# Oraux
## corrigés et commentés

## Concours ECG2

# Mathématiques appliquées

## HEC

Sujets types

ellipses

Mayeul Bacquelin

# CHAPITRE 1

# ÉTUDE DE FONCTIONS

## 1.1 Exercices avec préparation

**Exercice 1 (Oral HEC 2023)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} x^k$.

1. **Cours :** Énoncer le théorème de comparaison pour les séries.
2. Écrire un script Python pour représenter $P_{100}$ sur $[-1, 1]$.
3. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, montrer que $P'_n(x) = \dfrac{Q_n(x)}{(x-1)^2}$ avec $Q_n$ à déterminer.
4. Déterminer les variations de $P_n$. Montrer que $P_n$ admet un minimum en un unique point $u_n$ et que $-1 < u_n < 0$.
5. Compléter ce code pour que le script $u$(n) donne une approximation de $u_n$ à $10^{-3}$ près :

```
 def Q(n,x):
     return ...
def u(n):
    a, b = ..., ...
    while b-a > ...:
        c = (a+b)/2
        ...
```

6. Déterminer un équivalent simple de $(\ln(2n + 1 - 2nu_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$.
7. En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
8. Déterminer un équivalent de $(u_n + 1)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

**Indication**

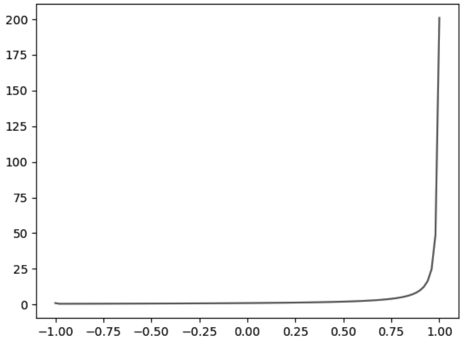
Pour la question 3, reconnaître une somme géométrique. Étudier le signe de $Q_n$ afin d'avoir les variations de $P_n$. Pour prouver $-1 < u_n < 0$, calculer $Q_n(-1)$. Pour obtenir l'équivalent de la question 6, partez de $-1 < u_n < 0$ afin d'obtenir des bonnes inégalités pour appliquer le théorème des gendarmes et prouver que $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(2n+1-2nu_n)}{\ln(n)}\right) = 1$.

# Solution 1

1. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$. Le théorème de comparaison affirme que si $\sum v_n$ est convergente alors $\sum u_n$ l'est aussi et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. Il affirme aussi que si $\sum u_n$ est divergente alors $\sum v_n$ l'est aussi et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = +\infty$.
2. Voici un script Python permettant de représenter la fonction $P_{100}$ sur $[-1, 1]$ :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def P(n,x):
    s = 0
    puissancex = 1
    for k in range(0,2*n+1):
        s += puissancex
        puissancex *= x
    return s
abs = np.linspace(-1,1,100)
ord = [P(100,x) for x in abs]
plt.plot(abs,ord)
plt.show()
```

On a obtenu :



3. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, on a en reconnaissant une somme géométrique :

$$P_n(x) = \frac{x^{2n+1}-1}{x-1}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= \frac{(2n+1)x^{2n}(x-1) - \left(x^{2n+1}-1\right)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{Q_n(x)}{(x-1)^2} \text{ avec : } Q_n : x \mapsto 2nx^{2n+1} - (2n+1)x^{2n} + 1. \end{aligned}$$

4. $P_n$ comme $Q_n$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ par somme. Pour tout réel $x$, on a :

$$\begin{aligned} Q_n'(x) &= 2n(2n+1)x^{2n} - 2n(2n+1)x^{2n-1} \\ &= 2n(2n+1)x^{2n-1}(x-1). \end{aligned}$$

On obtient donc les variations de $Q_n$ puis son signe :

| $x$ | $-\infty$ | | $u_n$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $Q_n(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| Signe de $Q_n(x)$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ | $+$ | $+$ | |

$Q_n$ est continue et strictement croissante sur $]-\infty, 0]$, elle réalise donc une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $\left]\lim\limits_{x\to-\infty}(Q_n(x)), Q_n(0)\right]$, soit $]-\infty, 1]$. Comme $0 \in ]-\infty, 1]$, le théorème de la bijection continue assure que $Q_n$ s'annule en un unique point $u_n \in ]-\infty, 0]$. Avec la connaissance du signe de $Q_n$, on a celui de $P_n'$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et les variations globales de $P_n$ puisque $P_n$ est continue. On en déduit que $P_n$ est décroissante sur $]-\infty, u_n]$ et croissante sur $[u_n, +\infty[$. La fonction $P_n$ atteint donc un minimum en un unique point $u_n \in \mathbb{R}$. On résume toutes ces informations dans ce tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $u_n$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $P_n(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $P_n(u_n)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

On justifie les limites en $\pm\infty$ grâce à cet équivalent : $P_n(x) \underset{\pm\infty}{\sim} x^{2n}$. Remarquons que $Q_n(-1) = -4n$. On en déduit que $Q_n(-1) < 0 < 1$ et donc $Q_n(-1) < Q_n(u_n) < Q_n(0)$ ce qui entraîne par stricte croissance de $Q_n$ sur $]-\infty, 0]$ les inégalités suivantes :

$$-1 < u_n < 0.$$

5. $u_n$ est l'unique racine de $Q_n$ sur $]-\infty, 0]$. En appliquant l'algorithme de dichotomie, on obtient une approximation de $u_n$ à $10^{-3}$ près. L'instruction u(n) renverra donc une approximation de $u_n$ à $10^{-3}$ près si on utilise ce programme :

```
def Q(n, x):
    return 2 * n *x * *(2 *n+1)-(2 *n+1) * x * *(2 * n)+1$

def u(n):
    a, b = -1,0
    while b-a > 2 * 10 * *(-3):
        c = (a+b)/2
        if Q(n,a)*Q(n,c) < 0:
            b=c
        else:
            a=c
    return c
```

6. On a vu en question 4 que : $-1 < u_n < 0$, on en déduit que $2n+1 < 2n+1-2nu_n < 4n+1$ puis, par croissance de ln (en signalant que ces trois nombres sont strictement positifs) et comme $\ln(n) > 0$, on obtient :

$$\frac{\ln(2n+1)}{\ln(n)} < \frac{\ln(2n+1-2nu_n)}{\ln(n)} < \frac{\ln(4n+1)}{\ln(n)}.$$

Comme $\ln(2n+1) = \ln(n) + \ln\left(2+\frac{1}{n}\right)$ et $\ln(4n+1) = \ln(n) + \ln\left(4+\frac{1}{n}\right)$, on en déduit :

$$1 + \frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} < \frac{\ln(2n+1-2nu_n)}{\ln(n)} < 1 + \frac{\left(4+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}.$$

Par quotient puis somme, on peut affirmer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{\ln\left(4+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) = 1.$$

Le théorème des gendarmes entraîne alors que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(2n+1-2nu_n)}{\ln(n)}\right) = 1$$

ce qui signifie que : $\ln(2n+1-2nu_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

**Commentaires**

Petit rappel pour prouver que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, on utilise les opérations possibles (produit, quotient, puissance) en partant de :

- Un polynôme est équivalent en l'infini à son monôme de plus haut degré. Un polynôme équivaut en $0$ à son terme de plus bas degré.
- Si $\alpha$ est un réel non nul, si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 0$ alors on sait que : $1 - \cos(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(u_n)^2}{2}$, $\exp(u_n) - 1 \underset{+\infty}{\sim} u_n$ , $\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$, $\sin(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$, $\tan(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$ et enfin $(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{+\infty}{\sim} \alpha u_n$.

On peut aussi tenter de prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = 1$ ce qui signifie que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. C'est le cas en particulier si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers une même limite non nulle et non infinie.

7. Puisque $Q_n(u_n) = 0$, on trouve que $2nu_n^{2n+1} - (2n+1)u_n^{2n} + 1 = 0$ soit, comme $u_n \neq 0$ car $Q_n(0) \neq 0$, l'égalité suivante :

$$2nu_n^1 - (2n+1)u_n^0 = -\frac{1}{(u_n)^{2n}}$$

ce qui donne $\ln(2n+1-2nu_n) = -2n\ln(-u_n)$ (on signale de nouveau que les quantités intervenant dans ln sont strictement positives). La question précédente nous permet alors d'affirmer que :

$$\ln(-u_n) \sim -\frac{\ln(n)}{2n}.$$

Il vient alors, grâce aux croissances comparées, que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln(-u_n)) = 0$ et donc, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = -1$.

8. Posons $h_n = u_n + 1$. Remarquons que $-u_n = 1 - h_n$. Ainsi, d'après la question précédente, on en déduit :

$$\ln(1-h_n) \sim -\frac{\ln(n)}{2n}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(h_n) = 0$, donc $h_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln(1-h_n)$. Finalement, il reste donc :

$$h_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{2n}.$$

**Exercice 2**

Soit $t$ un réel positif ou nul fixé. Pour tout réel $x$, on pose :

$$P_t(x) = x^3 + tx - 1.$$

1. **Cours :** Qu'appelle-t-on *racine* d'un polynôme ? Qu'appelle-t-on *ordre de multiplicité* d'une racine d'un polynôme ?
2. Montrer que le polynôme $P_t$ admet une unique racine réelle $u(t)$.
3. On note $u : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto u(t) \end{cases}$.
   (a) Montrer que $u(\mathbb{R}_+) \subset ]0;1]$.
   (b) Démontrer que la fonction $u$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} (u(t))$ *(Indication : utiliser l'expression de* $P_t(u(t))$*.)*
   (d) Montrer que l'application $u$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $]0;1]$, de réciproque :
   $$v : \begin{cases} ]0;1] & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ y & \longmapsto \dfrac{1-y^3}{y} \end{cases}$$
   (e) Représenter graphiquement grâce au langage `Python` la fonction $v$ sur $]0;1]$. En déduire le tracé de représentation graphique de la fonction $u$.
   (f) Justifier que la fonction $u$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (g) Démontrer que la fonction $u$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ puis déterminer, pour tout réel positif $t$, une expression de $u'(t)$ en fonction de $t$ et $u(t)$.

**Indication**

On joue sur les fonctions réciproques dans cet exercice. Il faut jongler entre le monde des abscisses et celui des images. Pour comparer $u(t)$ et $u(s)$ par exemple, on va comparer $P_t(u(t))$ et $P_t(u(s))$. Pour démontrer des qualités sur $u$, on va évoquer celle de $v$.

# Solution 2

1. 
   - Soient $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme et $a \in \mathbb{R}$ ; on dit que $a$ est racine de $P$ si et seulement si $P(a) = 0$.
   - On dit que $a$ est racine d'ordre $k$ de $P$ ($k \in \mathbb{N}^*$) si et seulement si $x \mapsto (x-a)^k$ divise $P$ mais $x \mapsto (x-a)^{k+1}$ ne divise pas $P$ (ce qui signifie qu'il existe un polynôme $Q$ tel que $P(x) = (x-a)^k Q(x)$ pour tout réel $x$ avec $Q(a) \neq 0$).
2. $P_t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme) et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_t'(x) = 3x^2 + t$$

et, comme $t \geqslant 0$, pour tout réel non nul $x$, on a :

$$\begin{aligned} P_t'(x) &\geqslant 3x^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Comme de plus $P_t$ est continue, on en déduit que $P_t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Rappelons que $P_t$ est continue, on peut alors affirmer, par le théorème de la bijection continue, que $P_t$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim\limits_{x\to-\infty}(P_t(x)), \lim\limits_{x\to+\infty}(P_t(x))\right[$, soit $\mathbb{R}$ car, comme $P_t(x) \underset{\infty}{\sim} x^3$, on peut affirmer que :

$$\lim_{x\to+\infty}(P_t(x)) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty}(P_t(x)) = -\infty.$$

Le polynôme $P_t$ admet bien une unique racine réelle $u(t)$.

**Commentaires**

On cherchait ici à prouver qu'une équation a des solutions. Voici trois idées pour réaliser cette tâche :

- **On la résout :** C'est la base et à essayer avant la suite. C'est jouable a priori si c'est une équation du second degré ou une équation faisant intervenir une fonction qu'on peut détruire grâce à des réciproques (ln et exp, $\sqrt{\cdot}$ et $x \mapsto x^2$...)
- **Théorème des valeurs intermédiaires :** On réécrit notre équation sous la forme $f(x) = 0$, on prouve la continuité de $f$, on cherche deux réels $a$ et $b$ tels que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés. On pourra alors conclure que notre équation a au moins une solution (mais on ne sait pas le nombre de solutions).
- **Théorème de la bijection continue :** On écrit notre équation sous la forme $f(x) = 0$ , prouve la continuité et la stricte monotonie de $f$, explicite l'image de $f$ et on note si $0$ appartient (une et une seule solution) ou non (aucune solution) à l'image de $f$.

3. (a) On a $P_t(0) = -1$, $P_t(u(t)) = 0$ et $P_t(1) = t$ donc :

$$P_t(0) < P_t(u(t)) \leqslant P_t(1)$$

On en déduit, par stricte croissance de $P_t$, que $0 < u(t) \leqslant 1$ ce qui est le résultat qu'on souhaitait établir.

(b) Soient $t$ et $s$ deux réels strictement positifs tels que $t < s$. On a :

$$\begin{aligned} P_t(u(s)) &= (u(s))^3 + tu(s) - 1 \\ &= (t-s)u(s) \text{ car } (u(s))^3 + su(s) - 1 = 0 \text{ car } P_s(u(s)) = 0 \end{aligned}$$

Or $u(s) > 0$ (d'après la question précédente), donc $P_t(u(s)) < 0$. Or $P_t(u(t)) = 0$, on a donc :

$$P_t(u(s)) < P_t(u(t)).$$

Par stricte croissance de $P_t$, on en déduit que $u(s) < u(t)$. La fonction $u$ est donc strictement décroissante.

(c) La fonction $u$ est décroissante (d'après la question précédente) sur $\mathbb{R}^+$, elle est minorée (par $0$ par exemple puisque $u(\mathbb{R}_+) \subset ]0;1]$), elle admet donc une limite $\ell$ en $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone et on peut affirmer que $\ell$ appartient à $[0,1]$. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ (u(t))^3 - 1 = -t \times u(t).$$

Si $\ell \neq 0$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} (-t \times u(t)) = -\infty$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \left((u(t))^3 - 1\right) = -\infty$. Or, par somme, $\lim\limits_{t\to+\infty} \left((u(t))^3 - 1\right)$ est $\ell^3 - 1$, c'est donc (par unicité de la limite) absurde, cela prouve donc que $\ell = 0$.

(d) Soit $y$ un élément de $]0,1]$. Posons $t = v(y)$, on a :

$$\begin{aligned} P_{v(y)}(y) &= y^3 + v(y) \times y - 1 \\ &= y^3 + \frac{1-y^3}{y} \times y - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Or $P_{v(y)}$ a un unique zéro, c'est $u(v(y))$. On en déduit que $u(v(y)) = y$. Tout $y$ de $]0,1]$ admet donc $v(y)$ pour antécédent par $u$, $u$ est donc surjective. Étant injective (car strictement décroissante) et surjective, $u$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $]0,1]$. De $u(v(y)) = y$ vérifiée pour tout $y$ de $]0,1]$, on peut alors déduire que $u$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $]0;1]$ et $v$ est sa réciproque.

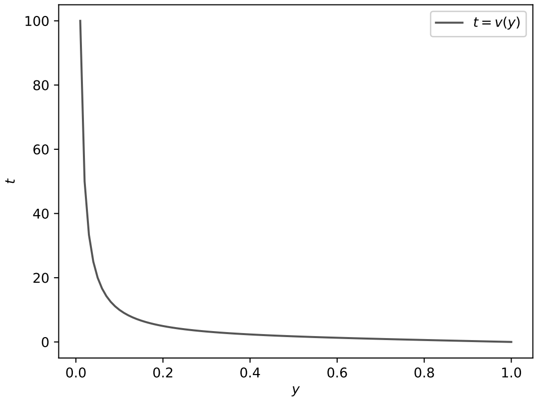
(e) Comme $v$ est l'application $\begin{cases} ]0;1] & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ y & \longmapsto \dfrac{1-y^3}{y} \end{cases}$, il est aisé de la représenter graphiquement. Pour représenter $u$, qui est la réciproque de $v$, on peut faire la symétrie par rapport à la première bissectrice. On peut aussi le faire en Python en passant de `plot(t,y)` dans le programme à `plot(y,t)`. On propose donc le programme suivant :

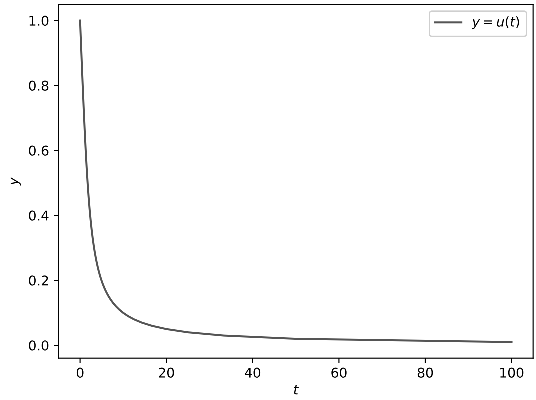
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def v(y):
    return 1/y-y**2

y=np.linspace(0.01,1,100)
t=v(y)
plt.subplots()
plt.xlabel('$y$');plt.ylabel('$t$')
plt.plot(y,t,label=r'$t=v(y)$')
plt.legend()
plt.subplots()
plt.ylabel('$y$');plt.xlabel('$t$')
plt.plot(t,y,label=r'$y=u(t)$')
plt.legend()
```

On a obtenu :




(f) Par quotient, la fonction $v$ est continue et strictement décroissante sur $]0,1]$. Par le théorème de la bijection continue, on peut affirmer que, la fonction $u$, en tant que réciproque de $v$, est bien continue sur $\mathbb{R}_+$.

(g) Par quotient, la fonction $v$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et, pour tout $y$ dans $]0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} v'(y) &= \frac{-3y^3 - (1-y^3)}{y^2} \\ &= \frac{-2y^3 - 1}{y^2} \end{aligned}$$

La dérivée de $v$ ne s'annulant pas, on sait, d'après le cours, que la fonction $u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $v\,(]0,1])$, i.e. sur $\mathbb{R}^+$. Or, pour tout réel positif $t$, on a :

$$u(t)^3 + t \times u(t) - 1 = 0,$$

cela donne alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ (3(u(t))^2 + t) \times u'(t) + u(t) = 0$$

soit, pour tout réel positif $t$, puisque $3(u(t))^2 + t \neq 0$, l'égalité suivante :

$$u'(t) = -\frac{u(t)}{3(u(t))^2 + t}.$$

**Exercice 3**

1. **Cours :** Donner la définition d'une valeur propre ainsi que d'un sous-espace propre pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soient $n$ un entier supérieur à 2 et $(E_n)$ l'équation suivante d'inconnue $x$ réel strictement positif :

$$(E_n) :\quad f(x) = \frac{1}{n} \text{ avec } f : x \mapsto \frac{\ln^2(x)}{x},$$

   (a) Dresser le tableau de variations de $f$ sur $[1, +\infty[$.
   (b) Démontrer que l'équation $(E_n)$ admet deux solutions, que l'on notera $\alpha_n$ et $\beta_n$, telles que : $1 \leqslant \alpha_n \leqslant e^2 \leqslant \beta_n$.
3. À l'aide de l'outil informatique, représenter sur un même graphe la courbe représentative de $f$ ainsi que les droites $D_i$, $1 \leqslant i \leqslant 6$, où $D_i$ a pour équation $y = \dfrac{1}{i}$, pour $i \in [\![1, 6]\!]$. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variations et les limites de $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ ?
4. (a) Démontrer que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement monotone.
   (b) Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ admet une limite que l'on précisera.
   (c) Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par $u_n = \dfrac{\beta_n}{n}$. Prouver que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln^2(n)$ en admettant que $\ln(u_n) = \underset{n\to+\infty}{o}(\ln(n))$.
   (d) En déduire un équivalent de $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$.
5. (a) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ admet une limite que l'on précisera.
   (b) Donner un équivalent de $(\alpha_n - 1)_{n\geqslant 2}$. Comment pourrait-on vérifier ce résultat avec l'outil informatique ?

**Indication**

Pensez à utiliser le théorème de la bijection continue dans la question 2. Dans les questions 3 et 4, appuyez-vous sur le tableau de variations. Pour comparer $\beta_n$ et $\beta_{n+1}$, comparez avant $f(\beta_n)$ et $f(\beta_{n+1})$. Même astuce avec $\alpha_n$ et $\alpha_{n+1}$. Pour toutes les histoires d'équivalents, souvenez vous que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = 1$.

# Solution 3

1. Soit $\lambda$ un réel.
   - On dit que $\lambda$ est valeur propre de $A$ lorsqu'il existe une matrice colonne $X$ non nulle qui vérifie $AX = \lambda X$.
   - Le sous-espace propre de $A$ associé à $\lambda$ est l'ensemble : $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$, c'est donc $\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X\}$.

2. (a) $f$ est dérivable sur $[1;+\infty[$ par quotient car, pour tout $x$ de $[1;+\infty[$, on a $x > 0$ et $x \neq 0$. Pour tout $x$ de $[1;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{\ln(x)(2 - \ln(x))}{x^2}.$$

Si $x \in ]1;+\infty[$, $\ln(x) > 0$ d'où :

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff 2 - \ln(x) > 0 \\ &\iff x < e^2. \end{aligned}$$

Pour compléter le tableau de variations de $f$, on note que $f(1) = 0$, $f(e^2) = 4e^{-2}$ donc $f(e^2) \approx 0,54$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)) = 0$ par croissances comparées. D'où le tableau de variations de $f$ :

| $x$ | $1$ | | $e^2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $4e^{-2}$ | $\searrow$ | $0$ |

(b)
   - $f$ étant continue et strictement croissante sur $[1, e^2]$, elle réalise, d'après le théorème de la bijection continue, une bijection de l'intervalle $[1, e^2]$ sur l'intervalle $[f(1), f(e^2)]$, soit $[0, 4e^{-2}]$. Comme $\frac{1}{n} \in [0, 4e^{-2}]$ car $4e^{-2} \approx 0,54$ et $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2}$, il existe un unique réel $\alpha_n \in [1, e^2]$ tel que $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$.
   - De même, $f$ étant continue et strictement décroissante sur $[e^2, +\infty[$, elle réalise une bijection de $[e^2, +\infty[$ sur $]\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)), f(e^2)]$, soit $]0, 4e^{-2}]$ : il existe donc un unique réel $\beta_n \in [e^2, +\infty[$ tel que $f(\beta_n) = \frac{1}{n}$.

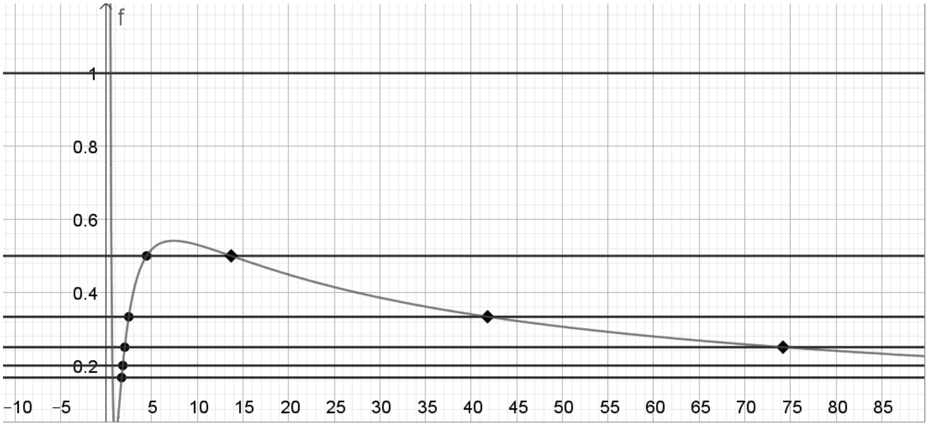
Ainsi l'équation $(E_n)$ admet deux solutions $\alpha_n$ et $\beta_n$, et elles vérifient :

$$1 \leqslant \alpha_n \leqslant e^2 \leqslant \beta_n.$$

**Commentaires**

On remarque que $f \leqslant 4e^{-2}$ d'après la question précédente. Comme $4e^{-2} < 1$, on en déduit que pour tout réel strictement positif, $f(x) \neq 1$, l'équation $(E_1)$ n'admet donc pas de solution.

3. Voici les courbes représentatives de $f$ et des droites $D_i$ d'équation $y = \dfrac{1}{i}$ avec $i \in [\![1, 6]\!]$ :




On a utilisé le programme suivant :

```
import math as m
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f1(x):
    return(m.log(x)**2/x)

def trace():
    x=np.linspace(1,100,100000)
    y=[f1(t) for t in x]
    plt.plot(x, y)
    for i in range(1,7):
        z=[1/i for t in x]
        plt.plot(x, z)
    plt.show()
```

Au vu du graphique, on peut penser que $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ (les points) décroît et converge vers 1, $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ (les losanges) croît et tend vers $+\infty$.

4.(a) Par définition, $(\beta_n, \beta_{n+1}) \in [e^2, +\infty[^2$ et vérifient :

$$f(\beta_{n+1}) < f(\beta_n)$$

car $f(\beta_n) = \dfrac{1}{n}$ et $f(\beta_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$. Or $f$ est strictement décroissante sur $[e^2, +\infty[$ donc $\beta_n < \beta_{n+1}$ La suite $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ est bien strictement croissante.

(b) Par l'absurde, supposons que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ converge. Notons $\ell$ sa limite, on peut affirmer que $\ell \geqslant e^2$ car, pour tout entier $n$ supérieur à 2, $\beta_n \geqslant e^2$ et on invoque le passage à la limite dans les inégalités. Comme $f$ est continue sur $[e^2, +\infty[$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(\beta_n)) = f(\ell)$. Or, pour tout entier $n$ supérieur à 2, $f(\beta_n) = \dfrac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(\beta_n)) = 0$. On en déduit que $f(\ell) = 0$ ce qui est absurde car la fonction $f$ ne s'annule pas sur $[e^2, +\infty[$ d'après son tableau de variations. On en déduit que $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ diverge et comme cette suite est croissante, on conclut que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(\beta_n) = +\infty}.$$

(c) Soit $n$ un entier supérieur à 2. On sait que $u_n = \dfrac{\beta_n}{n}$, on a donc :

$$\begin{aligned}\frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} &= \frac{\ln(\beta_n) - \ln(n)}{\ln(n)}\\ &= \frac{\ln(\beta_n)}{\ln(n)} - 1.\end{aligned}$$

D'après l'énoncé, $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln(n))$ i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(u_n)}{\ln(n)}\right) = 0$ soit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(\beta_n)}{\ln(n)} - 1\right) = 0.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(\beta_n)}{\ln(n)}\right) = 1$ autrement dit $\ln(\beta_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
Par ailleurs $f(\beta_n) = \dfrac{1}{n}$, i.e. $\dfrac{\ln^2(\beta_n)}{\beta_n} = \dfrac{1}{n}$ donc $u_n = \ln^2(\beta_n)$.
Comme on a montré que $\ln(\beta_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, on conclut que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln^2(n).$$

(d) Comme $\beta_n = nu_n$, on en déduit que : $\beta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln^2(n)$.

5.(a) $(\alpha_n, \alpha_{n+1}) \in [1, e^2]^2$ et vérifient $f(\alpha_n) > f(\alpha_{n+1})$ car $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1}$. Or $f$ est strictement croissante sur $[1, e^2]$ donc $\alpha_{n+1} < \alpha_n$. La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est donc strictement décroissante. $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ étant de plus minorée par 1, elle converge vers une limite $\ell$, $\ell \in [1, e^2]$ car, pour tout entier $n$ supérieur à 2, $\alpha_n \in [1, e^2]$ et par passage à la limite dans les inégalités.

**Commentaires**

Attention, on ne peut pas passer automatiquement de $U_n \geqslant V_n$ à $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n) \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty}(V_n)$ en invoquant le passage à la limite dans les inégalités. Il faut absolument prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n)$ existent et sont finies avant!

$f$ étant continue sur $[1, e^2]$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(\alpha_n)) = f(\ell)$ soit $f(\ell) = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$. Comme $f$ ne s'annule qu'en 1 sur $[1, e^2]$, on peut affirmer que $\ell = 1$. En conclusion, $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n) = 1$.

(b) $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)=1$ donc $\ln(\alpha_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha_n - 1$.
Par ailleurs, $f(\alpha_n)=\dfrac{1}{n}$ donc $\ln^2(\alpha_n)=\dfrac{\alpha_n}{n}$ donc $\ln^2(\alpha_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ car $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.
On en déduit que $\ln(\alpha_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ puis, comme $\ln(\alpha_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha_n - 1$, cet équivalent :

$$\alpha_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Pour vérifier ce résultat avec l'outil informatique, on peut utiliser l'algorithme de Newton ou de dichotomie pour calculer une valeur approchée de $\alpha_n$ solution de l'équation $f(x)-\dfrac{1}{n}=0$ sur $[1,e^2]$, puis on vérifie que, pour $n$ suffisamment grand, $\sqrt{n}(\alpha_n-1)$ est proche de 1.

## 1.2 Exercices sans préparation

**Exercice 4 (Oral HEC 2016)**

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $f_n$ la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$\forall x\in[0,1],\ f_n(x)=\int_0^x e^{nt^2}\,dt-\int_x^1 e^{-nt^2}\,dt.$$

1. Montrer que la fonction $f_n$ est strictement monotone sur $[0,1]$.
2. Établir l'existence d'un unique réel de $[0,1]$, noté $c_n$, tel que :

$$\int_0^{c_n} e^{nt^2}\,dt=\int_{c_n}^1 e^{-nt^2}\,dt.$$

3. Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

**Indication**

Il faut dériver $f_n$ pour s'en sortir. On vous rappelle que si $g(x)=\displaystyle\int_0^x h(t)dt$ et si $k(x)=\displaystyle\int_x^0 h(t)dt$ alors $g'(x)=h(x)$ et $k'(x)=-h(x)$. Après, c'est du classique théorème de la bijection continue.

## Solution 4

1. Comme les intégrandes sont ici continues, le théorème fondamental du calcul intégral permet de dire que $f_n$ est dérivable et, pour tout $x$ de $[0,1]$, on a :

$$f_n'(x)=e^{nx^2}+e^{-nx^2}$$

donc, par somme, $f_n' > 0$, on peut donc affirmer que $f_n$ est strictement croissante sur $[0,1]$.

2. La fonction $f_n$ continue et strictement croissante sur $[0,1]$, elle réalise donc, d'après le théorème de la bijection continue, une bijection de $[0,1]$ sur $[f_n(0), f_n(1)]$. Comme $f_n(0) = -\int_0^1 e^{-nt^2}\, dt$ et $f_n(1) = \int_0^1 e^{nt^2}$, par positivité de l'intégration (invocable car les intégrandes sont continues et positives et les bornes sont dans le sens croissant), on peut affirmer que :

$$f_n(0) \leqslant 0 \ \text{ et } \ 0 \leqslant f_n(1).$$

On peut donc conclure que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet une unique solution $c_n$, cela veut précisément dire qu'il existe un unique réel $c_n$ de $[0,1]$ tel que :

$$\int_0^{c_n} e^{nt^2}\, dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2}\, dt.$$

3. Par croissance de la fonction exponentielle, on peut affirmer que pour tout $t$ de $[0,1]$, on a :

$$e^{(n+1)t^2} \geqslant e^{nt^2} \text{ et } -e^{-(n+1)t^2} \geqslant -e^{-nt^2}$$

ce qui donne par croissance de l'intégration (invocable par continuité des intégrandes et car les bornes sont dans le sens croissant car $c_n \geqslant 0$) les inégalités suivantes :

$$\int_0^{c_n} e^{(n+1)t^2} dt \geqslant \int_0^{c_n} e^{nt^2} dt \text{ et } \int_0^{c_n} -e^{-(n+1)t^2} dt \geqslant \int_0^{c_n} -e^{-nt^2} dt$$

et donc, par somme, l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(c_n) &\geqslant \int_0^{c_n} e^{nt^2}\, dt - \int_{c_n}^1 e^{-nt^2}\, dt \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

que l'on traduit en $f_{n+1}(c_n) \geqslant f_{n+1}(c_{n+1})$ . Puisque $f_{n+1}$ est strictement croissante sur $[0,1]$, on a : $c_n \geqslant c_{n+1}$. La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et, d'après la question précédente, minorée (par $0$), elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.

**Exercice 5**

Pour tout réel $x$, on pose : $\text{th}\,(x) = \dfrac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)}$.

1. Montrer que la fonction th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$. On note Argth sa bijection réciproque.
2. Calculer Argth $(0)$ et Argth $\left(\dfrac{1}{3}\right)$.
3. On admet que Argth est dérivable sur $]-1, 1[$ et que, pour tout $y$ de $]-1, 1[$, on a :
$$\text{Argth}\,'(y) = \frac{1}{\text{th}\,'(\text{Argth}\,(y))}.$$
Simplifier l'expression de Argth $'$.
4. Soit la fonction $f$ suivante : $f : x \mapsto \text{Argth}\left(\dfrac{1 + 3\text{th}\,(x)}{3 + \text{th}\,(x)}\right)$. Déterminer le domaine de définition $D_f$ de $f$, montrer que $f$ est dérivable et expliciter $f'$.
5. Trouver deux réels $a$ et $b$ tels que $f : x \mapsto ax + b$.

**Indication**

Au début, c'est de nouveau le théorème de la bijection continue. Dans la quatrième question, vous allez obtenir un résultat particulièrement simple qui expliquera la dernière question.

# Solution 5

1. Par quotient ($\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) + \exp(-x) > 0$ donc $\exp(x) + \exp(-x) \neq 0$), th est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel $x$, on a :
$$\begin{aligned}\text{th}\,'(x) &= \frac{(\exp(x) + \exp(-x))^2 - (\exp(x) - \exp(-x))^2}{(\exp(x) + \exp(-x))^2} \\ &= \frac{4}{(\exp(x) + \exp(-x))^2}.\end{aligned}$$
On en déduit que th $' > 0$. th est donc strictement croissante. Or th est continue donc, par le théorème de la bijection continue, th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim_{x\to-\infty}(\text{th}\,(x)), \lim_{x\to+\infty}(\text{th}\,(x))\right[$, soit $]-1, 1[$ car :
$$\begin{aligned}\text{th}\,(x) &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\exp(x)}{\exp(x)} \\ &\underset{+\infty}{\sim} 1.\end{aligned}$$
De plus, th est impaire donc $\lim_{x\to-\infty}(\text{th}\,(x)) = -\lim_{x\to+\infty}(\text{th}\,(x))$.

2. • $\text{th}\,(0) = 0$ donne Argth $(0) = 0$.
   • Pour tout réel $x$, on a :

$$\begin{aligned}
x = \text{Argth}\,\left(\frac{1}{3}\right) &\iff \frac{1}{3} = \text{th}\,(x)\\
&\iff 3(\exp(x) - \exp(-x)) = \exp(x) + \exp(-x)\\
&\iff 3(\exp(2x) - 1) = \exp(2x) + 1\\
&\iff \exp(2x) = 2\\
&\iff x = \ln(\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

   On en déduit que Argth $\left(\frac{1}{3}\right) = \ln(\sqrt{2})$.

3. Pour tout réel $x$, on a :

$$\begin{aligned}
1 - \text{th}^{\,2}(x) &= \frac{(\exp(x) + \exp(-x))^2 - (\exp(x) - \exp(-x))^2}{(\exp(x) + \exp(-x))^2}\\
&= \frac{\exp(2x) + \exp(-2x) + 2 - \exp(2x) - \exp(-2x) + 2}{(\exp(x) + \exp(-x))^2}\\
&= \frac{4}{(\exp(x) + \exp(-x))^2}\\
&= \text{th}\,'(x).
\end{aligned}$$

   On en déduit donc que, pour tout $y$ de $]-1, 1[$, on a :

$$\begin{aligned}
\text{Argth}\,'(y) &= \frac{1}{\text{th}\,'(\text{Argth}\,(y))}\\
&= \frac{1}{1 - \text{th}^{\,2}(\text{Argth}\,(y))}\\
&= \frac{1}{1 - y^2}.
\end{aligned}$$

4. Argth est définie sur $]-1, 1[$, on en déduit que par quotient et composition, pour tout réel $x$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) \text{ est définie } &\iff \begin{cases} 3 + \text{th}\,(x) & \neq 0\\ -1 < \dfrac{1 + 3\text{th}\,(x)}{3 + \text{th}\,(x)} & < 1 \end{cases}\\
&\iff -1 < \frac{1 + 3\text{th}\,(x)}{3 + \text{th}\,(x)} < 1 \text{ car } \text{th}\,(x) \in ]-1, 1[ \text{ donc } 3 + \text{th}\,(x) \neq 0\\
&\iff -3 - \text{th}\,(x) < 1 + 3\text{th}\,(x) < 3 + \text{th}\,(x) \text{ car } 3 + \text{th}\,(x) > 0\\
&\iff \begin{cases} -4 & < 4\text{th}\,(x)\\ 2\text{th}\,(x) & < 2 \end{cases}\\
&\iff -1 < \text{th}\,(x) < 1.
\end{aligned}$$

   Or, pour tout réel $x$, on a $\text{th}\,(x) \in ]-1, 1[$. D'après cette démonstration, $f$ est définie sur $\mathbb{R}$. On a vu que Argth est dérivable sur $]-1, 1[$. Par composition, $f$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

5. Pour tout réel $x$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \text{Argth}'\left(\frac{1+3\text{th}(x)}{3+\text{th}(x)}\right) \times \frac{3\text{th}'(x)(3+\text{th}(x)) - \text{th}'(x)(1+3\text{th}(x))}{(3+\text{th}(x))^2} \\ &= \text{Argth}'\left(\frac{1+3\text{th}(x)}{3+\text{th}(x)}\right) \times \frac{8\text{th}'(x)}{(3+\text{th}(x))^2}. \end{aligned}$$

On a vu que, pour tout $y$ de $]-1,1[$, on a :

$$\text{Argth}'(y) = \frac{1}{1-y^2}.$$

On peut alors terminer notre calcul de dérivée. Pour tout réel $x$, on a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \text{Argth}'\left(\frac{1+3\text{th}(x)}{3+\text{th}(x)}\right) \times \frac{8\text{th}'(x)}{(3+\text{th}(x))^2} \\ &= \frac{1}{1-\left(\frac{1+3\text{th}(x)}{3+\text{th}(x)}\right)^2} \times \frac{8(1-\text{th}^2(x))}{(3+\text{th}(x))^2} \\ &= \frac{8(1-\text{th}^2(x))}{(3+\text{th}(x))^2-(1+3\text{th}(x))^2} \\ &= \frac{8-8\text{th}^2(x)}{9+6\text{th}(x)+\text{th}^2(x)-1-6\text{th}(x)-9\text{th}^2(x)} \\ &= \frac{8-8\text{th}^2(x)}{8-8\text{th}^2(x)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

$f$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto 1$. On déduit des calculs précédents qu'il existe un réel $a$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + a.$$

De $f(0) = \text{Argth}\left(\frac{1}{3}\right)$, soit $f(0) = \ln(\sqrt{2})$, on déduit que, pour tout réel $x$, on a :

$$f(x) = x + \ln(\sqrt{2}).$$

**Commentaires**

Pour comprendre $\text{Argth}\,'(y) = \dfrac{1}{\text{th}\,'(\text{Argth}\,(y))}$ et le domaine de dérivabilité de Argth , prenons une fonction $f$ dérivable sur $I$ et bijective sur $I$. Pour trouver l'ensemble sur lequel $f^{-1}$ est dérivable, il faut d'abord chercher la partie $J$ de $I$ sur laquelle $f'$ ne s'annule pas et en prendre l'image par $f$ (forcément, l'ensemble de dérivabilité de $f^{-1}$ est une partie de l'ensemble de définition de $f^{-1}$ donc une partie de l'ensemble d'arrivée de $f$). $f^{-1}$ est dérivable sur $f(J)$. D'autre part, $\forall x \in f(J)$, on a : $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$. Pour retrouver cette formule, partez de l'égalité évidente $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ que vous dérivez comme une composée :

$$((f^{-1})' \circ f) \times f' = 1$$

ce qui donne, si $f'(x) \neq 0$, l'égalité $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$ puis celle voulue en posant $y = f(x)$ (soit $x = f^{-1}(y)$).

**Exercice 6**

Soit $n$ un entier naturel non nul. Pour tout réel $x$, on pose :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - \lfloor x \rfloor .$$

1. Démontrer que, pour tout réel $x$, pour tout entier $m$, on a :

$$\lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m.$$

2. Démontrer que, pour tout réel $x$, $f(x+1) - f(x) = 1$.
3. Que peut-on en déduire pour $g$ ?
4. En déduire que : $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$.
5. En déduire que, pour tout entier $m$, on a : $\left\lfloor \dfrac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{m+1}{2} \right\rfloor = m$.

**Indication**

Rappelons que $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $x$. Pensez à bien réinvestir les questions, la question 2 donne la réponse à la question 3 puis celle-ci donne la réponse de la question 4. Pour la question 4, commencez par calculer $g(x)$ pour $x$ dans $[0, 1[$ puis utilisez la propriété découverte dans la question $3$.

# Solution 6

1. Soient $x$ un réel et $m$ un entier.

**Commentaires**

On rappelle que $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier plus petit que $x$, c'est comme ça qu'on le calcule. Attention, $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ et $\lfloor x \times y \rfloor = \lfloor x \rfloor \times \lfloor y \rfloor$ sont des propriétés fausses en général. Avancez avec prudence!

   (a) Comme $\lfloor x \rfloor \leqslant x$, on a bien $\lfloor x \rfloor + m \leqslant x + m$.

   (b) Soit $p$ un entier tel que $p \leqslant x + m$. Dans ce cas $p - m \leqslant x$. Or $p - m$ est un entier, on en déduit, d'après les propriétés de $\lfloor x \rfloor$, que :

$$p - m \leqslant \lfloor x \rfloor$$

   ce qui implique $p \leqslant \lfloor x \rfloor + m$.

   De plus, par somme, $\lfloor x \rfloor + m$ est un entier. $\lfloor x \rfloor + m$ est donc le plus grand entier plus petit que $x + m$, ce qui signifie que $\lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$.

2. D'après la définition de $f$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x+1) - f(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+1+k}{n} \right\rfloor\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor \text{ par changement d'indice} \\
&= \left\lfloor \frac{x+n}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x+0}{n} \right\rfloor \text{par télescopage} \\
&= \left\lfloor \frac{x}{n} + 1 \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor + 1 - \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \text{ d'après la question précédente} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

3. On en déduit :

$$\begin{aligned}
g(x+1) &= f(x) + 1 - \lfloor x + 1 \rfloor \\
&= f(x) + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 \text{ d'après la première question} \\
&= g(x).
\end{aligned}$$

   $g$ est donc une fonction périodique de période 1.

4. Soit $x$ un élément de $[0; 1[$. Pour tout $k$ de $[\![0, n-1]\!]$, on a : $0 \leqslant x + k < n$ et donc $0 \leqslant \dfrac{x+k}{n} < 1$. Ainsi, pour tout $k$ de $[\![0, n-1]\!]$, on a :

$$\left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor = 0$$

ce qui par somme donne $f(x) = 0$ puis $g(x) = 0$. Par 1-périodicité de $g$, on peut donc affirmer que $g$ est nulle ce que l'on peut traduire ainsi :

$$f : x \mapsto \lfloor x \rfloor .$$

5. On a donc prouvé que, pour tout entier naturel non nul $n$, pour tout réel $x$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor .$$

Soit $m$ un entier. On a donc en particulier, puisque 2 est un entier naturel non nul et $m$ un réel, l'égalité suivante :

$$\sum_{k=0}^{1} \left\lfloor \frac{m+k}{2} \right\rfloor = \lfloor m \rfloor$$

ce qui donne, puisque $\lfloor m \rfloor = m$ car $m$ est un entier, directement la réponse souhaitée.

CHAPITRE 2

# INTÉGRATION

## 2.1 Exercices avec préparation

**Exercice 1 (Oral HEC 2016)**

1. **Cours :** Fonctions équivalentes au voisinage de $+\infty$.
2. Soient $n$ un entier naturel et $f_n$ la fonction : $\begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-tx}\,dt \end{cases}$.
   (a) Montrer que $f_n$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+$.
   (b) Étudier la suite $(f_n(0))_{n\geqslant 0}$. En déduire la limite de $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$.
3. (a) Soit $x$ un réel strictement positif. Montrer que :
   $$f_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} f_n(x) - \frac{e^{-x}}{x} \text{ si } n \geqslant 1.$$
   (b) Expliciter les fonctions $f_0$ et $f_1$.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.
4. (a) Montrer que tout réel $x > 0$, on a : $f_n(x) = \dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x u^n e^{-u}\,du$.
   (b) En déduire que la fonction $f_n$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée $f'_n$.
   (c) Comparer pour tout réel $y \geqslant 0$, les deux réels $y$ et $1 - e^{-y}$. En déduire que la fonction $f_n$ est continue en $0$.

**Indication**

On va utiliser à peu près tous les outils possibles dans cet exercice :

- Croissance de l'intégration dans les questions 2 (comparer $f(x)$ et $f(y)$ avec $0 \leqslant x \leqslant y$) et 4)c),
- Intégration par parties dans la question 3)a) dont le résultat est réinvesti en question 3)b) et 3)c),
- Changement de variable dans la question 4)a)
- Théorème fondamental de l'analyse dans la question 4)b).

# Solution 1

1. **Cours :** On dit que deux fonctions $f$ et $g$ sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ si $\lim_{x \to +\infty} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = 1$.

2. (a) Soient $x$ et $y$ deux réels tels que $0 \leqslant x \leqslant y$. Soit $t$ un réel de $[0, 1]$, on a $-tx \geqslant -ty$, puis, par croissance de exp, $\exp(-tx) \geqslant \exp(-ty)$, puis, comme $t^n \geqslant 0$, ces inégalités :

$$t^n \exp(-tx) \geqslant t^n \exp(-ty) \geqslant 0.$$

Par croissance de l'intégration, invocable car les bornes sont dans le sens croissant et les intégrandes sont continues, on obtient :

$$\int_0^1 t^n e^{-tx} \, dt \geqslant \int_0^1 t^n e^{-ty} \, dt \geqslant 0$$

ce qui signifie $f_n(x) \geqslant f_n(y) \geqslant 0$ et prouve la décroissance et la positivité de $f_n$.

(b) Sans problème, on obtient : $f_n(0) = \frac{1}{n+1}$. $(f_n(0))_{n \geqslant 0}$ est donc une suite convergente et décroissante, elle converge vers $0$. On a vu que $f_n$ était une fonction décroissante et positive, on en déduit, si on fixe $x$ un réel positif, que :

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(0).$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} (0) = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} (f_n(0)) = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim_{n \to +\infty} (f_n(x)) = 0$.

3. (a) Comme $x \neq 0$, par intégration par parties, ce qui est possible car les fonctions $t \mapsto -\frac{e^{-tx}}{x}$ et $t \mapsto t^{n+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, on obtient :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \left[ -\frac{1}{x} e^{-tx} t^{n+1} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{x} e^{-tx} (n+1) t^n \, dt \\ &= -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{n+1}{x} f_n(x). \end{aligned}$$

**Commentaires**

Intégrer du produit n'est pas une évidence. Quand on a du produit ou quand on veut faire une intégration par parties, on exprime ce qu'on veut intégrer sous forme d'un produit (quitte à écrire l'intégrande $f(t)$ sous la forme $1 \times f(t)$) :

- L'un des deux termes jouera le rôle de $u'$, on va l'intégrer.
- L'autre jouera le rôle de $v$, on va le dériver.

C'est à vous de choisir judicieusement la partie de la fonction que vous souhaitez dériver et celle que vous voulez intégrer. Si on part de $\int_a^b u'(t)v(t)dt$, il reste alors à calculer $\int_a^b u(t)v'(t)dt$ : Observez cette dernière intégrale et demandez vous si elle est plus jolie que celle d'origine (sinon, ça ne sert à rien!).

(b) Soit $x$ un réel positif, on a :

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \int_0^1 e^{-tx}\, dt \\ &= \left[-\frac{1}{x}e^{-tx}\right]_0^1 \\ &= \frac{1-e^{-x}}{x}. \end{aligned}$$

En utilisant la question précédente, on en déduit :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{0+1}{x} f_0(x) \\ &= \frac{1-e^{-x}-xe^{-x}}{x^2}. \end{aligned}$$

(c) On peut faire une petite récurrence. Puisque $\lim_{x\to+\infty}\left(1-e^{-x}\right) = 1$, on a bien $\frac{1-e^{-x}}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, ce que l'on peut écrire ainsi :

$$f_0(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{0!}{x^{0+1}}.$$

Soit un entier naturel $n$ tel que $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{x^{n+1}}$. Grâce à la question 3.a), on peut affirmer que :

$$\frac{x^{n+2}}{(n+1)!} f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} f_n(x) - \frac{x^{n+1}e^{-x}}{(n+1)!}.$$

Le second membre tend vers 1 lorsque $x$ tend vers $+\infty$ par somme et d'après l'hypothèse de récurrence. Cela achève notre récurrence car le fait que $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{n+2}}{(n+1)!} f_{n+1}(x)\right) = 1$ signifie précisément que $f_{n+1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}$.