Oraux corrigés et commentés

Concours PSI-PSI*

Physique-Chimie

- X
- ENS
- CentraleSupélec
- Mines-Ponts
- CCINP

Sujets types

ellipses

Wenqi Shu-Quartier-dit-Maire
Thomas Lavigne

Les Épreuves

Les oraux du concours X-ENS

D'après la notice PSI 2023

Physique Ulm, Physique X et Physique ENS

Avec préparation : Variable **Durée :** 1 heure environ

Coeff. oral Physique : Variable

Structure : Physique Ulm : 1h de passage
Physique X : 50 min de passage
Physique ENS : 30 min préparation + 30 min passage

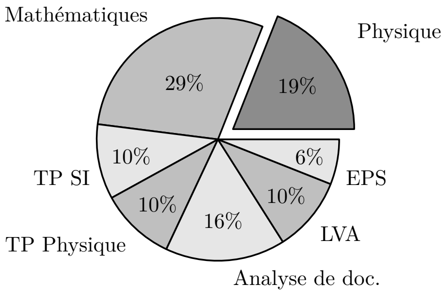
Le concours X-ENS regroupe l'École Polytechnique (ou l'X) ainsi que les écoles normales supérieures d'Ulm, de Paris-Saclay et de Rennes. Selon l'école, les épreuves de physique diffèrent, et chaque admissible doit s'attendre à une épreuve spécifique à sa préparation.

- Les candidats admissibles à Polytechnique passent une épreuve de physique de 50 minutes. Celle-ci consiste généralement en un exercice complexe et peu guidé, nécessitant toute l'attention du candidat durant la durée de l'épreuve.

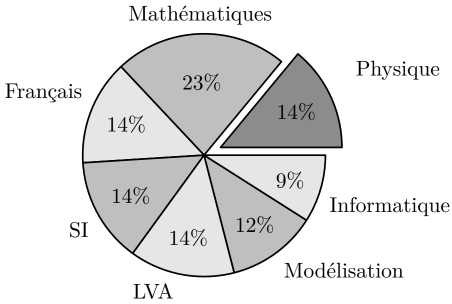
- À l'ENS Ulm, les candidats admissibles doivent se soumettre à un oral de physique d'une heure. L'examinateur laisse 5 minutes au candidat pour prendre en main le sujet. Ce type d'oral se distingue par un dialogue continu entre l'examinateur et le candidat, ce qui permet une certaine flexibilité par rapport aux autres oraux.

- Les candidats admissibles aux ENS Paris-Saclay et Rennes participent à une épreuve commune (organisée par l'ENS Paris-Saclay). Cette épreuve comprend 30 minutes de préparation et 30 minutes de passage devant le jury.

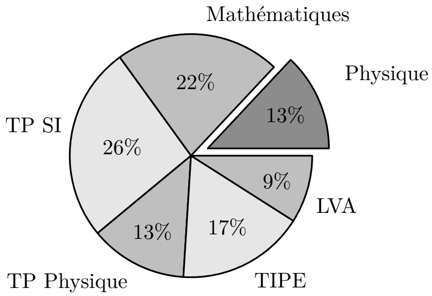
Épreuves écrites X



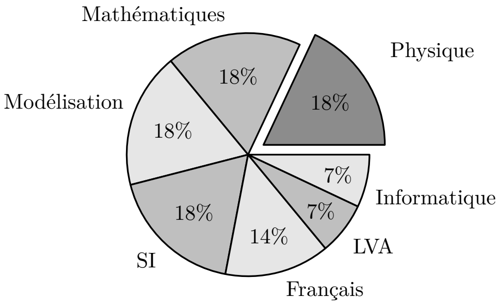
Épreuves orales X



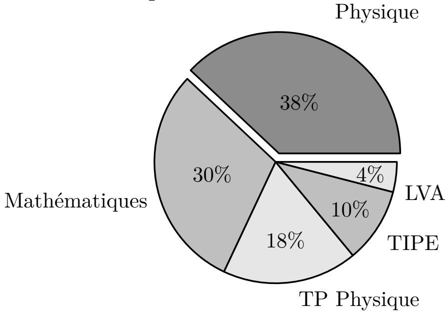
Épreuves écrites ENS PS/R



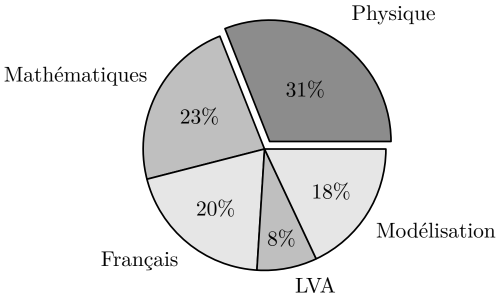
Épreuves orales ENS PS/R



Épreuves écrites ENS Ulm



Épreuves orales ENS Ulm



Attentes du jury

D'après les rapports de jury 2018-2023

Oral de Polytechnique

- Le sujet abordé couvre généralement plusieurs aspects du programme, soit par différentes questions, soit par plusieurs exercices distincts.
- Le jury évalue tant les connaissances que la capacité de raisonnement du candidat. Il est essentiel d'aller au-delà du programme et d'approfondir les notions étudiées.
- Prenez un moment de réflexion avant de commencer les calculs complexes. Ne cherchez pas à remplir le temps de manière artificielle : si vous finissez un exercice avant la fin du temps imparti, vous aurez un autre exercice à traiter.
- L'examinateur peut intervenir pour clarifier des points ou donner des pistes, mais il est crucial de maintenir votre autonomie et de ne pas demander d'approbation à chaque étape.
- Veillez à vérifier régulièrement l'homogénéité de vos résultats afin d'éviter la propagation d'erreurs.

Oral de l'ENS Ulm

- L'épreuve d'oral à l'ENS Ulm se déroule dans une dynamique de dialogue. L'objectif de l'examinateur est de vous entendre exposer clairement votre raisonnement, vos hypothèses et votre approche du problème.
- Si vous êtes confronté à un blocage, il est valorisé de proposer une piste que vous considérez pertinente, tout en expliquant les difficultés que vous rencontrez.
- Certains sujets sont volontairement éloignés du format traditionnel, et peuvent demander une approche plus créative. Par exemple : "Calculer l'aplatissement de la Terre."
- Bien que l'épreuve soit un échange, évitez de dire tout ce qui vous passe par la tête dans l'espoir de chercher l'approbation du jury. Cette attitude peut être contre-productive.

Oral des ENS Paris-Saclay et Rennes

- Pendant les 30 minutes de préparation, vous pourrez utiliser une calculatrice de type "Casio collège".
- Les examinateurs interrogent simultanément sur les mêmes sujets et harmonisent leurs notes à la fin de la journée. Ne pensez pas qu'un exercice plus simple vous garantit une meilleure note qu'un exercice plus complexe.
- Chaque exercice commence par une question de cours, généralement tirée du programme de 1ère année (PCSI) ou 2ème année (PSI-PSI*). Cette question a pour but d'évaluer vos connaissances théoriques.

- N'hésitez pas à expliquer ce que vous avez accompli pendant la préparation écrite, même si certaines parties des exercices n'ont pas été entièrement résolues. Par exemple, si vous n'avez pas pu démontrer un résultat, il est possible d'aborder la suite de l'exercice en précisant cette difficulté.
- Évitez de rentrer dans des détails excessifs lors des calculs ; l'examinateur interviendra si des précisions sont nécessaires. L'usage de théorèmes hors programme est déconseillé.
- Restez proactif et courtois. Si vous êtes bloqué, l'examinateur vous guidera en vous posant des questions. La présentation claire et soignée, avec des schémas si nécessaire, est également valorisée.
- Commentez systématiquement vos résultats, en indiquant par exemple les ordres de grandeur attendus, et vérifiez régulièrement l'homogénéité des unités et des dimensions.

Compétences et outils mathématiques

- Les erreurs de confusion entre dérivation et intégration sont fréquemment notées. Une maîtrise précise de ces deux concepts est essentielle.
- La maîtrise des formules trigonométriques et du passage en notation complexe est indispensable.
- Les projections de vecteurs sont souvent mal maîtrisées, entraînant des erreurs de signe qu'il convient de prévenir.
- Toujours vérifier les dimensions avant d'affirmer l'égalité de deux grandeurs physiques.
- Il est impératif de distinguer les vecteurs des scalaires. De même, un infinitésimal ne peut être égal à une grandeur macroscopique.
- Les dérivées partielles doivent être clairement différenciées des dérivées classiques, souvent appelées dérivées "droites".
- La rigueur est essentielle, en particulier pour les grandeurs vectorielles où les flèches doivent être systématiquement indiquées.
- Une bonne maîtrise des bases locales pour les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques est attendue.
- Lorsque vous devez justifier qu'un terme est négligeable devant un autre, assurez-vous de comparer des grandeurs de même dimension.

L'oral du concours Mines-Ponts

D'après les rapports de jury 2018-2023 et les notices PSI 2019-2023

Oral de physique Mines-Ponts

Préparation autorisée : OUI **Durée** : 1 heure

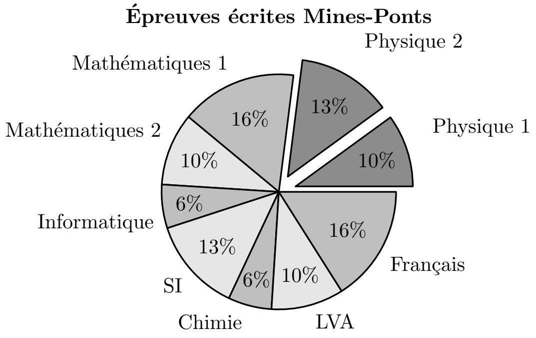
Coefficient oral Physique : 9

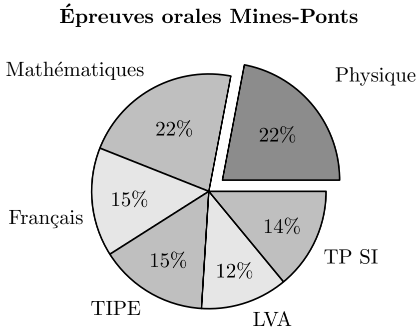
Structure : 15 min de préparation + 45 min de passage

Seuls les candidats admissibles au concours Mines-Ponts doivent passer l'oral de physique. La banque Mines-Télécom utilise les résultats de Mines-Ponts pour les candidats admissibles aux deux concours. Si vous êtes admissible à Mines-Télécom mais pas à Mines-Ponts, vous ne passerez pas d'oral de physique. En 2024, les épreuves ont couvert l'ensemble du programme de physique et de chimie des deux années de CPGE. Votre calculatrice personnelle est autorisée.

L'épreuve orale de physique du concours Mines-Ponts se divise en deux parties :

- La première partie consiste en 15 minutes de **préparation** sur table.
- La deuxième partie se déroule en **direct** au tableau, où l'examinateur interroge le candidat sur l'exercice proposé. Une question de cours peut également être posée.





Attentes du jury

D'après les rapports de jury 2017-2023

Remarques générales

- Avant votre entrée en salle, les modalités de l'épreuve orale vous seront rappelées.
- Il est important de garder en tête que l'objectif de tous les examinateurs, quel que soit le mode d'interrogation, est de **révéler le meilleur de vous-même**.
- Le programme de la **première année** de CPGE fait partie intégrante de l'évaluation, incluant des aspects expérimentaux vus en travaux pratiques.
- Les examinateurs savent que vous êtes des candidats de haut niveau. Leur objectif est de vous classer. Il est courant que l'examinateur intervienne pour demander des précisions, élargir le sujet, ou poser des questions supplémentaires. Ces interventions ne sont jamais malveillantes et font partie de l'évaluation. **Il est essentiel de les prendre en compte**.
- En cas d'erreur, réagissez rapidement aux remarques de l'examinateur, mais prenez le temps de **corriger vos erreurs de manière réfléchie**.
- L'épreuve doit se dérouler sous forme d'un **échange** avec l'examinateur. Une bonne communication est cruciale : n'oubliez pas que ce n'est pas un simple "exposé écrit" au tableau. Il est important de bien gérer l'espace au tableau et de ne pas effacer avant que l'examinateur ne vous y invite.
- Soyez **autonome** dans vos raisonnements, et ne demandez pas systématiquement une validation de votre travail par l'examinateur.

Outils mathématiques et calculs

- Même pour des calculs simples, soyez **rigoureux** et **détaillez les étapes**, en veillant à **vérifier l'homogénéité**. Les applications numériques sont importantes, mais vous devez être capable de les résoudre sans calculatrice.
- Lorsque vous obtenez un ordre de grandeur, **commentez-le** et assurez-vous que les résultats soient exprimés avec leurs **unités**.
- Faites attention à l'utilisation correcte des **grandeurs différentielles** (ex : δ, Δ, d).
- Les confusions entre **scalaire et vecteur** sont fréquentes et doivent être évitées.
- Pensez à l'**interprétation géométrique** des produits scalaires et vectoriels.
- Veillez à l'**homogénéité** même pour les vecteurs.

Compétences expérimentales

Les **compétences expérimentales** acquises lors des travaux pratiques (TP) de physique et de chimie sont importantes et exigées. Il est donc possible que l'examinateur vous interroge sur des manipulations effectuées au cours de vos deux années de CPGE. Quelques exemples relevés dans les rapports de jury sont :

- La compréhension des conditions expérimentales de propagation d'une onde dans un câble coaxial ou la mesure d'un facteur de qualité n'était pas toujours évidente.
- L'explication de la détection synchrone était parfois insuffisante.
- Les montages d'optique géométrique simples posaient problème.
- La maîtrise des conditions de choix d'un échantillonnage numérique pour le traitement du signal était jugée insuffisante.

Question de cours

- La question de cours peut être très générale ou, au contraire, très ciblée. Il est fortement recommandé de s'entraîner à cet exercice tout au long de l'année.
- L'objectif est de vérifier la solidité de vos connaissances, mais aussi de vous mettre en confiance avant de passer à la résolution des exercices. Il ne faut pas simplement réciter le cours, mais démontrer une **compréhension profonde**.
- La réponse doit être **structurée**. N'hésitez pas à annoncer un plan et à l'écrire sur un côté du tableau.
- Allez à l'essentiel : il n'est pas nécessaire d'être exhaustif. Il est souvent préférable de discuter des phénomènes que de détailler des calculs complexes. Donnez des exemples personnels ou des applications pratiques pour illustrer vos propos, et n'oubliez pas de mentionner des ordres de grandeur.
- Faites attention à **ne pas sortir du sujet** : si l'examinateur se rend compte que vous cherchez à gagner du temps, cela pourrait vous nuire, même s'il ne vous interrompt pas.

Exercices

- Il est recommandé de **présenter l'exercice** avant de commencer à le résoudre, soit par une phrase simple, soit par un schéma.
- Exposez clairement la **démarche** que vous allez suivre pour résoudre l'exercice.
- Si vous êtes amené à résoudre un exercice en direct, sans préparation, **prenez le temps de réfléchir** avant de commencer.

Les oraux du concours Centrale-Supélec

D'après la notice PSI 2023

Physique-Chimie 1 et Physique-Chimie 2

Préparation : NON / OUI **Durée** : 30 min / 1 h

Coefficient oral Physique : 12

Structure : Physique-Chimie 1 : 30 min de passage

Physique-Chimie 2 : 30 min de préparation + 30 min de passage

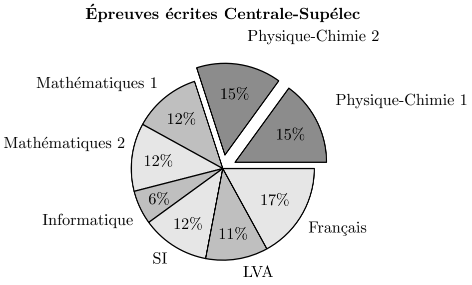
Le concours Centrale-Supélec comprend deux épreuves de Physique-Chimie, de poids équivalent, couvrant l'intégralité du programme de PCSI et de PSI, **y compris la chimie**.

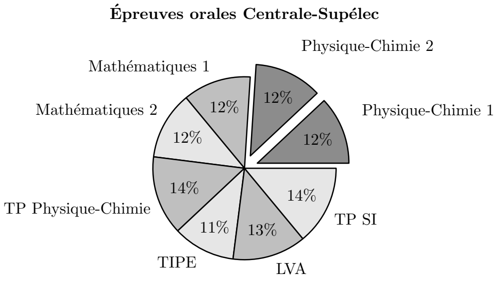
Physique-Chimie 1 (sans préparation)

Cette épreuve dure 30 min et comporte un unique exercice, progressif et découpé en plusieurs questions. La première question est systématiquement une question de cours ou une application directe. L'exercice évalue la **capacité d'analyse**, l'**autonomie** et la **rigueur** du candidat.

Physique-Chimie 2 (avec préparation)

L'épreuve est composée de 30 min de préparation suivies de 30 min de passage. L'exercice est plus ouvert, accompagné de **documents variés**, souvent numériques, et de codes informatiques en **Python**. Un ordinateur est mis à disposition du candidat, et l'utilisation de la calculatrice personnelle est autorisée.





Attentes du jury

D'après les rapports de jury 2018-2023

Avant l'épreuve, il est conseillé de préparer **sa convocation, sa carte d'identité et sa calculatrice** afin de débuter sereinement. Une fois l'épreuve terminée, le jury attend que le candidat **pose le sujet sur la table** et **efface le tableau** afin de ne pas retarder le passage suivant.

Physique-Chimie 1 (sans préparation)

- La **première question de cours** doit être traitée **rapidement**, sans perte de temps.
- Cette épreuve vise à évaluer les compétences *s'approprier* et *analyser et communiquer* en autonomie.
- Le sujet est un exercice unique (3 à 6 questions), débutant par une question de cours ou d'application directe, permettant de **mettre en valeur une bonne maîtrise des concepts et lois fondamentales**.
- La suite du sujet introduit une situation nouvelle où l'examinateur attend du candidat un **esprit critique** et un **savoir-faire scientifique**.
- L'**autonomie** et l'**initiative** sont des critères clés d'évaluation. Il est conseillé d'exposer clairement sa démarche pour éviter toute attente inutile.
- L'usage de **schémas explicatifs** est encouragé pour illustrer le raisonnement. Il est important de structurer ses écrits avec des **mots-clés** et d'**encadrer les résultats importants**.
- Depuis 2023, les **formulaires de physique et d'analyse vectorielle ont été supprimés**. Toutes les données utiles sont **fournies dans l'énoncé**. Il est souvent préférable de fournir un **ordre de grandeur estimé** du résultat, accompagné d'un commentaire pertinent.

Physique-Chimie 2 (avec préparation)

- Cette épreuve vise à évaluer les compétences *autonomie et initiative*, *appropriation des documents* et *communication*, plutôt que la restitution du cours.
- Le sujet comprend un énoncé d'une page et plusieurs questions, accompagnés de **documents annexes** (articles, vidéos, **scripts Python** à exécuter...).
- Environ **90 % des documents** sont des scripts Python. Certains doivent simplement être exécutés, tandis que d'autres nécessitent des modifications, par exemple ajuster des paramètres pour observer un effet physique ou écrire une fonction d'intégration numérique simple.
- Un sujet peut concerner plusieurs domaines du programme et peut même être **exclusivement axé sur la chimie**, qu'il ne faut donc pas négliger.
- Il est important de **présenter le sujet en quelques phrases**, en expliquant la problématique et l'intérêt des documents fournis. Cette introduction peut rapporter jusqu'à **3 points**.
- Il est fortement recommandé de **prendre des initiatives**, par exemple en réalisant des applications numériques pour vérifier des hypothèses.
- L'examinateur peut poser des questions pour aider à orienter la réflexion. Il est essentiel de **tenir compte de ses interventions**.

L'oral du concours CCINP

D'après les rapports de jury 2018-2023

Oral de Physique-Chimie CCINP

Préparation autorisée : OUI **Durée** : 55 min

Coefficient oral Physique : 8

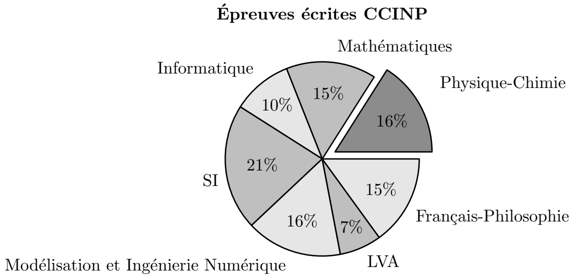
Structure : 25 min de préparation + 30 min de passage

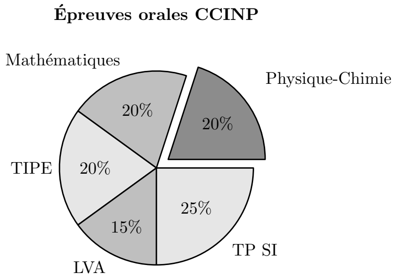
Le sujet comporte généralement deux parties, couvrant le programme des deux années de CPGE :

- Un premier sujet avec des questions détaillées et divers documents (courbes, schémas expérimentaux, articles, notices, etc.). Ce sujet est **proche du cours**, et l'examinateur n'intervient pas.

- Un **problème ouvert** comprenant généralement une seule question accompagnée de plusieurs documents. Dans ce cas, le candidat doit **établir une stratégie** et la présenter dès le début de la résolution.

Chaque exercice est généralement noté sur 10 points. Il est donc crucial de consacrer un temps équivalent à la résolution de chaque exercice. Vous êtes libre de l'ordre dans lequel vous résoudrez les exercices, mais il est recommandé de commencer par celui que vous maîtrisez le mieux.





Attentes du jury

D'après les rapports de jury 2018-2023

- L'oral est un moment où vous devez vous **valoriser**. Veillez à adopter une tenue correcte et à adopter une attitude digne d'un futur élève-ingénieur.
- Durant l'épreuve, il est important de rester autonome et de ne pas chercher l'approbation de l'examinateur.
- L'examinateur ne doit intervenir que si vous faites une erreur dans une question de cours. Une intervention non sollicitée sur le cours peut avoir des conséquences négatives sur l'évaluation finale.
- Il est attendu que les candidats présentent leurs résultats de manière claire et rigoureuse, tant à l'oral qu'au tableau.
- Pour les applications numériques, une simple **évaluation d'un ordre de grandeur**, réalisée avec les bonnes unités, est souvent suffisante.
- Pour résoudre le problème ouvert, l'examinateur s'attend à observer les étapes suivantes :
  1. **Appropriation du problème** : Identifier les grandeurs pertinentes et faire un schéma.
  2. **Analyse** : Exposer la stratégie de résolution choisie.
  3. **Résolution** : Mettre en équation le problème et vérifier l'homogénéité des résultats.
  4. **Validation** : Commenter les résultats en vous appuyant sur vos connaissances. Il est important de **critiquer les résultats obtenus** et d'apporter des observations sur leur validité.

Mécanique

Recommandations du jury

D'après les rapports de jury 2018-2023

Remarque

Votre premier réflexe, comme pour tout problème de mécanique, doit être de proposer un schéma résumant l'ensemble des paramètres importants, le référentiel et les forces en jeux.
L'utilisation de sigles pour évoquer les théorèmes est tolérée au tableau mais leurs noms complets sont attendus à l'oral.

Mécanique du solide

X-ENS

Le jury note que les candidats ne prennent pas suffisamment le temps de **préciser le système et le référentiel** dans lequel l'étude est menée avant d'appliquer les lois de la mécanique.
De plus, les candidats se lancent souvent quasi-instantanément dans l'application de la loi de la quantité de mouvement au détriment de la **méthode énergétique** souvent bien plus rapide.
Pour les problèmes de mécanique complexes où plusieurs forces interviennent, **un inventaire détaillé des forces ainsi qu'un schéma** les faisant apparaître est attendu des candidats.
Exprimer la vitesse pour en déduire la **troisième loi de Kepler et rappeler les expressions des énergies cinétique et mécanique** ont posé problème dans l'étude d'un mouvement circulaire uniforme dans un champ de force newtonnien.
Le jury conseille aux candidats de connaître une **expression intrinsèque de la force de rappel** exercée par un ressort.

Centrale Supélec

De manière générale, dans tout problème de mécanique, il faut **soigneusement définir le système** étudié et **le référentiel** avant d'effectuer le bilan des forces, et en ajoutant un **schéma** représentant clairement les forces en jeu.
La **mécanique céleste** a été mal traitée et les candidats ont buté sur le **lien entre énergie mécanique et nature de la trajectoire** dans les exercices à forces centrales. Il est primordial de connaître, ou savoir retrouver très rapidement à l'aide de la trajectoire circulaire, les relations de vitesses cosmiques, d'énergie mécanique sur une ellipse et la **troisième loi de Kepler.**
Dans le cas de problèmes avec des **ressorts**, n'oubliez pas que la position de l'extrémité libre n'est pas toujours égale à son allongement : il faut penser à prendre en compte la longueur à vide. Attention toutefois à ne **pas confondre longueur à vide et longueur à l'équilibre**.
Les **théorèmes énergétiques** sont aussi sous-employés: ils permettent pourtant de résoudre rapidement certains problèmes.

Mines Ponts

La mécanique, ainsi que les autres chapitres au programme de première année, est souvent laissée de côté dans les révisions, vous pourrez donc particulièrement vous distinguer en étant performant le jour de l'oral !

- N'attendez pas que l'examinateur l'exige pour faire un **schéma**. Cela peut grandement simplifier la résolution de l'exercice, et permet d'éviter d'oublier des forces, comme la **réaction du support**.
- La mécanique du point ne se limite pas à l'application de la seconde loi de Newton. Privilégier un **invariant du problème** (moment cinétique par rapport à un point fixe, moment cinétique par rapport à un axe fixe, énergie mécanique) permet souvent de retrouver efficacement la solution.
- Les forces de tension des ressorts sont toujours très mal exploitées.
- L'**étude énergétique** est mal utilisée, parfois même inconnue. Elle est pourtant très intéressante dans des exercices impliquant des **forces centrales conservatives**.
- L'étude des mouvements des particules chargées dans des champs électriques ou magnétiques est souvent extrêmement laborieuse voire impossible.
- Les méthodes d'étude de solides en rotation autour d'un axe sont mal appliquées.

Tout **esprit critique** et **validation/interprétation** des résultats est valorisé par le jury.

CCINP

Les recommandations sont encore et toujours les mêmes, mais on ne le répétera jamais assez : pour bien résoudre un exercice de mécanique, il faut **définir le système et le référentiel** avant d'appliquer les théorèmes, citer les hypothèses (et les vérifier), et représenter toutes les forces extérieures sur un **schéma** clair. De plus, il ne faut pas négliger les chapitres liés au programme de première année. Par exemple, un trop faible taux de réussite a été observé dans la détermination de la trajectoire d'un point ponctuel uniquement soumis à son poids.

⊕ Petit plus

La clarté du tableau est souvent à l'image de celle des connaissances, et toujours à l'image de celle de l'exposé : écrivez lisiblement, encadrez vos résultats et faites de beaux schémas!

Mécanique des fluides

X-ENS

Les exercices d'**hydrostatique** posent problème à de nombreux candidats.
Peu de candidats connaissent la signification du **facteur de Boltzmann** : il peut s'interpréter comme le facteur de proportionnalité reliant la température thermodynamique d'un système à son énergie au niveau microscopique.
Il y a encore des confusions entre **conditions initiales** et **conditions aux limites**.
Le mécanisme de propagation d'ondes de pression ou de vitesse n'est souvent que partiellement compris.

Remarque

Ce n'est pas parce que l'eau est considérée comme un fluide incompressible qu'il n'y a pas de variation de pression. Au contraire, les changements du régime d'écoulement d'un fluide contenu à l'intérieur d'une conduite entraînent souvent de brusques variations de pression, d'autant plus si la modification du débit a été brutale : c'est ce qu'on appelle le **coup de bélier**.

Centrale Supélec

Il convient de citer convenablement les **hypothèses** du théorème de Bernoulli avant de l'utiliser : on doit avoir un écoulement **incompressible** d'un fluide **parfait**. La quantité de Bernoulli se conserve sur une **ligne de courant**, en régime **stationnaire**, si l'on néglige les transferts d'énergie sous forme de **chaleur**.
Lors de l'utilisation des équations de **Navier-Stokes** ou d'**Euler** (souvent non attendues), les candidats proposent des équations non homogènes. Attention à toujours **vérifier l'homogénéité** de ce que vous proposez ! De plus, l'équation de **Navier-Stokes n'est plus au programme**, contrairement à la loi de **Hagen-Poiseuille**. De manière générale, évitez de citer des théorèmes hors programme, en particulier si vous n'êtes pas capables de les redémontrer parfaitement.
Il est essentiel de **réfléchir au sens "physique"** des grandeurs employées dans des calculs (longueur choisie dans le calcul du **nombre de Reynolds**) ou des **bilans macroscopiques**.

Mines Ponts

Comme pour Centrale-Supélec, les **conditions d'application** de la relation de **Bernoulli** ne sont pas systématiquement vérifiées. De plus, cette relation s'applique sur une ligne de courant qu'il est nécessaire de faire apparaître sur un **schéma**.
L'écoulement de **Hagen-Poiseuille** doit être traité par un bilan de quantité de mouvement. Pour rappel, l'équation de Navier-Stokes est un outil hors programme en PSI.
Les problèmes les plus récurrents sont:

- le calcul de la résultante des forces de pression, et la **poussée d'Archimède** ;
- les **ordres de grandeurs** des viscosités dynamiques (référez-vous aux ordres de grandeurs donnés en début de chapitre) ;
- les **bilans macroscopiques** de quantité de mouvement ou d'énergie (signification des pressions, présence de machines comme des pompes ou des turbines...) qui nécessitent **des schémas** définissants précisément les systèmes fermé et ouvert aux instants t et $t+\mathrm{d}t$.

CCINP

Les **bilans de puissance** sur les fluides en écoulement posent également des difficultés.

Pulsation d'une bulle immergée

X-ENS

Soit une bulle d'air maintenue à quelques dizaines de centimètres de profondeur dans un bac rempli d'eau. On admet que cette bulle est sphérique et son rayon est $R(t) = R_0 + \xi(t)$, où R_0 désigne son rayon à l'équilibre et $|\xi(t)| \ll R_0$. La pression dans l'eau est définie par $P(r,t) = P_0 + p(r,t)$, où P_0 est la pression atmosphérique et $p(r,t) \ll P_0$ est la surpression.
On suppose que le déplacement de l'eau autour de la bulle est de la forme $\overrightarrow{u} = u(r,t)\overrightarrow{u_r}$, et la vitesse de l'eau est $\overrightarrow{v} = \dfrac{\partial u}{\partial t}\overrightarrow{u_r}$.

Dans les calculs, on ne conservera que les termes d'ordre 1 : on pourra donc se placer en approximation linéaire.

1. Questions préliminaires

1.1. Sous quelle(s) hypothèse(s) peut-on négliger les variations hydrostatiques de pression dans l'eau autour de la bulle d'air ?

1.2. Sous quelle(s) hypothèse(s) peut-on considérer la pression de l'air comme uniforme à l'intérieur de la bulle ? On la notera $P_b(t) = P_0 + p_b(t)$.

2. On considère l'air comme un gaz parfait diatomique de coefficient $\gamma = 1{,}4$ et les transformations sont supposées adiabatiques réversibles. Montrer que $p_b(t) = -3\gamma P_0 \dfrac{\xi(t)}{R_0}$.

3. On assimile d'abord l'eau à un fluide parfait incompressible, de masse volumique ρ_0.

3.1. Que peut-on alors dire sur $\overrightarrow{v}$? À l'aide d'un bilan, montrer que le déplacement $u(r,t)$ est proportionnel à $\frac{1}{r^2}$ et donner son expression en fonction de r, R_0 et $\xi(t)$.

3.2. En déduire une expression de la surpression $p(r,t)$ dans l'eau.

3.3. Montrer que $\xi(t)$ vérifie une équation différentielle de type oscillateur harmonique dont on donnera l'expression de la pulsation propre ω_0, appelée pulsation de Minnaert. Donner un ordre de grandeur de f_0, la fréquence associée, pour $R_0 = 1\,\text{mm}$.

4. L'eau est à présent supposée compressible.

4.1. On va montrer que le déplacement vérifie l'équation suivante : $\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\xi = 0$. Que traduit le nouveau terme par rapport à l'équation précédente ?

4.2. En vous inspirant de l'équation de propagation du son, montrer qu'il existe une fonction f telle que la surpression dans l'eau $p(r,t)$ est de la forme :

$$p(r,t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{(r - R_0)}{c}\right)$$

où c est la célérité du son.

4.3. Donner l'expression de f en fonction de $R_0,\ \rho_0,\ \omega_0$ et ξ. En déduire l'expression de τ.

► **Correction :** Pulsation d'une bulle immergée

1. Questions préliminaires

1.1. Soit h la profondeur à laquelle se trouve le centre de la bulle dans l'eau. La pression hydrostatique de l'eau au voisinage de la bulle d'air varie entre $P(z = h + R(t))$ (pression en "bas" de la bulle) et $P(z = h - R(t))$ (pression en "haut" de la bulle). D'après l'équation fondamentale de l'hydrostatique :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,P(z) = \rho.\overrightarrow{g}$$

En supposant que l'eau est incompressible, de masse volumique ρ constante, on peut alors intégrer la relation précédente et on obtient :

$$\begin{cases} P(h+R(t)) = P_0 + \rho g(h+R(t)) \\ P(h-R(t)) = P_0 + \rho g(h-R(t)) \end{cases}$$

Afin de négliger les variations hydrostatiques de pression dans l'eau autour de la bulle d'air, il faut donc que $h \gg R(t) = R_0 + \xi(t)$. Sachant que $\xi \ll R_0$, cela revient à supposer que $\boxed{R_0 \ll h}$.

1.2. Les hypothèses suivantes permettent de considérer la pression de l'air comme uniforme à l'intérieur de la bulle :

- le rayon de la bulle est suffisamment petit pour pouvoir négliger les effets de la pesanteur,
- la viscosité de l'air est suffisamment faible pour permettre une égalisation rapide de la pression.

Remarque

Au cours de l'exercice, négliger un terme dans un calcul devra être justifié par l'appel à l'une de ces hypothèses !

2. On suppose les transformations adiabatiques réversibles et l'air est défini comme un gaz parfait. D'après la loi de Laplace : $P_b V^\gamma$ est constant dans la bulle, où $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Donc :

$$(P_0 + p_b(t))\left(\frac{4}{3}\pi\right)^\gamma (R_0 + \xi(t))^{3\gamma} = \text{Constante} = P_0\left(\frac{4}{3}\pi\right)^\gamma R_0^{3\gamma}$$

Par un développement limité ($\xi(t) \ll R_0$) :

$$P_0\cancel{\left(\frac{4}{3}\pi\right)^\gamma}\cancel{R_0^{3\gamma}} = (P_0 + p_b(t))\cancel{\left(\frac{4}{3}\pi\right)^\gamma}\cancel{R_0^{3\gamma}}\left(1 + 3\gamma\frac{\xi(t)}{R_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow P_0 = P_0 + p_b(t) + P_0 3\gamma\frac{\xi(t)}{R_0} + \underbrace{p_b(t)\xi(t)}_{\text{ordre 2}}\frac{3\gamma}{R_0}$$

Finalement : $\boxed{p_b(t) = -3\gamma P_0 \dfrac{\xi(t)}{R_0}}$

3. On suppose que l'eau est un fluide parfait incompressible, de masse volumique ρ_0 constante.

3.1. L'équation de continuité nous donne :

$$\rho_0 \operatorname{div} \vec{v} + \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Par conséquent, la vitesse est à flux conservatif.

On considère le système suivant : $\mathscr{S}$ ={pellicule d'eau comprise entre la sphère de rayon r et la sphère de rayon R_0}. Alors, la conservation du débit volumique donne :

$$\oiint \vec{v} . \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

D'où :

$$\cancel{4\pi} r^2 \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_r - \cancel{4\pi} R_0^2 \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{R_0} = 0$$

Or, par continuité de la composante normale de la vitesse à l'interface air/eau, on a :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{R_0} = v(R_0,t) = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}$$

On a alors :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_r = \frac{R_0^2}{r^2} \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{R_0} = \frac{R_0^2}{r^2} \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}$$

En intégrant :

$$u(r,t) = \xi(t) \frac{R_0^2}{r^2} + \text{cste, avec } u(R_0,t) = \xi(t).$$

On en déduit : $\boxed{u(r,t) = \xi(t) \dfrac{R_0^2}{r^2}}$. On retrouve bien la proportionnalité en $\frac{1}{r^2}$.

3.2. On considère l'équation d'Euler linéarisée :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p$$

On projette selon $\vec{u_r}$:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial r} \qquad \text{avec} \qquad u(r,t) = \xi(t) \frac{R_0^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = -\rho_0 \ddot{\xi}(t) \frac{R_0^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow p(r,t) = \rho_0 \frac{R_0^2}{r} \ddot{\xi}(t) + C(t)$$

Pour un rayon r tendant vers l'infini, on doit avoir $p(r,t) = 0$ à tout instant t dans l'eau (en supposant qu'on peut négliger les variations hydrostatiques de pression - notamment en considérant qu'on s'éloigne latéralement de la bulle). Par conséquent, $C(t) = 0$. Finalement, $\boxed{p(r,t) = \rho_0 \frac{R_0^2}{r} \ddot{\xi}(t)}$.

3.3. On applique le principe fondamental de la dynamique au volume élémentaire d'eau compris entre les rayons R_0 et $R_0 + \varepsilon$. Le bilan des forces nous donne :

- Le poids, de norme $\rho_0 V_\varepsilon g$ avec $V_\varepsilon = 4\pi R_0^2 \varepsilon$ et dirigé selon $\overrightarrow{g}$
- La force de pression exercée par l'air, de norme $P_b(t).4\pi R_0^2$ et dirigée selon $+\overrightarrow{u_r}$
- La force de pression exercée par l'eau, de norme $P(R_0+\varepsilon,t).4\pi(R_0+\varepsilon)^2$ et dirigée selon $-\overrightarrow{u_r}$

On en déduit :

$$\underbrace{\rho_0 4\pi R_0^2 \varepsilon}_{\to 0} \overrightarrow{g} + P_b(t).4\pi R_0^2 \overrightarrow{u_r} - P(R_0+\varepsilon,t).4\pi(R_0+\varepsilon)^2 \overrightarrow{u_r} = \underbrace{\rho_0 4\pi R_0^2 \varepsilon}_{\to 0} \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}$$

En faisant tendre ε vers 0 et en injectant les expressions trouvées précédemment, on obtient :

$$p(R_0,t) = p_b(t) \implies \rho_0 R_0 \ddot{\xi}(t) = \frac{-3\gamma P_0}{R_0} \xi(t)$$

On trouve bien une équation différentielle d'oscillateur harmonique $\boxed{\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0}$ avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_0 R_0^2}}}$.

En faisant l'application numérique, on obtient : $\boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 3\,\text{kHz}}$.

4. On suppose que l'eau n'est plus incompressible : on note alors $\rho(r,t)$ sa masse volumique.

4.1. On retrouve le cas précédent pour $\underline{\tau \to +\infty}$. Le nouveau terme traduit une dissipation d'énergie, due à la compressibilité du fluide.

4.2. On nous suggère de repartir de l'équation de propagation du son. On notera $\rho(r,t) = \rho_0 + \rho_1(r,t)$ la masse volumique de l'eau, avec $\rho_1 \ll \rho_0$. Dans l'approximation linéaire, on aura de plus : $|v| \ll c$. Enfin, on a, d'après l'énoncé : $p \ll P_0$. On obtient alors les équations linéarisées suivantes, avec χ_S la compressibilité isentropique de l'eau :

$$\begin{cases} \rho_1 = \rho_0 \chi_S p & (1) \\ \rho_0 \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p & (2) \\ \rho_0 \text{div} \overrightarrow{v} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0 & (3) \end{cases}$$

Question d'examinateur

Expliquez l'origine de chacune de ces équations.

(1) traduit le caractère isentropique des transformations, (2) est l'équation d'Euler linéarisée, (3) traduit la conservation de la masse.

En injectant (1) dans (3), on obtient :

$$\operatorname{div}\vec{v} + \chi_S \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \qquad (*)$$

Or, en appliquant la divergence à (2), on a :

$$\rho_0 \frac{\partial \operatorname{div}\vec{v}}{\partial t} = -\operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{grad}} p = -\Delta p$$

En injectant $(*)$, on obtient enfin :

$$\Delta p = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}}$$

On reconnaît l'équation d'onde de d'Alembert en pression.

En coordonnées sphériques, pour une fonction ne dépendant que de r, on a : $\Delta f = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right)}{\partial r}$.

Remarque

L'expression du gradient est à connaître dans tous les systèmes de coordonnées. Cependant, pour le rotationnel, la divergence et le laplacien, seules leur expression en coordonnées cartésiennes sont à connaître. Dans les autres systèmes de coordonnées, vous pouvez demander leur expression à l'examinateur.

On a donc :

$$\Delta p = \frac{1}{r^2}\left(2r\frac{\partial p}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}\right) = \frac{2}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\left(2\frac{\partial p}{\partial r} + r\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}\right)$$

Or on a également :

$$\frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(p + r\frac{\partial p}{\partial r}\right) = 2\frac{\partial p}{\partial r} + r\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = r.\Delta p$$

Finalement, l'équation de d'Alembert nous donne :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2}$$

La solution générale de cette équation est alors la somme de deux ondes progressives :

$$r\,p(r,t) = f\left(t - \frac{r-R_0}{c}\right) + \underbrace{g\left(t + \frac{r-R_0}{c}\right)}_{=0 \text{ car onde divergente}}$$

On trouve bien : $\boxed{p(r,t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r-R_0}{c}\right)}$

4.3. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la couche d'eau infiniment fine autour de la bulle, on aura toujours : $\forall t,\ p(R_0,t) = p_b(t)$. De plus, le modèle de l'air n'ayant pas changé, on aura toujours : $p_b(t) = -3\gamma P_0 \xi(t)$. Ainsi, en R_0, on a :

$$\forall t,\ \frac{1}{R_0} f(t) = -3\gamma P_0 \frac{\xi(t)}{R_0}$$

D'où : $f(t) = -3\gamma P_0 \xi(t)$.
D'autre part :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_0 R_0^2}} \implies 3\gamma P_0 = \rho_0 R_0^2 \omega_0^2$$

D'où $\boxed{f(t) = -\omega_0^2 \rho_0 R_0^2 \xi(t)}$.
À présent, considérons l'équation d'Euler linéarisée au voisinage de R_0. On a alors, en projetant sur $\overrightarrow{u_r}$:

$$\rho_0 \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

En reprenant l'expression de $p(r,t)$ en fonction de $f(t)$, on a :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r} \times \left(-\frac{1}{c}\right) f'\left(t - \frac{r-R_0}{c}\right) - \frac{1}{r^2} f\left(t - \frac{r-R_0}{c}\right)$$

En $r = R_0$, cela donne :

$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{R_0} = -\frac{1}{R_0 c} f'(t) - \frac{1}{R_0^2} f(t)$$

En injectant l'expression de $f(t)$, l'équation d'Euler linéarisée devient :

$$\rho_0 \ddot{\xi}(t) = -\left(\frac{\omega_0^2 \rho_0 R_0}{c} \dot{\xi}(t) + \omega_0^2 \rho_0 \xi(t)\right)$$

$$\ddot{\xi}(t) + \frac{\omega_0^2 R_0}{c} \dot{\xi}(t) + \omega_0^2 \xi(t) = 0$$

Ainsi $\boxed{\tau = \frac{c}{\omega_0^2 R_0}}$. c étant homogène à une vitesse, ω_0 à une pulsation et R_0 à une longueur, l'expression de τ est bien homogène à un temps.

Question d'examinateur

Comment peut-on retrouver l'équation de l'oscillateur harmonique, déterminée à la question 3 ?

Dans le cas où on considère que l'eau est incompressible, on a alors $\chi_S = 0$, ce qui donne $c \to +\infty$ puis $\tau \to +\infty$. Le terme en $1/\tau$ va alors disparaître, et on retrouvera l'équation de l'oscillateur harmonique.

La voile solaire

X-ENS

La lumière est à la fois le support d'une énergie mais aussi d'une quantité de mouvement (dualité onde / particule de la lumière). Lorsqu'elle est réfléchie par un miroir, elle exerce sur ce dernier une pression, dite pression de radiation. Sous incidence normale, cette pression est égale à deux fois la puissance reçue par unité de surface divisée par la vitesse de la lumière. C'est ainsi que les institutions telles que la NASA ou SpaceX s'intéressent à l'emploi de voiles solaires (aussi appelées photo-voiles) comme pour leurs projets respectifs NanoSail-D2 ou CubeSat. Le but de cet exercice est d'évaluer les performances d'engins spatiaux se déplaçant grâce à la pression de radiation de la lumière du soleil. Des données numériques utiles sont regroupées en fin d'exercice.

1. Vous travaillez sur le développement d'un engin spatial de masse m en orbite circulaire de rayon R autour d'un astre de masse M. Calculer la vitesse v de l'engin sur sa trajectoire. En déduire l'expression de son énergie mécanique E en fonction de G, la constante gravitationnelle universelle, M, m et R. Déterminer l'expression de la période T de l'orbite. Retrouver une loi de Kepler.

2. Votre engin est animé d'une force de poussée, orthoradiale, de norme F constante à partir d'un instant $t = 0$. Cette force est très faible devant l'attraction de l'astre, *i.e.,* bien que le rayon dépende du temps $R = R(t)$, on considère qu'au court d'une période la trajectoire reste quasi-circulaire et les expressions établies précédemment restent valables de façon instantanées. Donner le travail δW de la force F pour une durée $\mathrm{d}t << T$. En déduire la variation d'énergie du satellite puis donner $\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}$.

3. Combien de temps faut-il pour un engin spatial en orbite basse (altitude 100 km) autour de la Terre pour doubler son altitude avec $F = 0{,}006\,\mathrm{N}$?

4. Votre engin spatial se déplace grâce à la pression de radiation du Soleil sur ses voiles (un miroir très léger de $S = 600\,\mathrm{m}^2$. La masse de l'engin est d'environ $m = 100\,\mathrm{kg}$. Sachant que le soleil émet une puissance de $P_S = 3{,}9.010^{26}\mathrm{W}$, donner l'ordre de grandeur de F.

5. Imaginons désormais que l'on veuille concevoir un engin spatial allant de la Terre à Mars (masse m, surface des voiles S). Dans ces conditions, dès que l'engin est éloigné de la Terre, l'astre attracteur principal devient le soleil.
Calculer explicitement F lorsque l'engin est à une distance r du Soleil et que ses voiles sont éclairées sous incidence normale. De quelle nature est cette force ? Avec une force F radiale, pensez-vous que l'on peut aisément changer d'orbite (On pourra comparer F et la force gravitationnelle du Soleil) ?

6. On incline la voile solaire : le vecteur normal à la voile fait désormais un angle θ avec le rayon vecteur soleil/engin. Justifier l'apparition d'une force orthoradiale de la forme $F_\theta = F(\cos^2\theta)\sin\theta$ où F est l'expression trouvée à la question précédente. Pour quelle valeur de θ la force F_θ est-elle maximale ?

7. En vous inspirant de la démarche des questions 2 à 4, trouver comment varie $r = r(t)$ en fonction du temps sachant qu'au départ l'engin est en orbite autour de la Terre. Combien de temps faudrait-il pour aller sur Mars avec un tel engin sachant que Mars est à 230 millions de kilomètres du Soleil ? Application numérique pour votre engin spatial. Commentaire ? Refaire l'application numérique pour un engin dont on espère obtenir $F/m \approx 10^{-3}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Données numériques : $M_{Soleil} = 2\times 10^{30}\,\mathrm{kg}$ $\quad M_{Terre} = 6\times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
$D_{Terre-Soleil} \simeq 1{,}5\times 10^{11}\,\mathrm{m}$ $\quad R_{Terre} = 6{,}4\times 10^{6}\,\mathrm{m}$

▶ **Correction :** La voile solaire

Astuce

Dans un problème d'orbite circulaire, commencer par un schéma avec les forces en jeu et le repère $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$. Cela facilite la compréhension et évite les erreurs de signe.

1. D'après le principe fondamental de la dynamique, dans le repère $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$, appliqué au système $\mathscr{S}$ ={Satellite}, on a $m\overrightarrow{a} = \Sigma\overrightarrow{F}$ où $\overrightarrow{F}$ est la somme des forces mécaniques extérieures s'exerçant sur le système. Or l'engin spatial n'est soumis qu'à la force gravitationnelle :

$$\overrightarrow{F} = -\frac{GMm}{R^2}\overrightarrow{u_r}$$

Un mouvement circulaire impose une accélération centripète radiale. Ainsi $\overrightarrow{a} = \frac{-V^2}{R}\overrightarrow{u_r}$. En injectant dans l'équation précédente :

$$m\frac{v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$$
$$\Longrightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

Maintenant que nous connaissons l'expression de la vitesse, nous pouvons introduire l'énergie mécanique du système telle que :

$$\begin{aligned} E_m &= E_p + E_c \\ &= -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv^2, \;\; \overrightarrow{F} \text{ dérivant d'un potentiel} \end{aligned}$$

Question d'examinateur

Que vaut l'énergie potentielle gravitationnelle à l'infini ?

Elle est nulle, ce qui motive le signe négatif dans $E_p = -GMm/R$.

On trouve

$$\boxed{E_m = -E_c = -\frac{GMm}{2R}}$$

⊕ Petit plus

L'énergie est négative on parle d'orbite liée.

Au cours d'une période T l'engin parcourt la distance $2\pi R$. La période vaut donc $T = \frac{2\pi R}{v}$. Ainsi, $\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} R^{3/2}}$.

Il s'ensuit : $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3$. On retrouve la troisième loi de Kepler $\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \text{constante} = \frac{4\pi^2}{GM}}$.

2. Par définition la variation d'énergie correspond à la puissance des forces non conservatives :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t}$$

Question d'examinateur

Pourquoi peut-on appliquer une conservation locale de la forme de l'orbite ?

Parce que la poussée est faible et le mouvement reste quasi circulaire sur de courtes durées.

D'où $\boxed{\delta W = \mathrm{d}E_m = \frac{1}{2} GMm \frac{\mathrm{d}R}{R^2}}$.

De plus, la force F est orthoradiale. Elle travaille au cours d'un déplacement tangent de norme $v\mathrm{d}t$:

$$\delta w = F \cdot v\mathrm{d}t = F\sqrt{\frac{GM}{R}}\mathrm{d}t$$

Or, $E_m = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{R}$ donc :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \frac{GMm}{2R^2}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$$

Piège

Attention, on ne fait pas $\delta W = F\mathrm{d}R$ car F est orthoradiale.

D'où :

$$\frac{GmM}{2R^2}\mathrm{d}R = F\sqrt{\frac{GM}{R}}\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = R^{3/2}\frac{2F}{m\sqrt{GM}}}$$

3. De ce qui précède :

$$\frac{\mathrm{d}R}{R^{3/2}} = \frac{2F}{m\sqrt{GM}}\mathrm{d}t = \text{constante}$$

On sépare les variables, on intègre et on trouve

$$-2\left[\frac{1}{\sqrt{R}}\right]_{R_t+R_0}^{R_t+2R_0} = \frac{2F}{m\sqrt{GM}}\Delta t$$

Donc, $\boxed{\Delta t = \frac{m\sqrt{GM}}{F}\left(\frac{1}{\sqrt{R_t+2R_0}} - \frac{1}{\sqrt{R_t+R_0}}\right)}$

Application numérique :

- $F = 0{,}006\,\mathrm{N}, \quad m = 100\,\mathrm{kg}$
- $R_0 = R_{\text{Terre}} + 100\times10^3\,\mathrm{m},\ R_f = R_0 + 100\times10^3\,\mathrm{m}$

On trouve :

$$\boxed{t \approx 11,5\,\text{jours}}$$

4. L'engin est propulsé uniquement par la pression de radiation de la lumière solaire. On considère une voile plane parfaitement réfléchissante de surface $S = 600\,\mathrm{m}^2$ et de masse totale $m = 100\,\mathrm{kg}$. On nous donne la puissance totale émise par le Soleil : $P_S = 3{,}9\times10^{26}\,\mathrm{W}$.

Étape 1 : Évaluer la puissance reçue par unité de surface à distance r du Soleil (flux solaire).
La puissance surfacique reçue à une distance r du Soleil est :

$$I(r) = \frac{P_S}{4\pi r^2}$$

À distance $r = D_{\text{Terre-Soleil}} = 1{,}5\times10^{11}\,\mathrm{m}$:

$$I_{\text{Terre}} = \frac{3.9\times10^{26}}{4\pi(1.5\times10^{11})^2} \approx 1370\,\mathrm{W/m^2}$$

⊕ Petit plus

Ce résultat est bien connu sous le nom de *constante solaire*.

Étape 2 : Calcul de la pression de radiation sous incidence normale.

Piège

La pression est doublée pour un miroir (réflexion), attention à ne pas oublier le facteur 2 dans P_{rad}. Ne pas confondre la surface S de la voile avec une section efficace projetée – ici c'est une incidence normale, donc toute la surface est exposée.

Pour une surface parfaitement réfléchissante, la pression de radiation est :

$$P_{\text{rad}} = \frac{2I}{c}$$

où c est la vitesse de la lumière.

Étape 3 : Force exercée sur la voile.
La force de pression de radiation est donnée par :

$$F = P_{\text{rad}} \times S = \frac{2IS}{c}$$

En utilisant l'expression du flux :

$$F = \frac{2P_S S}{4\pi c r^2}$$

Finalement :

$$\boxed{F = \frac{P_S S}{2\pi c r^2}}$$

Application numérique : Avec $S = 600\,\text{m}^2$, $r = 1{,}5 \times 10^{11}$ m, $c = 3.0 \times 10^8$ m $\cdot$ s^{-1}, on a :

$$F = \frac{3.9 \times 10^{26} \times 600}{2\pi \times 3.0 \times 10^8 \times (1.5 \times 10^{11})^2} \approx \boxed{0{,}0055\,\text{N}}$$

Remarque

Cette force peut paraître infime, mais elle agit en permanence sans consommer de carburant.

5. De ce qui précède, $\boxed{F = \frac{P_S S}{2\pi c}\frac{1}{r^2}}$ C'est une force centrale Newtonnienne répulsive.

Remarque

Cette force est inversement proportionnelle au carré de la distance, ce qui la rend comparable à la gravitation en forme, mais de signe opposé.

De plus, en considérant F_g la force gravitationnelle,

$$\frac{F_g}{F} = \frac{4c\pi GMm}{2P_S S} = 107,5 \gg 1$$

Par conséquent, la force globale reste attractive. Comme R varie indépendamment du temps, il est donc impossible de changer d'orbite dans ces conditions.

Piège

Ne pas penser que la force de radiation est négligeable parce qu'elle est faible : elle agit en continu et sans besoin d'énergie embarquée.

Question d'examinateur

Pourquoi une force purement radiale ne permet-elle pas de modifier facilement l'orbite ?

Une force radiale ne modifie pas le moment cinétique, donc l'orbite reste circulaire ou reste dans le même plan. Pour modifier l'orbite de manière efficace (p.ex. l'éloignement progressif), il faut une composante orthoradiale qui change l'énergie et le moment cinétique.

6. Considérons maintenant l'angle θ formé entre la normale et le vecteur $\overrightarrow{u_r}$. La surface éclairée vaut $S_e = S\cos\theta$. De même, la puissance radiale effective vaut $P_{rad,eff} = P_{rad}\cos\theta$.
Puis, $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{n} = P_{rad,eff}S_e\overrightarrow{n}$, avec $\overrightarrow{n} = \cos\theta\overrightarrow{u_r} + \sin\theta\overrightarrow{u_\theta}$. Donc, $F = P_{rad}S\cos^2\theta(\cos\theta\overrightarrow{u_r} + \sin\theta\overrightarrow{u_\theta})$.
On trouve bien $\boxed{F_\theta = F\cos^2\theta\sin\theta}$, $F = P_{rad}S$.

Astuce

Décomposer la force dans la base locale polaire est une méthode très utile dès qu'une direction privilégiée est présente, ici la normale à la voile.

Pour trouver le maximum, on cherche l'angle tel que la dérivée de F_θ s'annule.

$$\frac{dF_\theta}{d\theta} = F[-2\sin^2\theta\cos\theta + \cos^3\theta]$$

L'expression s'annule si $\sin^2\theta = \frac{\cos^2\theta}{2}$, puis $\sin\theta = \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}$. Ainsi $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc la force est maximale pour : $\boxed{\theta \approx 35^\circ}$.

Remarque

L'angle d'incidence optimal maximise la composante orthoradiale de la force, ce qui permet à l'engin de gagner de l'énergie orbitale.

7. Soit $F = \frac{P_S S \cos^2\theta \sin\theta}{2\pi c r^2}$. D'après la question 2, $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = Fv$. Puis,

$$\frac{GMm}{2r^2}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \frac{P_S S \cos^2\theta \sin\theta}{2\pi c r^2}\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\sqrt{r}\mathrm{d}R = \frac{P_S S \cos^2\theta \sin\theta}{\pi c m \sqrt{GM}}\mathrm{d}t$$

En intégrant,

$$\boxed{[r^{3/2}]_0^t = \frac{3}{2}\frac{P_S S \cos^2\theta \sin\theta}{\pi c m \sqrt{GM}} t}$$

D'où,

$$\boxed{t = \frac{2\pi c m \sqrt{GM}}{3 P_S S \cos^2\theta \sin\theta}(r(t)^{3/2} - r_0^{3/2}) \approx 13,3 \text{ ans}}$$

Cette durée est particulièrement longue, on pourrait espérer un temps plus court. On avait $\frac{F}{m} = \frac{0.0055}{100} = 5{,}5 \times 10^{-5}\,\mathrm{N \cdot kg^{-1}}$. Pour obtenir le ratio souhaité il faut considérer un facteur de 18,2. Finalement, $\boxed{t' = \frac{t}{18,2} \approx 267 \text{ jours} \approx 8,8\,\text{mois}}$.

Question d'examinateur

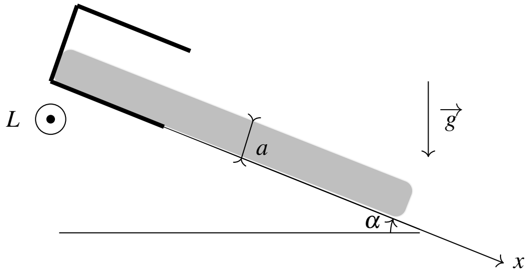
Pourquoi ne peut-on pas négliger la variation de F avec r ?

Parce que la pression de radiation décroît comme $1/r^2$. Lorsque l'engin s'éloigne du Soleil, la poussée diminue, ralentissant son gain d'énergie. Une approximation constante est valide sur de faibles variations de r uniquement.

Chariot ramasse-neige

X-ENS

Une avalanche a récemment eu lieu. Les équipes de secours ont confirmé l'absence de victimes et vous ont contacté afin de remettre en état les pistes. Vous avez atteint, avec votre chariot ramasse neige, le haut de la dite piste. Le chariot est ouvert sur sa face avant, de largeur L, dévale une pente d'angle α et ramasse une épaisseur a de neige qui s'immobilise aussitôt dans le chariot. On néglige les frottements du chariot sur la piste de neige. On appelle μ la masse volumique de neige.



1. Avant d'entamer votre descente, le chariot est vide en $x = 0$ avec une masse m_0. Vous vous lancez, en roue libre, sans vitesse initiale. Écrire grâce à un judicieux bilan, l'équation du mouvement du chariot. Interpréter. En déduire :

$$\left(g\sin\alpha - \frac{dv}{dt}\right)\left(g\sin\alpha - 3\frac{dv}{dt}\right) = v\frac{d^2v}{dt^2}$$

2. Analyser qualitativement le mouvement :

- aux temps courts, quelle est l'expression de la vitesse ?
- aux temps longs, quel est le comportement asymptotique du système?

3. Faire le bilan énergétique du chariot et commenter l'évolution de l'énergie mécanique. Quelle est la puissance des forces intérieures ?

▶ **Correction :** Chariot ramasse-neige

1. Pensez à commencer par refaire un schéma précisant les forces et le choix du système.

Astuce

On choisit comme système $\mathscr{S}(t)$ le chariot et la neige qu'il contient à l'instant t.

À l'instant t, le système a une masse $m(t)$ et une vitesse $v(t)$. À $t+dt$, une masse $\mathrm{d}m = \mu Lav(t)\,\mathrm{d}t$ de neige est ajoutée, immobile dans le référentiel terrestre.

$$\begin{aligned} m(t+dt) &= m(t) + \mathrm{d}m \\ &= m(t) + \mu Lav(t)\,dt \end{aligned}$$

Le bilan de quantité de mouvement donne (la neige étant immobile) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[m(t)v(t)\right] &= m(t)\frac{dv}{dt} + v(t)\frac{dm}{dt} \\ &= m(t)\frac{dv}{dt} + v(t)\mu Lav(t) \end{aligned}$$

Lors du bilan des forces, on identifie le poids, $\overrightarrow{F_g} = m(t)\overrightarrow{g}$, et la réaction du sol qui compense la composante normale du poids. Ainsi, en appliquant le principe fondamental de la dynamique à $\mathscr{S}$ selon la direction $\overrightarrow{x}$:

$$\begin{aligned} \sum F_{\text{ext}\to\mathscr{S}} &= m(t)g\sin\alpha \\ \Rightarrow m(t)\frac{dv}{dt} + v(t)\mu Lav(t) &= m(t)g\sin\alpha \end{aligned}$$

Piège

Il ne faut pas considérer la neige ramassée comme exerçant une force extérieure ! Elle s'ajoute au système.

Soit :

$$m(t)\frac{dv}{dt} = m(t)g\sin\alpha - \mu Lav^2(t)$$

Remarque

L'accélération est freinée par l'accumulation de masse, bien que la neige soit immobile. C'est semblable à une force de traînée.

En dérivant l'équation (7) et en regroupant les termes on trouve :

$$\frac{dm}{dt}\left(g\sin\alpha-\frac{dv}{dt}\right)+m(t)\left(-\frac{d^2v}{dt^2}\right)=La\mu 2v\frac{dv}{dt}$$

D'où :

$$\boxed{\left(g\sin\alpha-\frac{dv}{dt}\right)\left(g\sin\alpha-3\frac{dv}{dt}\right)=v\frac{d^2v}{dt^2}}$$

2. Aux temps très courts :
Au début, la masse de neige accumulée est négligeable. Le système est quasi à masse constante.

$$m(t)\approx m_0 \Rightarrow \frac{dv}{dt}\approx g\sin\alpha$$
$$\Rightarrow \boxed{v(t)\approx g\sin\alpha\, t}$$

Remarque

On retrouve une phase d'accélération uniforme.

Aux temps longs :
Le système ralentit de ce qui précède (l'accélération ralentit). Il existe donc une vitesse limite v_∞ telle que :

$$\frac{dv}{dt}\to 0,\quad \frac{d^2v}{dt^2}\to 0 \Rightarrow \mu La v_\infty^2 = m(t) g\sin\alpha$$

Cependant, l'accumulation de masse constante ($m(t)\to\infty$) impose $\boxed{v_\infty\to 0}$.

Question d'examinateur

Pourquoi la vitesse tend-elle vers 0 alors que le système est en descente ?

L'inertie croissante (masse qui augmente indéfiniment) finit par "absorber" toute l'énergie gravitationnelle, réduisant l'accélération.

3. On note $E_m(t)=\frac{1}{2}m(t)v^2(t)+m(t)gx(t)\sin\alpha$. En dérivant :

$$\frac{dE_m}{dt}=\frac{1}{2}v^2\frac{dm}{dt}+mv\frac{dv}{dt}+g\sin\alpha\left(v\frac{dm}{dt}+m\frac{dx}{dt}\right)\neq 0$$

Mais en réinjectant l'équation de la dynamique, on trouve que l'énergie mécanique n'est pas conservée.

Remarque

Les forces intérieures (liées à l'intégration de la neige dans le système) modifient l'énergie mécanique. En effet, la neige arrivant sans vitesse, il faut lui communiquer une énergie cinétique : cette énergie est "perdue" pour le chariot.

La puissance des forces intérieures (liées à l'ajout de masse) est :

$$\boxed{\mathscr{P}_{\text{int}} = -\frac{1}{2}\mu L a v^3}$$

Question d'examinateur

Comment peut-on interpréter cette puissance intérieure négative ?

Elle représente l'énergie à fournir pour "immobiliser" la neige dans le chariot, donc une perte.

Chute d’une barre en contact ponctuel

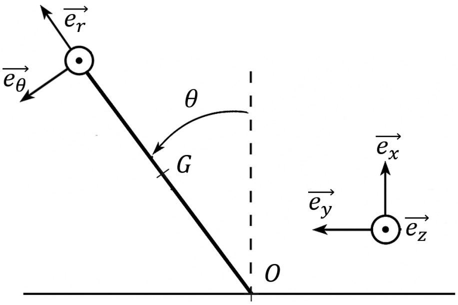
X-ENS

Une barre homogène de masse m et de longueur $2l$ est initialement verticale, posée par une extrémité sur un plan horizontal. Elle est très légèrement écartée de la verticale et commence à tomber sous l’effet de la pesanteur. On suppose que l’extrémité inférieure reste toujours en contact ponctuel avec le sol. Le coefficient de frottement statique entre la barre et le sol est noté f.

1. Déterminer l’angle θ par rapport à la verticale à partir duquel la barre commence à glisser.
INDICATION : Moment d’inertie de la barre par rapport à l’une de ses extrémités : $J = \frac{4}{3}ml^2$.

► **Correction :** Chute d'une barre en contact ponctuel

1. On pose θ l'angle entre la barre et la verticale. On note O le point de contact entre la barre et le sol, qui est fixe tant que la barre ne glisse pas, et on note G le centre de gravité de la barre.



Remarque

Dans les exercices de mécanique, choisissez bien votre paramétrage, afin que les angles représentés sur le schéma soient tous positifs et que les systèmes de coordonnées soient cohérents entre eux (ici, cartésiennes et cylindriques).

On effectue un bilan des forces:

- le poids $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e_x}$, appliqué en G
- la réaction du sol $\overrightarrow{R} = N\overrightarrow{e_x} + T\overrightarrow{e_y}$ (normale et tangente), appliquée en O.

On se place dans la situation où la barre n'a pas encore glissé. Le point O est donc fixe, et on a : $\overrightarrow{OG} = l\,\overrightarrow{e_r} = l\cos\theta\,\overrightarrow{e_x} + l\sin\theta\,\overrightarrow{e_y}$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'angle limite θ à partir duquel la barre glisse, i.e. lorsque : $|T| > fN$. Déterminons T et N en fonction de θ.

■ On applique le théorème du moment cinétique en O, projeté sur $\overrightarrow{e_z}$, à la barre dans le référentiel du sol supposé galiléen :

$$\frac{d\overrightarrow{L}_O}{dt} = \mathscr{M}_O(\overrightarrow{P}) + \mathscr{M}_O(\overrightarrow{R})$$

Or :

$$\mathscr{M}_O(\overrightarrow{R}) = \overrightarrow{0} \quad \text{car } \overrightarrow{R} \text{ s'applique en } O$$
$$\mathscr{M}_O(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{P} = -(l\cos\theta\,\overrightarrow{e_x} + l\sin\theta\,\overrightarrow{e_y}) \wedge mg\overrightarrow{e_x} = mg \cdot l \cdot \sin\theta\,\overrightarrow{e_z}$$
$$\frac{d\overrightarrow{L}_O}{dt} = J_O\ddot{\theta} \quad \text{avec } J_O = \frac{4}{3}ml^2$$

D'où : $mgl\sin\theta = \frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta}$.

Astuce

On commence toujours par un bilan des forces et un choix judicieux du point pour appliquer le théorème du moment cinétique. Le point O est judicieux ici car la réaction inconnue s'exerçant en O, son moment est nul.

On obtient donc :

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{4l}\sin\theta$$

En le multipliant par $\dot{\theta}$ puis en l'intégrant entre l'instant initial et un instant t quelconque, on obtient :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{4l}(\underbrace{\cos(\theta_0)}_{1 \text{ car } \theta_0 \simeq 0} - \cos\theta)$$

Ainsi, on obtient deux relations qui permettent d'exprimer $\ddot{\theta}$ et $\dot{\theta}$ uniquement en fonction de θ.

■ Analysons maintenant la condition de glissement à partir de la dynamique du centre d'inertie G. En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel du sol supposé galiléen, projeté sur $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$, on obtient :

$$m\overrightarrow{a_G}.\overrightarrow{e_x} = N - mg \quad (1)$$
$$m\overrightarrow{a_G}.\overrightarrow{e_y} = T \quad (2)$$

On utilise les composantes de l'accélération du centre d'inertie G :

$$\overrightarrow{a_G} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_G}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(l\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}\right)}{\mathrm{d}t} = -l\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + l\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

Puis on projette sur le repère cartésien, sachant que $\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_y}$:

$$\overrightarrow{a_G}.\overrightarrow{e_x} = -l\dot{\theta}^2\cos\theta - l\ddot{\theta}\sin\theta$$
$$\overrightarrow{a_G}.\overrightarrow{e_y} = -l\dot{\theta}^2\sin\theta + l\ddot{\theta}\cos\theta$$

Remplaçons $\overrightarrow{a_G}.\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{a_G}.\overrightarrow{e_y}$ dans les équations (1) et (2) :

$$-ml\left(\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta\right) = N - mg$$
$$-ml\left(\dot{\theta}^2\sin\theta - \ddot{\theta}\cos\theta\right) = T$$

On peut remplacer $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ par leurs expressions en θ, et on obtient :

$$N = -ml\left(\frac{3g}{2l}(1-\cos\theta)\cos\theta + \frac{3g}{4l}\sin^2\theta\right) + mg \quad (1')$$
$$T = -ml\left(\frac{3g}{2l}(1-\cos\theta)\sin\theta - \frac{3g}{4l}\sin\theta\,\cos\theta\right) \quad (2')$$

On simplifie d'abord l'équation (1') :

$$
\begin{aligned}
N &= mg - m\cancel{l}.\frac{3g}{4\cancel{l}}\left(2\cos\theta - 2\cos^2\theta + \underbrace{\sin^2\theta}_{1-\cos^2\theta}\right) \\
&= mg\left(1 - \frac{3}{4}\left(2\cos\theta - 3\cos^2\theta + 1\right)\right) \\
&= \frac{mg}{4}\left(4 - 6\cos\theta + 9\cos^2\theta - 3\right) \\
&= \frac{mg}{4}(1 - 6\cos\theta + 9\cos^2\theta) \\
&= \frac{mg}{4}(1 - 3\cos\theta)^2
\end{aligned}
$$

On simplifie ensuite l'équation (2'):

$$
\begin{aligned}
T &= -m\cancel{l}\frac{3g}{4\cancel{l}}\,(2\sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta) \\
&= -\frac{3mg}{4}(2\sin\theta - 3\cos\theta\sin\theta) \\
&= \frac{3mg}{4}\sin\theta(3\cos\theta - 2)
\end{aligned}
$$

La barre ne glisse pas tant que $|T| \leq fN$; cette condition se réécrit :

$$\left|\frac{3mg}{4}\sin\theta(3\cos\theta - 2)\right| \leq f\frac{mg}{4}(1 - 3\cos\theta)^2$$

Ce qui équivaut à :

$$\boxed{\frac{3\sin\theta\,|3\cos\theta - 2|}{(1 - 3\cos\theta)^2} = f(\theta) \leq f}$$

Cette équation peut se résoudre numériquement: posons θ_2 tel que $f(\theta_2) = f$. Alors la barre glissera si on atteint cet angle.

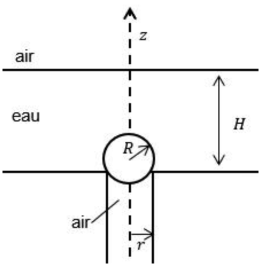
D'autre part, on sait que θ est nul à l'instant initial, puis grandit. Cependant, l'équation équivalente à la condition de non-glissement n'est pas définie si le dénominateur $(1 - \cos\theta)^2$ est nul, i.e. lorsque $\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = \theta_1$: on en déduit que la barre glissera si on atteint cet angle.

En conclusion : <u>la barre se mettra à glisser pour $\theta = \min(\theta_1, \theta_2)$</u>.

Fermeture d’un bassin par une bille

X-ENS

Une sphère en bois, de masse volumique ρ et de rayon R, est entièrement immergée dans un bassin d’eau de profondeur H. On note ρ_e la masse volumique de l’eau. Elle obstrue parfaitement un orifice circulaire de rayon r percé au fond du bassin.



Données numériques :

$\rho = 850\,\mathrm{kg/m^3}$, $\rho_e = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$,
$H = 70\,\mathrm{cm}$, $R = 20\,\mathrm{cm}$, $r = 10\,\mathrm{cm}$.

1. Déterminer la force exercée par la sphère sur les bords du trou.

2. Si on baisse le niveau d’eau dans le bassin, existe-t-il une hauteur d’eau pour laquelle la sphère remonte spontanément à la surface avant d’émerger ?

▶ **Correction :** Fermeture d'un bassin par une bille

1. On fait d'abord le bilan des forces exercées sur la sphère :

- Poids : $\overrightarrow{P} = -\rho\,\dfrac{4}{3}\pi R^3 g\,\overrightarrow{e_z}$,
- Force de pression exercée par l'air, sur la face inférieure : $\overrightarrow{F_{\text{air}}}$. Par symétrie, $\overrightarrow{F_{\text{air}}}$ est selon $\overrightarrow{e_z}$.
- Force de pression exercée par l'eau, sur la face supérieure : $\overrightarrow{F_{\text{eau}}}$. Par symétrie, $\overrightarrow{F_{\text{eau}}}$ est selon $\overrightarrow{e_z}$.
- Force de contact des bords du trou sur la sphère : $\overrightarrow{R}$. Par symétrie, $\overrightarrow{R}$ est selon $\overrightarrow{e_z}$. Notons $R = \overrightarrow{R}.\overrightarrow{e_z}$.

Piège

Le théorème d'Archimède ne s'applique pas ici, car si on remplace la sphère par l'eau, le bassin se vide et le fluide n'est plus au repos. Il ne faut donc surtout pas inclure la poussée d'Archimède dans le bilan des forces!

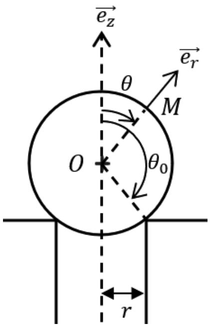
On souhaite déterminer la force que la sphère exerce sur les bords du trou du bassin. Autrement dit, d'après le principe des actions réciproques, on veut déterminer $-\overrightarrow{R}$.

■ Exprimons d'abord la résultante des forces de pression exercées par l'air et l'eau. On note S_{inf} la surface inférieure de la sphère (qui est en contact avec l'air) et S_{sup} la surface supérieure de la sphère (qui est en contact avec l'eau). On note P_a la pression atmosphérique de l'air.

La pression en un point M dans l'air est égale à P_a. La pression en un point M de cote z dans l'eau est égale à :

$$P(z) = P_a + \rho_e g(z_{\text{eau}} - z)$$

où z_{eau} est la cote de l'eau dans le repère choisi. On adopte le paramétrage ci-dessous, en coordonnées sphériques.



À l'aide des formules de trigonométrie, on peut donc écrire qu'en un point M quelconque de la surface de la sphère :

- La force de pression élémentaire est selon $-\overrightarrow{e_r}$;
- La cote est : $z = R\cos\theta$.

Le paramètre θ varie entre 0 et θ_0. Sachant que la hauteur de l'eau par rapport au fond du bassin est H, on en déduit que la cote de l'eau est de : $z_{\text{eau}} = H - R\cos(\pi - \theta_0) = H + R\cos\theta_0$. Enfin, on peut exprimer θ_0 en fonction de r : on a $\sin\theta_0 = \sin(\pi - \theta_0) = \dfrac{r}{R}$.

On peut donc écrire:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F_{\text{air}}} + \overrightarrow{F_{\text{eau}}} &= -\iint_{S_{\text{inf}}} P_a \,\overrightarrow{\mathrm{d}S} - \iint_{S_{\text{sup}}} (P_a + \rho_e g(z_{\text{eau}} - z))\,\overrightarrow{\mathrm{d}S} \\
&= -\underbrace{\oiint_{\mathrm{S_{inf}+S_{sup}}} P_a \overrightarrow{\mathrm{d}S}}_{\overrightarrow{0}} - \iint_{S_{\text{sup}}} \rho_e g(z_{\text{eau}} - z)\,\overrightarrow{\mathrm{d}S}
\end{aligned}$$

On sait que par symétrie, la résultante est selon $\overrightarrow{e_z}$, donc:

$$\left(\overrightarrow{F_{\text{air}}} + \overrightarrow{F_{\text{eau}}}\right).\overrightarrow{e_z} = F_z = -\iint_{S_{\text{sup}}} \rho_e g(H + R\cos\theta_0 - R\cos\theta)\,\underbrace{\overrightarrow{e_r}.\overrightarrow{e_z}}_{\cos\theta}\,\mathrm{d}S$$

On choisit comme surface élémentaire la couronne comprise entre θ et $\theta + \mathrm{d}\theta$, ce qui donne une "hauteur" de $R\mathrm{d}\theta$ et un "rayon" de $R\sin\theta$ par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{z})$, d'où : $\mathrm{d}S = 2\pi R\sin\theta \times R\mathrm{d}\theta = 2\pi R^2 \sin\theta\mathrm{d}\theta$.

Astuce

Choisir une bonne surface élémentaire permet d'économiser une intégration, mais vous pouvez toujours calculer l'intégrale double en passant par la surface élémentaire $\mathrm{d}S = R\mathrm{d}\theta \times R\sin\theta\mathrm{d}\varphi$ et intégrer pour θ variant de 0 à θ_0 et φ variant de 0 à 2π (ce qui correspond à S_{sup}). Attention aux erreurs de calcul !

On en déduit :

$$\begin{aligned}
F_z &= -\int_{\theta=0}^{\theta_0} \rho_e g(H + R\cos\theta_0 - R\cos\theta)\cos\theta \times 2\pi R^2 \sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= -\rho_e g 2\pi R^2 \int_0^{\theta_0} (H + R\cos\theta_0 - R\cos\theta)\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

Posons le changement de variable $u = \cos\theta$. Alors $\mathrm{d}u = -\sin\theta\mathrm{d}\theta$, et :

$$\begin{aligned}
F_z &= -\rho_e g 2\pi R^2 \int_1^{\cos\theta_0} (H + R\cos\theta_0 - Ru)\,u(-\mathrm{d}u) \\
&= +\rho_e g 2\pi R^2 \left(\int_1^{\cos\theta_0} (H + R\cos\theta_0)\,u\mathrm{d}u - \int_1^{\cos\theta_0} Ru^2\mathrm{d}u\right)
\end{aligned}$$

$$F_z = \rho_e g 2\pi R^2 \left((H + R\cos\theta_0) \left[\frac{u^2}{2}\right]_1^{\cos\theta_0} - R\left[\frac{u^3}{3}\right]_1^{\cos\theta_0} \right)$$
$$= \rho_e g 2\pi R^2 \left(\frac{H + R\cos\theta_0}{2}(\cos^2\theta_0 - 1) - \frac{R}{3}(\cos^3\theta_0 - 1) \right)$$

Astuce

Normalement, pour calculer les intégrales de fonctions trigonométriques, il faut d'abord les linéariser à l'aide des formules d'addition et de duplication. Ici, on a pu éviter ce long calcul à l'aide d'un changement de variable judicieusement choisi.

■ On applique le principe fondamental de la dynamique à la sphère, qui est à l'équilibre dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F_{\text{eau}}} + \overrightarrow{F_{\text{air}}} + \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$$

On projette sur $\overrightarrow{e_z}$:

$$-\rho\,\frac{4}{3}\pi R^3 g + F_z + R = 0$$
$$R = \rho\,\frac{4}{3}\pi R^3 g - F_z$$

On en déduit que la force exercée par la sphère sur les bords du trou du bassin est $\boxed{-\overrightarrow{R} = -R\overrightarrow{e_z}}$, avec :

$$\boxed{R = \rho\,\frac{4}{3}\pi R^3 g - \rho_e g 2\pi R^2 \left(\frac{H + R\cos\theta_0}{2}(\cos^2\theta_0 - 1) - \frac{R}{3}(\cos^3\theta_0 - 1) \right)}$$

On réalise l'application numérique : on calcule d'abord $\cos\theta_0 = -\sqrt{1 - \sin^2\theta_0} = -\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} = -0,87$, puis on déduit que $\boxed{-R = -1{,}7 \times 10^2\,\text{N}}$. La force exercée par la sphère sur le bassin est bien orientée vers le bas.

2. La sphère remonte si la force de contact devient nulle, c'est-à-dire quand $R = 0$. Cette condition se réécrit :

$$R = \rho\,\frac{4}{3}\pi R^3 g - \rho_e g 2\pi R^2 \left(\frac{H + R\cos\theta_0}{2}(\cos^2\theta_0 - 1) - \frac{R}{3}(\cos^3\theta_0 - 1) \right) = 0$$

En réarrangeant les termes, on obtient :

$$H = \frac{2R}{3(1 - \cos^2\theta_0)} \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_e} - \frac{3\cos\theta_0}{2} + \frac{\cos^3\theta_0}{2} \right) = 15\,\text{cm}$$

On en déduit que dès que la hauteur d'eau devient inférieure à $\boxed{15\,\text{cm}}$, la sphère remonte.

Calculons la hauteur d'eau pour laquelle la sphère émerge. Elle correspond à la hauteur du sommet de la sphère par rapport au fond du bassin, donc : $H_e = R + R\cos(\pi - \theta_0) = R(1 - \cos\theta_0) = \boxed{37\,\text{cm}}$, ce qui est supérieure à la hauteur d'eau pour laquelle la sphère remonte. On en déduit que non, si on baisse le niveau d'eau dans le bassin, la sphère ne peut pas remonter à la surface avant d'émerger.

Tonneau percé

X-ENS

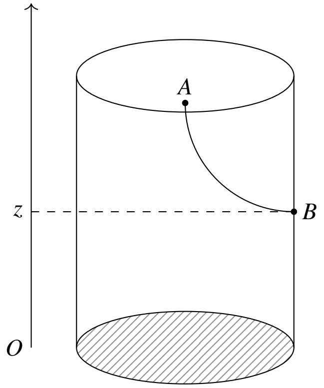
Un tonneau cylindrique de rayon R et de hauteur H est percé de petits trous répartis sur toute sa surface latérale. À une altitude z mesurée depuis la base, une fraction $f(z)$ de la surface latérale à ce niveau est percée.

1. Déterminer l'expression du débit volumique constant d'eau à verser dans le tonneau pour qu'il finisse par déborder. On considérera l'eau comme un fluide parfait et incompressible.

2. Faire l'application numérique pour $R = H = 1\,\mathrm{m}$, $f = 1\%$.

► Correction : Tonneau percé

1. On devine que plus il y a de l'eau dans le tonneau, plus il y a de trous et plus la vitesse de l'eau augmente (surtout en bas du tonneau, du fait du poids de la colonne d'eau): donc le débit volumique sortant augmente avec la hauteur de l'eau. On nous demande à quelle vitesse on doit remplir le tonneau pour qu'il finisse par déborder: le débit entrant doit donc être supérieur au débit sortant maximal, i.e. lorsque la hauteur d'eau est maximale. Dans le cas limite, le débit entrant est parfaitement égal au débit sortant à travers tous les trous de la surface latérale du tonneau, et la hauteur d'eau est égale à la hauteur du tonneau. On se place donc dans ce cas limite pour calculer le débit sortant: le régime est donc stationnaire.



$S = \pi R^2$

L'eau est considéré comme un fluide parfait et incompressible. De plus, on supposera qu'il est homogène. On s'est placé dans le cas limite, qui est un régime stationnaire. Soit B le centre d'un trou de la surface latérale, et soit A le point de la surface qui lui est relié par une ligne de courant. La relation de Bernoulli nous donne alors:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A = P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z$$

où :

- ρ est la masse volumique de l'eau, supposée constante;
- $P_A = P = P_0$ est la pression atmosphérique de l'air, car A et B se situent sur la surface libre de l'eau;
- $z_A = H$ est la hauteur de l'eau dans le tonneau;
- z est la hauteur du trou considéré;
- $v_A = 0$ est la vitesse de l'écoulement en A, nulle dans le cas limite;
- v est la vitesse de l'écoulement en B.

Remarque

Avant d'appliquer la relation de Bernoulli, il faut toujours rappeler ses hypothèses de validité !

On en déduit, après simplifications, l'expression de la vitesse d'écoulement dans un trou situé à une hauteur z de la base :

$$v = \sqrt{2g(H-z)}$$

Remarque

On obtient en fait la formule de Torricelli, qui est un cas particulier de la relation de Bernoulli entre la surface libre du fluide et l'orifice. Bien qu'elle ne soit pas officiellement au programme, elle fait partie des cas d'école à maîtriser.

La surface latérale élémentaire d'une tranche de hauteur dz à l'altitude z est :

$$\mathrm{d}S_{\text{lat}} = 2\pi R\,\mathrm{d}z$$

La surface de fuite à cette altitude est alors :

$$\mathrm{d}S_{\text{trous}} = f(z)\cdot \mathrm{d}S_{\text{lat}} = 2\pi R f(z)\,\mathrm{d}z$$

Le débit élémentaire de sortie à cette altitude est donc :

$$\mathrm{d}Q_S = v(z)\cdot \mathrm{d}S_{\text{trous}} = \sqrt{2g(H-z)}\cdot 2\pi R f\,\mathrm{d}z$$

Pour avoir le débit sortant total, on intègre ce débit sur toute la hauteur du tonneau :

$$Q_S = \int_0^H \mathrm{d}Q_S = \boxed{2\pi R\int_0^H \sqrt{2g(H-z)}f(z)\,\mathrm{d}z}$$

On en déduit que pour que le tonneau déborde, il faut que le débit entrant Q_E soit tel que : $\boxed{Q_E > Q_S}$. On remarque que plus $f(z)$ est grand, plus le débit sortant est grand, ce qui s'aligne avec notre intuition initiale.

2. L'application numérique nous donne un $f(z)$ constant. L'expression précédente peut donc se simplifier :

$$Q_S = 2\pi R f\int_0^H \sqrt{2g(H-z)}\,\mathrm{d}z$$

Astuce

Passez par un changement de variable pour intégrer correctement $\sqrt{H-z}$ afin de limiter les erreurs d'intégration, notamment au niveau des signes !

On effectue le changement de variable $u = H - z$; donc $\mathrm{d}z = -\mathrm{d}u$ et quand $z = 0$, $u = H$; quand $z = H$, $u = 0$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q_S &= 2\pi Rf\sqrt{2g}\int_H^0 \sqrt{u}(-\mathrm{d}u) = 2\pi Rf\sqrt{2g}\int_0^H \sqrt{u}\,\mathrm{d}u \\ &= 2\pi Rf\sqrt{2g}\cdot\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^H \\ &= 2\pi Rf\sqrt{2g}\cdot\frac{2}{3}H^{3/2} \\ &= \frac{4\pi}{3}RfH\sqrt{2gH} \end{aligned}$$

Avec $R = H = 1\,\mathrm{m}$, $f = 0{,}01$ et $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, on trouve que le débit entrant doit être supérieur à :

$$Q_S = \frac{4\pi}{3}\cdot 1\cdot 0{,}01\cdot\sqrt{2\cdot 9{,}81} = 0{,}2\,\mathrm{m^3/s} = \boxed{2\times 10^2\,\mathrm{L/s}}$$

Question d'examinateur

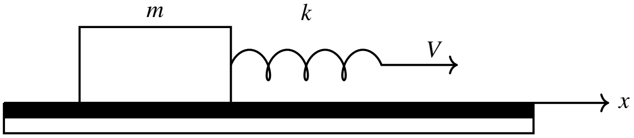
Comment varierait le débit si $f(z)$ était croissant avec z ?

Cela augmenterait les pertes à proximité du sommet (où la vitesse d'écoulement est plus faible), donc modifierait la répartition des fuites et le débit total. Il faudrait refaire l'intégration avec $f(z)$.

Le stick-slip

X-ENS

On dispose d'un palet de masse m et de surface S. Ce dernier est tracté par un mobile en translation rectiligne uniforme selon l'axe O_x à la vitesse V, par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k.



On rappelle les lois de Coulomb sur les frottements solides (avec N l'effort normal et T l'effort tangentiel) :

- Cas statique : $T < f_s N$
- Cas dynamique : $T = f_d N$

Données numériques : $S = 9 \times 8\,\mathrm{cm}^2$; $m = 1{,}6\,\mathrm{kg}$; $k = 1{,}5 \times 10^2\,\mathrm{N\cdot cm^{-1}}$ et $V = 10\,\mathrm{\mu m \cdot s^{-1}}$.

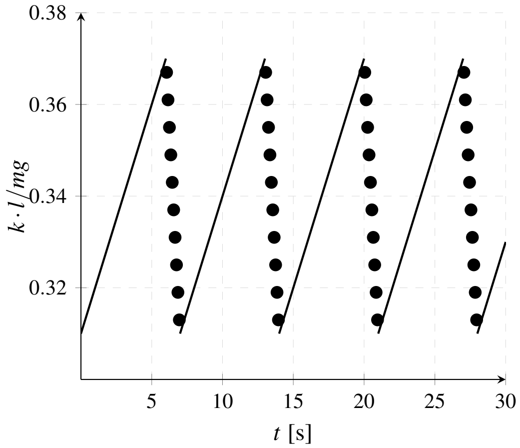
On remarque que les coefficients de frottements statique et dynamique sont différents, et sont notés f_d pour le coefficient dynamique et f_s pour le coefficient statique. On note $l(t)$ l'élongation du ressort par rapport à la position d'équilibre.

1. Donner des ordres de grandeur de coefficients de frottements et les couples de matériaux associés.

2. Lorsque la vitesse V est suffisamment élevée, l'élongation reste constante et égale à l_p. Déterminer l_p.

3. Ce régime est-il stable ? Justifier.

4. Si V est plus faible, on observe deux régimes de mouvement, fixe et glisse. Identifier les deux régimes sur le schéma ci-dessous et justifier. Trouver la valeur de f_s. En déduire la valeur de l_1, valeur de l en fin de phase fixe.



5. On se place en phase mobile. Trouver l'équation différentielle vérifiée par $l(t)$. La résoudre. Tracer le portrait de phase dans le plan $\left(l, \frac{1}{\omega_0}\frac{dl}{dt}\right)$ et déterminer f_d. En déduire la valeur numérique de l_2 la longueur du ressort en fin de phase de glisse.

6. Montrer que le mouvement du palet est périodique et déterminer sa période T_0. Comparer avec le graphique.

7. Dans la vie réelle, ce phénomène apparaît lors des crissements de craie sur un tableau ou le grincement de gonds de portes. Proposer un moyen d'éviter de tels désagréments dans chacun des cas.

► **Correction :** Le stick-slip

Astuce

Commencer par un schéma bilan des forces est toujours un bon réflexe pour éviter d'oublier des actions mécaniques importantes.

1. Ci-dessous un tableau donnant des ordres de grandeur de coefficients de frottements pour des couples de matériaux proposés.

Couple de matériaux	f_d	f_s
acier/acier	0,1	0,2
acier/acier graissé	0,05	0,1
acier/glace	0,02	0,05
pneu/bitume sec	0,5	0,8
pneu/bitume mouillé	0,35	0,5

2. On se place dans un cas dynamique. Ainsi, $T = f_d N$.

Piège

Ne pas confondre les régimes de frottements statique et dynamique : dans un énoncé, ils sont souvent interchangeés subtilement.

On considère le système $\mathscr{S} = \{palet\}$. Ce système est soumis à l'effort normal de contact, l'effort tangentiel de frottement, l'effort de pesanteur et l'effort exercé par le ressort.
En appliquant le principe fondamental de la dynamique projeté sur la direction horizontale et la direction verticale, on obtient respectivement $T = kl_p$ et $N = mg$. Ainsi, $\boxed{l_p = \frac{f_d mg}{k}}$.

3. Pour étudier la stabilité du système, on s'intéresse à son énergie potentielle. En particulier, $E_p = \frac{1}{2}kl_p^2$. Or il est précisé que l'élongation reste constante lorsque la vitesse est suffisamment élevée. Ainsi, $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = 0$. Il s'agit d'une position d'équilibre. En appliquant le principe fondamental de la dynamique au système $\mathscr{S} = \{palet\}$ sur l'axe O_x (hors équilibre), on obtient $m\ddot{l} + kl = f_d mg$. On reconnaît une équation d'un oscillateur harmonique ce qui confirme également la stabilité de ce régime.

4. On remarque que la courbe donne $f = \frac{kl}{mg}$. On observe deux comportements qui correspondent aux phases "fixe" et "glisse". Lors de la phase fixe, l'effort apporté par le ressort augmente jusqu'à atteindre la valeur de glissement. Cela correspond aux phases du graphique à pente positive. Une fois en mouvement l'effort apporté par le ressort diminue et ainsi de suite.

Piège

La raideur est donnée en N/cm : attention à bien convertir en N/m pour éviter les erreurs d'unités.

Dans le cas statique, $T = f_s N$ à la limite du glissement. D'où $f_s = \frac{T}{N} = \frac{kl_1}{mg}$, soit $\boxed{f_s = 0,37}$ par lecture graphique. Il s'en suit $\boxed{l_1 = 0{,}38\,\mathrm{mm}}$.

Remarque

Par définition des frottements secs de Coulomb, le coefficient de frottement statique est supérieur au coefficient de frottement dynamique : $f_s > f_d$. La force tangentielle nécessaire pour mettre en mouvement un objet est supérieure à celle requise pour conserver le mouvement une fois engendré.

5. On considère le même système que précédemment, soumis aux mêmes forces et en phase mobile. Le principe fondamental de la dynamique permet d'établir :

$$\ddot{l} + \omega_0^2\, l = \omega_0^2\, l_p,\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$l(t')$ est donc de la forme $l(t') = A\cos(\omega_0\, t') + B\sin(\omega_0\, t') + l_p$, avec t' le changement de variable tel que $t' = 0$ correspond au début de phase de glisse. Les conditions initiales donnent $l(0) = l_1$ et $\dot{l}(0) = v$

Finalement:

$$\boxed{l(t') = l_p + (l_1 - l_p)\cos\left(\omega_0 t'\right) + \frac{v}{\omega_0}\sin\left(\omega_0 t'\right)}$$

$$\boxed{\dot{l}(t') = -\omega_0 (l_1 - l_p)\sin\left(\omega_0 t'\right) + v\cos\left(\omega_0 t'\right)}$$

On remarque que $(l(t') - l_p)^2 + \left(\frac{1}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^2 = (l_1 - l_p)^2 + \left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2$ donne <u>une équation de cercle</u>.

Le portrait de phase donne :