l'application du théorème du moment cinétique conformément à la façon dont les questions posées.

On étudie le mouvement de la tige de longueur $2a$, de masse m et de centre de masse G dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

1. Un solide est à l'équilibre dans un référentiel donné si et seulement si son centre de masse est au repos et qu'il n'est animé d'aucun mouvement de rotation. Cela impose donc la nullité de la résultante des forces et ainsi que du moment de la résultante par rapport à n'importe quel point fixe dans le référentiel d'étude.
2. Les actions appliquées au système sont les suivantes :

- Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$ appliqué au point G
- Force de rappel du ressort $\vec{F} = k(l - l_0)\vec{u}_y$ appliquée au point A
- Liaison pivot au point O ; dans la cas d'une liaison parfaite, son moment calculé par rapport à l'axe Oz perpendiculaire au plan de la figure est nul.

Le poids et la force de rappel du ressort sont connues. Cependant, nous avons assez peu d'information sur la réaction qui maintient la tige au point O si ce n'est que le moment résultant selon l'axe Oz est nul (liaison pivot parfaite). Nous allons donc utiliser la nullité du moment de la résultante pour obtenir l'expression de l_e .

⚠ Attention ⚠

☞ Lorsque l'on calcule le moment d'une force qui s'exerce sur un solide, il faut tenir compte du point d'application de la force! Pour une force \vec{F} qui s'exerce sur un solide en un point A , le moment de la force calculé par rapport à un point fixe O du référentiel se calcule par la relation

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$$

3. On considère la tige dans son état d'équilibre, c'est-à-dire à l'horizontale. Calculons le moment de chacune des actions extérieures s'exerçant sur la tige par rapport à l'axe Oz fixe dans le référentiel :
- poids : $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -mga$ avec a le bras de levier de la force qui a pour effet de faire tourner le point G dans le sens indirect autour de l'axe Oz , d'où un moment négatif
 - force de rappel : $\mathcal{M}_z(\vec{F}) = 2ak(l_e - l_0)$ avec $2a$ le bras de levier de la force qui a pour effet de faire tourner le point A dans le sens direct autour de l'axe Oz , d'où un moment positif
 - liaison pivot : $\mathcal{M}_z(\text{liaison}) = 0$ dans l'hypothèse d'une liaison pivot parfaite

La condition d'équilibre de la tige permet d'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{F}) + \mathcal{M}_z(\text{liaison}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -mga + 2ak(l_e - l_0) &= 0 \Leftrightarrow l_e = l_0 + \frac{mg}{2k} \end{aligned}$$

4. Le moment cinétique de la tige calculé par rapport à son axe de rotation Oz s'écrit en faisant intervenir la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ ainsi que le moment d'inertie $I = ma^2$

$$L_z = I\omega = ma^2\dot{\theta}$$

☰ Rappel - Théorème du moment cinétique appliqué à un solide en rotation

Le moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe peut s'exprimer simplement en définissant le moment d'inertie. Si l'on appelle Oz l'axe autour duquel le solide est en rotation, on peut définir une grandeur scalaire appelée moment d'inertie que l'on note généralement J_z défini par

$$J_z = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \rho^2(M) d^3m(M)$$

avec $\rho(M)$ la distance entre un point M du solide et l'axe Oz . Cette définition qui est la plus générale possible pour le moment d'inertie n'est généralement pas exigible. Pour un ensemble discret de points matériels, cette grandeur se définit par

$$J_z = \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2$$

Dans ce cas, le moment cinétique scalaire du solide calculé par rapport à l'axe de rotation se définit à partir du moment d'inertie et de la vitesse angulaire

$$L_z = J_z \omega$$

Dans cette situation, on veillera donc à exprimer les différents moments (en particulier les moments de force) sous leurs formes scalaires.

5. On reprend le calcul des moments des actions extérieures calculés par rapport à l'axe de rotation Oz pour une position quelconque de la tige :

- poids : $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -mga \cos \theta$ avec $a \cos \theta$ le bras de levier de la force
- force de rappel : $\mathcal{M}_z(\vec{F}) = 2a \cos \theta k(l - l_0)$ avec $2a \cos \theta$ le bras de levier de la force et l la longueur du ressort qui peut s'écrire $l = l_e - y_A = l_0 + \frac{mg}{2k} - 2a \sin \theta$, d'où $\mathcal{M}_z(\vec{F}) = 2a \cos \theta k(\frac{mg}{2k} - 2a \sin \theta)$
- liaison pivot : $\mathcal{M}_z(\text{liaison}) = 0$ dans l'hypothèse d'une liaison pivot parfaite

L'application du théorème scalaire du moment cinétique au mouvement de la tige dans le référentiel d'étude galiléen s'écrit, pour des moments calculés par rapport à l'axe Oz fixe dans le référentiel d'étude,

$$\begin{aligned}\frac{dL_z}{dt} &= \mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{F}) + \mathcal{M}_z(\text{liaison}) \\ \Leftrightarrow ma^2\ddot{\theta} &= -mga \cos \theta + 2a \cos \theta k \left(\frac{mg}{2k} - 2a \sin \theta \right) \\ \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{4k}{m} \cos \theta \sin \theta &= 0\end{aligned}$$

6. Dans l'approximation des petites oscillations autour de la position d'équilibre (tige horizontale, donc $\theta_{eq} = 0$), on considère $\theta \ll 1$ rad, ce qui implique au premier ordre en θ $\cos \theta \approx 1$ et $\sin \theta \approx \theta$. L'équation du mouvement devient

$$\ddot{\theta} + \frac{4k}{m}\theta = 0$$

On reconnaît l'équation différentielle décrivant le comportement d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m}}$. La période associée aux petites oscillations vaut donc

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k}}$$

3.3 Pierre dans une benne en mouvement

On considère une pierre de masse m se trouvant dans la benne d'un camion. On appelle α l'angle que forme la benne avec l'horizontale. Le camion accélère constamment, et le vecteur accélération est \vec{a} . La réaction de la benne sur la pierre est \vec{R} . On appelle μ le coefficient de frottement entre la pierre et la benne.

1. Effectuer un bilan des forces dans le référentiel lié à la benne et exprimer les forces dans la base associée.
2. Exprimer une condition sur μ pour que la pierre reste immobile.
3. Exprimer en fonction de α une condition sur \vec{a} pour que la pierre se mette en mouvement.
4. On considère désormais que la pierre est en mouvement. Déterminer les équations horaires du mouvement de la pierre.

On suppose maintenant que le camion s'arrête et que la benne se met en mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Oz à une vitesse angulaire constante ω .

5. Effectuer un bilan des forces dans le référentiel lié à la benne et exprimer les forces dans la base associée.

Solution

Il s'agit d'un exercice de mécanique du point en référentiel non galiléen en translation par rapport à un référentiel galiléen.

On étudie le mouvement de la pierre de masse m assimilée à un point matériel M dans le référentiel de la benne en translation de vecteur accélération \vec{a} par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen. On muni le référentiel de la benne d'un repère cartésien plan d'axes Ox aligné avec le fond de la benne, faisant donc un angle α avec l'horizontal et Oy orthogonal à Ox et ascendant.

1. Les forces s'appliquant sur la pierre sont les suivantes :

- Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg(\sin\alpha\vec{u}_x + \cos\alpha\vec{u}_y)$
- Réaction du support $\vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N = R_T\vec{u}_x + R_N\vec{u}_y$
- force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a} = ma(-\cos\alpha\vec{u}_x + \sin\alpha\vec{u}_y)$

2. La pierre reste immobile dans le référentiel de la benne tant que les forces qui s'appliquent dessus se compensent :

$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T + \vec{f}_{ie} = \vec{0}$$

Ensuite, par projection selon les axes Ox et Oy , on obtient

$$R_T = mg \sin \alpha + ma \cos \alpha \quad \text{et} \quad R_N = mg \cos \alpha - ma \sin \alpha$$

☰ Rappel - Lois de Coulomb du frottement solide

On considère un solide en contact avec une surface exerçant. De ce contact résulte une action subie par le solide nommée réaction du support séparée en deux composantes, normale à la surface \vec{R}_N et tangente à la surface \vec{R}_T . Les lois de Coulomb du frottement solide donnent une relation entre ces deux composantes selon l'état de glissement ou non du solide par rapport au support :

- lorsque le solide glisse sur le support, la réaction tangentielle est de sens opposé au vecteur vitesse du solide et de norme proportionnelle à la norme de la réaction normale

$$\|\vec{R}_T\| = \mu_D \|\vec{R}_N\|$$

avec μ_D le coefficient de frottement dynamique;

- tant que le solide est immobile par rapport au support, la réaction tangentielle est majorée en norme

$$\|\vec{R}_T\| \leq \mu_S \|\vec{R}_T\|$$

avec μ_S le coefficient de frottement statique.

Les coefficients de frottements μ_S et μ_D sont théoriquement différents et dépendent des matériaux constituant les surfaces en contact et de l'état de surface. Généralement, on considère $\mu_S = \mu_D$, comme c'est le cas dans le problème résolu ici.

Par les lois de Coulomb du frottement solide, tant que la pierre est immobile, la norme de la réaction tangentielle est majorée

$$R_T \leq \mu R_N$$

$$\Leftrightarrow \mu \geq \frac{mg \sin \alpha + ma \cos \alpha}{mg \cos \alpha - ma \sin \alpha}$$

$$\text{que l'on peut réécrire} \quad \mu \geq \frac{g \tan \alpha + a}{g - a \tan \alpha}$$

On peut remarquer qu'en absence d'accélération du référentiel de la benne $a = 0$, on

retrouve l'inégalité entre l'angle d'inclinaison de la surface par rapport à l'horizontal et le coefficient de frottement

$$\mu \geq \tan \alpha$$

3. Si le minorant de μ est négatif, alors la pierre ne sera jamais immobile. Cela donne une condition sur l'accélération a du camion

$$a \geq \frac{g}{\tan \alpha}$$

4. On considère que la pierre est en mouvement dans le référentiel lié à la benne non galiléen. Le théorème de la résultante cinétique nous permet d'écrire

$$m \vec{a}(M) = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T + \vec{f}_{ie}$$

Le mouvement de la pierre est un mouvement de translation parallèlement à la surface de la benne, donc à l'axe Ox . En projetant selon les axes Ox et Oy , on obtient

$$\begin{cases} \ddot{x} = R_T - mg \sin \alpha - ma \cos \alpha \\ 0 = R_N - mg \cos \alpha + ma \sin \alpha \end{cases}$$

On est dans le cas où la pierre glisse sur la surface de la benne. Par les lois de Coulomb du frottement solide, on a la relation suivante entre les normes des réactions normale et tangentielle

$$R_T = \mu R_N$$

On obtient

$$\begin{cases} \ddot{x} = \mu R_N - mg \sin \alpha - ma \cos \alpha \\ R_N = mg \cos \alpha - ma \sin \alpha \end{cases}$$

On obtient alors

$$\ddot{x} = \mu(mg \cos \alpha - ma \sin \alpha) - mg \sin \alpha - ma \cos \alpha$$

que l'on peut réécrire $\ddot{x} = mg(\mu \cos \alpha - \sin \alpha) - ma(\mu \sin \alpha + \cos \alpha)$

On obtient ainsi un mouvement rectiligne uniformément accéléré selon l'axe Ox .

L'équation horaire du mouvement s'écrit

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}t^2(mg(\mu \cos \alpha - \sin \alpha) - ma(\mu \sin \alpha + \cos \alpha))$$

5. Dans le cas où la benne est en rotation uniforme dans le référentiel terrestre, le bilan des forces est le même que précédemment à la différence des forces d'inertie :
- force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = \omega^2 \overline{HM}$ avec H le projeté orthogonal du point matériel M sur l'axe de rotation du référentiel de la benne
 - force d'inertie de Coriolis $f_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)$ avec $\vec{\omega}$ le vecteur rotation associé au mouvement du référentiel de la benne et $\vec{v}(M)$ le vecteur vitesse de la pierre dans le référentiel de la benne.

3.4 Erreur de pilotage d'un satellite

On place en orbite un satellite autour de la Terre de rayon r_0 à une vitesse v_0 . Après une erreur de pilotage, la vitesse change et devient $v_0(1 + \varepsilon)$ avec $\varepsilon \ll 1$.

Quelle est la nouvelle trajectoire du satellite ?

Solution

Il convient ici d'étudier les propriétés du mouvement du satellite autour de la Terre dans le référentiel géocentrique. Ce mouvement est un mouvement à champ de force centrale.

Rappel - Force centrale

On appelle force centrale une force dont la droite d'action passe toujours par un même point fixe dans le référentiel d'étude. En coordonnées sphériques centrées au centre de force, une telle force peut s'exprimer sous la forme $\vec{F} = F\vec{u}_r$. Le moment cinétique calculé par rapport au centre de force d'un point matériel soumis seulement à une telle force se conserve. Le mouvement a alors les propriétés suivantes :

- le mouvement est plan ;
- le vecteur reliant le point matériel au centre de force balaie des aires égales à intervalles de temps égaux.

On peut également définir la constante des aires $C = r^2\dot{\theta}$. Cette quantité est constante du fait de la conservation du moment cinétique.

On étudie le mouvement du satellite de masse m , assimilé à un point matériel M , dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. Le satellite n'est soumis qu'à l'attraction gravitationnelle de la Terre d'expression

$$\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{r^2} \vec{u}_r$$

avec M_T la masse de la Terre et r la distance entre le point M et le centre de la Terre. Cette force est centrale, le mouvement du satellite est donc plan. On se placera dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

☰ Rappel - Force newtonienne

Une force newtonienne est une force centrale et conservative dont l'expression est de la forme

$$\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{u}_r$$

en coordonnées polaires. La force est attractive si $K < 0$, répulsive si $K > 0$. L'énergie potentielle dont dérive la force a alors pour expression

$$E_p = \frac{K}{r} + \text{constante}$$

la constante étant généralement prise en $r \rightarrow \infty$. Les forces d'interaction électrostatique et gravitationnelle sont des cas particuliers de forces newtoniennes.

Un système soumis uniquement à une force newtonienne est donc conservatif, i.e. d'énergie mécanique constante. Son énergie mécanique peut s'écrire, en coordonnées polaires, sous la forme

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$$

avec $E_{p,eff}(r)$ une fonction de r appelée énergie potentielle effective.

La force d'interaction gravitationnelle étant conservative, elle dérive d'une énergie potentielle qui peut s'exprimer

$$E_p = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{r}$$

L'énergie mécanique du satellite peut donc s'écrire, en coordonnées polaires,

$$E_m = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \mathcal{G} \frac{mM_T}{r}$$

En introduisant la constante des aires $C = r^2 \dot{\theta}$, on réécrit

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{mC}{2r^2} - \mathcal{G} \frac{mM_T}{r}$$

On pose alors

$$E_{p,eff} = \frac{mC}{2r^2} - \mathcal{G} \frac{mM_T}{r}$$

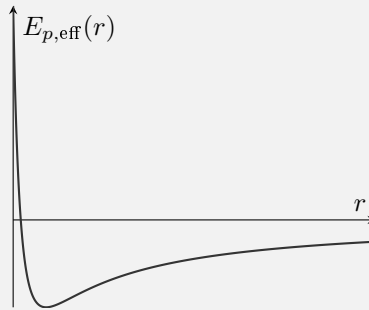
l'énergie potentielle effective. On se ramène alors à l'étude d'un mouvement unidimensionnel

☰ Rappel - Trajectoire possible en présence d'attraction gravitationnelle

Pour un point matériel soumis à l'attraction gravitationnelle, l'étude du mouvement se ramène à un mouvement unidimensionnel décrit par la seule coordonnée r des coordonnées polaires. On utilise alors la fonction énergie potentielle effective d'expression

$$E_{p,eff} = \frac{mC}{2r^2} - \mathcal{G} \frac{mM_T}{r}$$

L'allure de la fonction est la suivante :



Il y a alors quatre trajectoires possibles :

- Trajectoire circulaire si $E_m = E_{p,eff}^{min}$
- Trajectoire elliptique si $0 > E_m > E_{p,eff}^{min}$
- Trajectoire parabolique si $E_m = 0$
- Trajectoire hyperbolique si $E_m > 0$

Le satellite est initialement en orbite circulaire. Son énergie mécanique a pour expression

$$E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - \mathcal{G} \frac{mM_T}{r_0}$$

Suite à l'erreur de pilotage, la vitesse devient $v_0(1 + \varepsilon)$ et l'énergie mécanique devient

$$E'_m = \frac{1}{2}mv_0^2(1 + \varepsilon)^2 - \mathcal{G} \frac{mM_T}{r_0}$$

L'énergie mécanique est donc légèrement supérieure au minimum d'énergie potentielle : on reste dans le cas d'un état lié mais la trajectoire devient elliptique.

On peut estimer le demi-grand axe de l'ellipse à l'aide de l'énergie mécanique. Par la première loi de Kepler, la Terre est à l'un des foyers de la trajectoire. On considère les

deux points de l'ellipse par lesquels le satellite passe lorsqu'il est le plus éloigné, appelé apogée et noté A , et le plus proche de la Terre, appelé périégée et noté P . En ces points, $\dot{r} = 0$ car on passe respectivement par un maximum et un minimum de la distance Terre-satellite. La vitesse est donc orthoradiale en ces points. Le moment cinétique du satellite calculé par rapport au centre de la Terre s'écrit donc

$$\vec{L}_T(A) = m\vec{T}\vec{A} \wedge \vec{v}_A = mr_A\vec{u}_r \wedge v_A\vec{u}_\theta = mr_Av_A\vec{u}_z$$

$$\text{et de même } \vec{L}_T(P) = mr_Pv_P\vec{u}_z$$

Ainsi, par conservation du moment cinétique, $r_Av_A = r_Pv_P$. Enfin, par conservation de l'énergie mécanique,

$$E_m = E_m(A) = E_m(P)$$

$$E_m = \frac{1}{2}mv_A^2 - \mathcal{G}\frac{mM_T}{r_A} \quad \text{et} \quad E_m = \frac{1}{2}mv_P^2 - \mathcal{G}\frac{mM_T}{r_P}$$

On peut alors obtenir une expression de l'énergie mécanique en calculant

$$r_A^2E_m(A) - r_P^2E_m(P) = \frac{1}{2}mr_A^2v_A^2 - \mathcal{G}r_AmM_T - \frac{1}{2}mr_P^2v_P^2 - \mathcal{G}r_PmM_T$$

$$\text{On en déduit } E_m = -\mathcal{G}mM_T \frac{r_A - r_P}{r_A^2 - r_P^2} = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{2a}$$

avec $a = \frac{r_A+r_P}{2}$ le demi-grand axe de l'ellipse.

En utilisant les deux expressions de l'énergie mécanique, sachant que l'énergie mécanique est conservée au cours du mouvement, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2(1+\varepsilon)^2 - \mathcal{G}\frac{mM_T}{r_0} &= -\mathcal{G}\frac{mM_T}{2a} \\ \Leftrightarrow -\frac{v_0^2(1+\varepsilon)^2}{\mathcal{G}M_T} + \frac{2}{r_0} &= \frac{1}{a} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{\mathcal{G}M_T r_0}{2\mathcal{G}M_T - r_0v_0^2(1+\varepsilon)^2} \end{aligned}$$

On peut simplifier cette expression en réexprimant la vitesse v_0 dans le cas du mouvement circulaire. En exprimant l'accélération dans le repère de Frenet, on obtient dans le référentiel géocentrique

$$m\frac{dv}{dt}\vec{T} + m\frac{v^2}{r_0}\vec{N} = \mathcal{G}\frac{mM_T}{r_0^2}$$

ce qui donne $\frac{dv}{dt} = 0$ soit un mouvement uniforme. La vitesse s'exprime donc par

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r_0}}$$

On en déduit l'expression du demi-grand axe

$$a = \frac{\mathcal{G}M_T r_0}{2\mathcal{G}M_T - \mathcal{G}M_T(1 + \varepsilon)^2}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{r_0}{2 - (1 + \varepsilon)^2}$$

Sachant que $\varepsilon \ll 1$, on peut simplifier cette expression

$$\frac{1}{2 - (1 + \varepsilon)^2} \approx \frac{1}{2 - (1 + 2\varepsilon)} \approx 1 + 2\varepsilon$$

$$\text{Ainsi } a \approx r_0(1 + 2\varepsilon)$$

Problèmes

| | | |
|-----|--|----|
| 4.1 | Expérience de Millikan | 46 |
| 4.2 | Tourbillon océanique | 50 |
| 4.3 | Distribution de l'eau d'un lac | 54 |

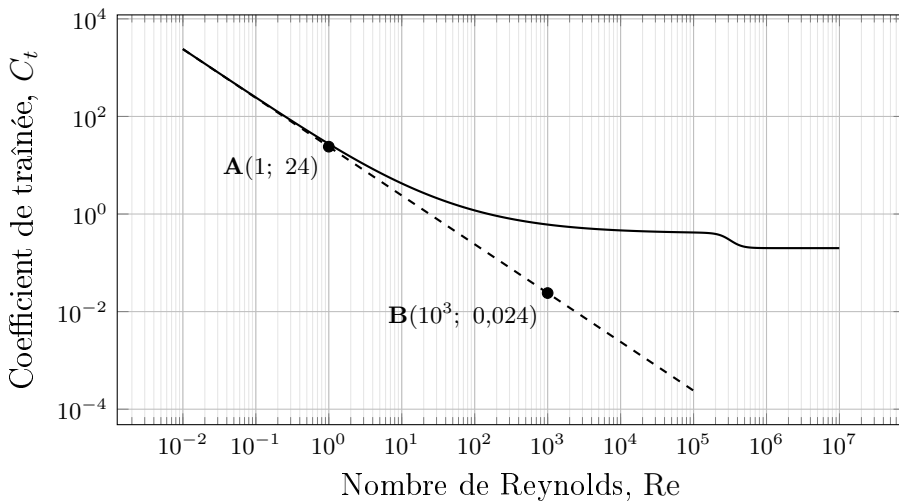
4.1 Expérience de Millikan

Dans l'expérience historique de Millikan, des gouttelettes d'huile de rayon r de masse volumique r_h préalablement chargée q chutent dans une enceinte pleine d'air de masse volumique r_a , de viscosité dynamique η , où règnent le champ de pesanteur et un champ électrique vertical uniforme et constant. On se propose de déterminer la charge q (*a priori* un multiple de e) par la mesure de la vitesse limite atteinte par une gouttelette après avoir précisé la forme de la force de traînée subie par la gouttelette

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}C_t\rho\pi r^2 v \vec{v}$$

où \vec{v} est la vitesse de la gouttelette.

On donne la courbe expérimentale (en échelle log-log) du coefficient de traînée C_t en fonction du nombre de Reynolds R_e .



1. Exprimer le nombre de Reynolds de la gouttelette en fonction de son rayon, de sa vitesse et d'autres constantes. Que peut-on en déduire selon sa valeur ?
2. Rappeler l'unité de η .
3. On modélise la courbe par une fonction affine pour $R_e < 1$: $\log(C_t) = a \cdot \log(R_e) + \log(b)$. A l'aide du graphe, déterminer a et b .
4. En déduire l'expression de \vec{F} en fonction de η , r , et v .
5. Déterminer l'expression de la vitesse limite v_{lim} de la gouttelette. En déduire la valeur numérique q sachant qu'on mesure $v_{lim} = 0,10 \text{ mm s}^{-1}$.

Données :

- $r = 1,0 \mu\text{m}$
- $\rho_a = 1,3 \text{ kg m}^{-3}$
- $\rho_h = 886 \text{ kg m}^{-3}$
- $E = 100 \text{ kV m}^{-1}$
- $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$
- $\eta = 1,0 \times 10^{-5} \text{ USI}$

Solution

1. Le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension qui s'exprime en fonction des ordres de grandeur des caractéristiques de l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle : la vitesse d'écoulement v , la taille de l'obstacle correspondant ici au diamètre $2r$ de la sphère en ordre de grandeur, de la masse volumique du fluide ρ et de sa viscosité dynamique η

$$\text{Re} = \frac{2\rho r v}{\eta}$$

On peut estimer le type d'écoulement en fonction de sa valeur. Typiquement,

- un écoulement à petit nombre de Reynolds pourra être considéré comme laminaire ;
- un écoulement à grand nombre de Reynolds pourra être considéré comme turbulent.

Rappel - Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds peut se définir à partir de la viscosité dynamique η ou de la viscosité cinématique ν

$$\text{Re} = \frac{\rho L V}{\eta} = \frac{L V}{\nu}$$

Il est défini à la base comme le rapport de l'accélération convective par le terme de diffusion visqueuse qui apparaissent dans l'équation de Navier-Stokes

$$\text{Re} = \frac{\|(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|}$$

2. L'unité de la viscosité dynamique est le poiseuille, noté Pl, qui correspond à des Pas.
3. On utilise les coordonnées des points A et B de la droite modélisant l'évolution de C_t à bas nombre de Reynolds. La pente s'écrit

$$a = \frac{\log C_{tB} - \log C_{tA}}{\log \text{Re}_B - \log \text{Re}_A} = \frac{\log 0,024 - \log 24}{\log 10^3 - \log 1} = -1$$

Ensuite, on retrouve l'ordonnée à l'origine en écrivant que

$$\log b = \log C_{tA} - a \log \text{Re}_A = \log 24$$

Ainsi, pour $\text{Re} < 1$,

$$\log C_t = -\log \text{Re} + \log 24 \Leftrightarrow C_t = \frac{24}{\text{Re}}$$

4. On en déduit donc que, dans cette gamme de nombre de Reynolds,

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} C_t \rho \pi r^2 v \vec{v} = -\frac{1}{2} \frac{24}{\text{Re}} \rho \pi r^2 v = -\frac{1}{2} \frac{24\eta}{2\rho r v} \rho \pi r^2 v \vec{v}$$

$$\text{On obtient } \vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v}$$

On retrouve l'expression de la force de traînée de Stokes appliquée typiquement dans les cas d'écoulements laminaires.

5. On étudie le mouvement d'une goutte d'huile assimilée à un point matériel de masse m et de charge q dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Le système est soumis aux forces suivantes :

— poids $\vec{P} = m \vec{g} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_h \vec{g}$

— force de traînée $\vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v}$

— poussée d'Archimède $\vec{H} = -m_{\text{fluide}} \vec{g} = -\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_a \vec{g}$

— force électrique $\vec{F}_{el} = q \vec{E}$

Le théorème de la résultante cinétique appliqué au mouvement d'une goutte d'huile en mouvement dans le référentiel du laboratoire galiléen permet d'écrire

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_h - \rho_a) \vec{g} - 6\pi\eta r \vec{v} + q \vec{E}$$

On suppose la vitesse limite atteinte, soit $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$. On en déduit

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_h - \rho_a)\vec{g} - 6\pi\eta r\vec{v}_{lim} + q\vec{E} = \vec{0}$$

Par projection sur l'axe vertical ascendant, on en déduit

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_a - \rho_h)g + 6\pi\eta r v_{lim} + qE &= 0 \\ \Leftrightarrow v_{lim} &= \frac{\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_h - \rho_a)g - qE}{6\pi\eta r}\end{aligned}$$

On en déduit également l'expression de la charge d'une goutte

$$q = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_h - \rho_e)g - 6\pi\eta r v_{lim}}{E}$$

$$\text{A.N. } q = 1,8 \times 10^{-19} \text{ C} \approx e$$

4.2 Tourbillon océanique

On étudie le mouvement de masses d'air dans l'atmosphère à proximité du pôle Nord. On se repérera à l'aide de l'axe Oz vertical ascendant, l'altitude $z = 0$ correspondant à l'interface océan-atmosphère où règne la pression P_0 . On notera ρ la masse volumique de l'air et \vec{v} le champ des vitesses.

1. On rappelle l'équation de Navier-Stokes

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} + \vec{X}$$

Donner la signification des différents termes.

2. On note $\overrightarrow{\Omega}_T = \Omega_T \vec{u}_z$ le vecteur rotation de la terre. Donner l'expression et la signification de \vec{X} .
3. On considère un champ de vitesse stationnaire de la forme $\vec{v}(M) = v_x(z)\vec{u}_x + v_y(z)\vec{u}_y$. On admettra par ailleurs que le champ de pression ne dépend que de z . Simplifier l'équation de Navier-Stokes. Déterminer le champ de pression.
4. Déterminer le système différentiel liant $v_x(z)$ et $v_y(z)$.
5. On définit la grandeur complexe $\underline{V} = v_x + jv_y$ avec $j^2 = -1$. De quelle équation différentielle est solution \underline{V} ? En déduire l'expression de v_x et v_y et justifier l'appellation « spirale d'Ekman ».

Solution

1. Voici la signification des termes apparaissant dans l'équation de Navier-Stokes :
 - $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v}$ correspond au champ eulérien d'accélération, avec $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ l'accélération locale et $\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v}$ l'accélération convective ;
 - $\rho \vec{g}$ représente la force volumique de pesanteur ;
 - $-\overrightarrow{\text{grad}} P$ l'équivalent volumique des forces de pression qui s'appliquent au sein du fluide ;
 - $\eta \Delta \vec{v}$ correspond à l'équivalent volumique des forces de viscosité qui s'appliquent au sein du fluide ;
 - \vec{X} correspondent à d'autres densités volumiques de force.

2. L'étude se fait dans le référentiel terrestre non galiléen en rotation uniforme dans le référentiel géocentrique galiléen. Ici, la densité volumique de force supplémentaire \vec{X} correspond aux force d'inertie dues au caractère non galiléen du référentiel d'étude. Considérons une particule de fluide de masse d^3m centrée en un point M du référentiel. On doit se retrouver donc avec deux composantes :

- force d'inertie d'entraînement $d^3\vec{f}_{ie} = d^3m\Omega^2\overrightarrow{HM}$ avec H le projeté orthogonal du point M sur l'axe de rotation
- force d'inertie de Coriolis $d^3\vec{f}_{ic} = -d^3m \times 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)$

Comme on se situe proche du pôle Nord de sorte à ce que l'on puisse considérer $\overrightarrow{HM} = \vec{0}$. Ainsi, on n'aura que la composante d'inertie de Coriolis dans la densité volumique de force. On peut finalement écrire

$$d^3\vec{f}_{ic} = \vec{X}d^3V = -d^3m \times 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

soit $\vec{X} = -2\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$

3. On se place en régime stationnaire. L'accélération locale $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ est donc nulle. En considérant un champ de vitesse de la forme $\vec{v}(M) = v_x(z)\vec{u}_x + v_y(z)\vec{u}_y$, l'accélération convective se réécrit

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right) (v_x(z)\vec{u}_x + v_y(z)\vec{u}_y) = \vec{0}$$

L'équation de Navier-Stokes se simplifie donc en

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} + \vec{X}$$

L'équivalent volumique des forces de pression s'écrit

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \frac{dP}{dz} \vec{u}_z$$

La force volumique de Coriolis est orthogonale à $\vec{\Omega}_T$, donc à \vec{u}_z . Il en est de même pour l'équivalent volumique des forces de viscosité dont la direction est la même que celle du champ des vitesses \vec{v} . La projection l'équation de Navier-Stokes selon l'axe Oz permet donc d'obtenir l'équation suivante

$$0 = -\rho g - \frac{dP}{dz}$$

On en déduit le champ de pression par intégration de cette équation, avec P_0 la pression en $z = 0$

$$P(z) = P_0 - \rho g z$$

On retrouve l'expression du champ de pression dans un fluide homogène en équilibre hydrostatique dans le champ de pesanteur.

6. La force volumique d'inertie de Coriolis se réécrit

$$\vec{X} = -2\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -2\rho(\Omega_T\vec{u}_z) \wedge (v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y) = -2\rho\Omega_T(v_x\vec{u}_y - v_y\vec{u}_x)$$

L'équivalent volumique des forces de viscosité s'écrit également

$$\eta\Delta\vec{v} = \eta\left(\frac{d^2v_x}{dz^2}\vec{u}_x + \frac{d^2v_y}{dz^2}\vec{u}_y\right)$$

Par projection de l'équation de Navier-Stokes selon les axes Ox et Oy , on obtient le système suivant

$$\begin{cases} 0 = \eta\frac{d^2v_x}{dz^2} + 2\rho\Omega_T v_y \\ 0 = \eta\frac{d^2v_y}{dz^2} - 2\rho\Omega_T v_x \end{cases}$$

7. On pose $\underline{V} = v_x + jv_y$. Si l'on calcule la dérivée seconde de cette grandeur, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d^2\underline{V}}{dz^2} &= \frac{d^2v_x}{dz^2} + j\frac{d^2v_y}{dz^2} = -2\frac{\rho\Omega_T}{\eta}v_y + 2j\frac{\rho\Omega_T}{\eta}v_x = 2j\frac{\rho\Omega_T}{\eta}(v_x + jv_y) = 2j\frac{\rho\Omega_T}{\eta}\underline{V} \\ &\Leftrightarrow \frac{d^2\underline{V}}{dz^2} - 2j\frac{\rho\Omega_T}{\eta}\underline{V} = 0 \end{aligned}$$

On obtient une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique associée s'écrit $r^2 - 2j\frac{\rho\Omega_T}{\eta} = 0$. Les racines de cette équation sont de la forme

$$r = \pm \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\rho\Omega_T}{\eta}}$$

On pose $h = \sqrt{\frac{2\eta}{\rho\Omega_T}}$. On en déduit que \underline{V} est de la forme

$$\underline{V}(z) = A \exp\left((1+j)\frac{z}{h}\right) + B \exp\left(-(1+j)\frac{z}{h}\right)$$

avec A et B deux constantes complexes. L'axe Oz est vertical ascendant, on travaille donc avec $z > 0$. La fonction ne pouvant diverger en $z \rightarrow +\infty$, on en déduit

$$\underline{V}(z) = B \exp\left(-(1+j)\frac{z}{h}\right)$$

Comme $v_x = \text{Re}(\underline{V})$ et $v_y = \text{Im}(\underline{V})$, on peut en déduire que le champ de vitesse \vec{v} est de la forme

$$\vec{v} = \left(A_1 \cos\left(\frac{z}{h}\right) \vec{u}_x + A_2 \sin\left(\frac{z}{h}\right) \vec{u}_y \right) \exp\left(-\frac{z}{h}\right)$$

avec A_1 et A_2 deux constantes réelles. Ainsi, le vecteur vitesse décrit une spirale convergeant vers l'axe à mesure que l'on gagne ou perde de l'altitude. L'écoulement est donc décrit par des lignes de courant en spirale de rayon décroissant avec z .