

Pascal Romon

Master
Écoles
d'ingénieurs

Introduction à la géométrie différentielle discrète

2^e édition



ellipses

Chapitre I

Courbes discrètes planes

Les **courbes discrètes planes** (aussi appelées **courbes polygonales**) sont au premier abord des objets très simples : une séquence de points reliés par des arêtes. On peut les voir comme un cas élémentaire de graphe plan. Si la séquence est périodique, la courbe est dite **fermée** (ou périodique).

L'objectif est d'en étudier les propriétés différentielles en suivant la ligne de cet ouvrage, à savoir en caractérisant une quantité différentielle par la propriété géométrique à laquelle elle se rapporte. Pour définir la courbure en fonction des quantités discrètes naturelles que sont les longueurs et les angles, on cherchera des propriétés analogues à celles de courbes continues. Or force sera de constater que différentes propriétés géométriques débouchent sur différentes notions de courbure discrète, et de fait certaines notions passent difficilement — ou différemment — du continu au discret. Cette différence est simple à comprendre dans le cas plan ; on la retrouvera sous une forme plus complexe dans le cas des surfaces de l'espace.

Les trois définitions¹ continues de la courbure que nous prendrons comme modèle seront :

1. la courbure vue comme variation de l'angle de la tangente (approche de GAUSS–BONNET) :

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds}$$

où φ relève l'angle du vecteur tangent et s est la **longueur d'arc** ; dans ce cas la courbure mesure la vitesse à laquelle la tangente tourne par unité de longueur ;

2. la courbure par approximation : $\kappa = 1/r$ au point p , où r est le rayon du cercle passant par p qui « colle le mieux » à la courbe, appelé **cercle osculateur** (en particulier il est tangent à la courbe) ;
3. la courbure liée aux variations de longueur (approche de STEINER) : quand on déforme la courbe $t \mapsto \gamma(t)$ en une courbe parallèle $t \mapsto \gamma_\varepsilon(t) = \gamma(t) + \varepsilon \vec{n}(t)$, où $\vec{n}$ est

1. Ces définitions supposent évidemment des hypothèses de régularité sur la courbe, typiquement que celle-ci soit une courbe paramétrée $t \mapsto \gamma(t)$ de classe $\mathcal{C}^2$, et *régulière* au sens où $\gamma'(t)$ ne s'annule jamais.

le vecteur normal et f une fonction quelconque, la longueur de la courbe déformée est donnée par la formule de STEINER (A.3) :

$$L(\gamma_\varepsilon) = L(\gamma) - \varepsilon \int \kappa(s) ds.$$

De façon plus générale, quand on déforme γ en $\gamma + \varepsilon f \vec{n}$, la variation de la longueur est donnée par

$$L(\gamma_\varepsilon) = L(\gamma) - \varepsilon \int f(s) \kappa(s) ds + o(\varepsilon).$$

Ainsi la courbure κ mesure-t-elle les variations de longueur au premier ordre en ε .

Note 1. Même si cela enrichit cette étude (et est, à ce titre, recommandé), il n'est absolument pas nécessaire de connaître les formules ci-dessus pour comprendre la suite. L'approche discrète est techniquement beaucoup plus élémentaire. Nous référons néanmoins le lecteur à [Pha99], [Laf10] ou [MR05], ainsi qu'à la section A.1 de l'annexe pour un (très) rapide survol des notions et formules.

1 Courbes discrètes et variation angulaire

Une **courbe discrète** ou **courbe polygonale** plane est la donnée d'une suite (finie ou infinie) de points p_i du plan, appelés **sommets**, reliés par des segments $e_i = (p_i p_{i+1})$ appelés **arêtes**, notés aussi $[p_i, p_{i+1}]$. Si $p_{n+i} = p_i$, la courbe est dite **périodique** ou **fermée**. Nous n'excluons pas que les arêtes se croisent ou que certains sommets coïncident, mais il est en général requis que les arêtes soient de longueur non nulle, ou, ce qui est équivalent, que deux sommets consécutifs soient distincts ; la courbe est dite **régulière** ou **non-dégénérée** ou **immergée**.

On définit la longueur $\ell_i = \|\overrightarrow{p_i p_{i+1}}\|$ de l'arête $(p_i p_{i+1})$ et la longueur totale L comme la somme des longueurs (dans le cas d'un nombre fini de points) : $L = \sum_i \ell_i$. Dans le plan, l'autre invariant naturel est l'**angle de rotation** θ_i entre les vecteur $\overrightarrow{p_{i-1} p_i}$ et $\overrightarrow{p_i p_{i+1}}$, qui est choisi entre $-\pi$ et π . (Attention : ce n'est pas l'angle entre les deux segments, qui est dans ce cas de $\pi - \theta_i$.) Le cas limite où l'angle est $\pm\pi$ correspond à deux arêtes superposées, autrement dit un point de rebroussement, et le choix du signe dépendra du contexte (par exemple si la courbe borde un domaine du plan).

Longueurs et angles de rotation sont les seuls invariants². En effet, on peut démontrer (beaucoup plus simplement que dans le cas continu) l'analogue du théorème de BONNET plan :

Théorème 1. *La donnée d'une suite de longueurs (ℓ_i) et d'angles (θ_i) détermine toujours une courbe polygonale, et celle-ci est unique à translation et rotation près.*

En effet, il suffit de fixer un point de départ p_0 et une direction de départ $\vec{v}_0$ de longueur 1 pour fixer le point suivant (ou précédent) via $p_1 = p_0 + \ell_0 \vec{v}_0$; le vecteur $\vec{u}_1$ est déterminé par $(\vec{v}_0, \vec{v}_1) = \theta_1$, ce qui permet de construire p_2 et ainsi de suite.

2. Comme longueur et courbure en géométrie euclidienne (noter que dans le théorème de BONNET la longueur est implicite).

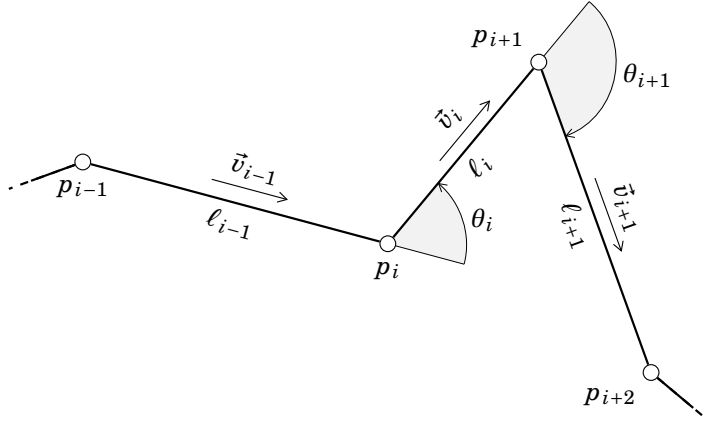


FIGURE 1 – Courbe discrète avec angles de rotation θ_i , longueurs ℓ_i et vecteurs directeurs $\vec{v}_i$.

Intuitivement, l'angle de rotation θ_i semble jouer le rôle de la courbure dans le cadre discret : si la courbe discrète reste droite le long des arêtes $(p_{i-1}p_i)$ et (p_ip_{i+1}) , elle ne possède pas de courbure ($\theta_i = 0$), et quand elle tourne vers sa gauche elle est courbée positivement, et négativement vers sa droite. On retrouve même l'analogie du cas continu. Pour une courbe continue régulière,

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds}$$

où φ est l'angle du vecteur tangent $\vec{t}$: $\vec{t} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$. Ainsi la variation angulaire entre deux positions s_1, s_2 est

$$\theta = \Delta\varphi = \varphi(s_2) - \varphi(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} \kappa(s) ds$$

(théorème de GAUSS–BONNET local, cf. théorème A.1, page 173, en annexe). Pour une courbe discrète non-dégénérée, vue comme une courbe continue par morceaux, on note $\vec{v}_i := (\overrightarrow{p_ip_{i+1}})/\ell_i$ le vecteur directeur de l'arête (p_ip_{i+1}) — autrement dit le vecteur tangent — et alors $\theta_i = (\vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i)$ représente bien la variation d'angle de la tangente.

Remarque 1. On peut tout aussi bien considérer le vecteur normal $\vec{n}$ au lieu du vecteur tangent³ $\vec{t}$, mais contrairement au continu, on ne peut définir aisément la normale aux

3. Ce qui est équivalent pour les courbes planes mais pas pour les courbes gauches. Pour les surfaces, il sera indispensable de considérer le vecteur normal, car il n'y a pas un seul vecteur tangent mais un plan tangent.

sommets (voir plus bas néanmoins). Par contre la normale le long d'une arête est bien définie : sur l'arête $e_i = (p_i p_{i+1})$, $\vec{n}_i$ est le vecteur de longueur 1, orthogonal à $\vec{v}_i$ et tel que la base $(\vec{v}_i, \vec{n}_i)$ soit positivement orientée (c-à-d que $\vec{n}_i$ pointe vers la gauche de la courbe, par rapport au sens de parcours). On peut caractériser la courbure continue comme la variation infinitésimale du vecteur normal, ce qui découle directement de la formule $\vec{n} = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$.

Cette définition de la courbure par les angles θ_i satisfait le théorème de GAUSS-BONNET, à condition de considérer que la courbure est nulle le long des arêtes, et infinie au sommet, d'intégrale égale à θ_i (mathématiquement on dira que $k_i = \theta_i$ est une masse de DIRAC en p_i). Il vient alors

$$\int \kappa ds = \sum_i \theta_i .$$

Cela permet en particulier de retrouver les conséquences topologiques de GAUSS-BONNET : si la courbe est fermée (c-à-d $p_{n+i} = p_i$ pour un certain n), on peut définir le **nombre de tours** (*rotation number* ou *winding number*)

$$N = \frac{1}{2\pi} \sum_1^n \theta_i$$

qui clairement ne dépend pas du point de départ de la courbe. La périodicité garantit que ce nombre est un entier. En effet, attribuons un angle φ_i à $\vec{v}_i$, de sorte que $\vec{v}_i = (\cos\varphi_i, \sin\varphi_i)$; (φ_i) est appelé un **relèvement** des vecteurs $\vec{v}_i$. Cette mesure d'angle φ_i n'est pas unique mais définie à 2π près. Par contre, dès que l'on en a fixé un (par exemple φ_1), les autres se déduisent de proche en proche puisque $\varphi_i - \varphi_{i-1} = \theta_i$. Or, dans cette définition, rien ne dit que φ_{i+n} sera égal à φ_i ; mais ils seront toujours congrus modulo 2π , puisqu'ils correspondent à un même vecteur $\vec{v}_i$. En particulier il existe un entier relatif N tel que $\varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi N$. Alors

$$\sum_1^n \theta_i = \sum_1^n (\varphi_i - \varphi_{i-1}) = \varphi_n - \varphi_0 = 2\pi N \text{ pour } N \in \mathbb{Z}.$$

Cette conception de la courbure comme une mesure concentrée aux sommets a néanmoins plusieurs défauts : (i) on ne travaille plus avec des fonctions mais avec des mesures, et (ii) on perd tout autant l'homogénéité : ces mesures (les angles θ_i) ne changent pas quand une arête s'allonge indépendamment des autres, ce qui ne correspond pas à notre notion intuitive de courbure. C'est la conséquence logique du fait que θ_i est une quantité intégrale là où la courbure κ dans le cas continu est une quantité dérivée (θ_i valant $\int \kappa ds$). Une façon de compenser ce phénomène est de diviser la courbure par un facteur lié à la longueur et de poser

$$\kappa_i = \frac{2\theta_i}{\ell_{i-1} + \ell_i} \tag{1}$$

ce qui donne l'homogénéité recherchée. On retrouve aussi la définition de la courbure comme un quotient entre angle et longueur. En effet, on considère la normale $\vec{n}$ comme une application à valeur dans le cercle unité et on considère la longueur de son image

(appelée **image de GAUSS**) entre deux positions successives. Or cette longueur est simplement la variation $\varphi(s_2) - \varphi(s_1)$. L'équation continue $\kappa = \frac{d\varphi}{ds}$ est le quotient infinitésimal entre la longueur de l'image de GAUSS $d\varphi$ et la longueur le long de la courbe ds . La définition 1 ci-dessus revient à échantillonner notre courbe discrète en les milieux m_i de chaque arête, la distance le long de la courbe entre m_{i-1} et m_i étant $\frac{\ell_{i-1} + \ell_i}{2}$.

Plus généralement, cela équivaut à remplacer les fonctions définies en des points (ou des mesures de DIRAC) par des fonctions interpolantes. L'exemple ci-dessus revient à interpoler par des fonctions constantes par morceaux, discontinues aux milieux des arêtes. Un autre exemple simple est celui des fonctions affines par morceaux (aussi appelées PL pour *piecewise linear*, cf. annexe C). On considère que la fonction courbure est une fonction affine de la longueur d'arc, valant κ_i en p_i ; dès lors, entre p_i et p_{i+1} , tout point s'écrit $p = p(t) = (1-t)p_i + tp_{i+1}$ et on pose

$$\kappa(t) = (1-t)\kappa_i + t\kappa_{i+1}.$$

En intégrant le long d'une courbe fermée $p_1, \dots, p_n$, il vient

$$\int \kappa d\ell = \sum_{i=1}^n \int_{p_i}^{p_{i+1}} \kappa d\ell = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \kappa(t) \ell_i dt = \sum_{i=1}^n \frac{\kappa_i + \kappa_{i+1}}{2} \ell_i = \sum_{i=1}^n \frac{\ell_{i-1} + \ell_i}{2} \kappa_i.$$

(Sur une courbe finie non fermée, il y a des termes isolés aux extrémités.) Si l'on veut retrouver GAUSS–BONNET, il faut choisir $\frac{\ell_{i-1} + \ell_i}{2} \kappa_i = \theta_i$. Mais on peut bien sûr choisir d'autres interpolations que la linéaire pour la courbure (par exemple des splines).

2 Cercles osculateurs discrets

Une autre approche, classique, de la courbure vient de l'approximation de la courbe par un cercle. Le cercle dit **osculateur** est, parmi les cercles tangents à la courbe en p , celui qui « colle le mieux » à celle-ci, autrement dit coïncide à l'ordre 2 (tandis que la tangente ne coïncide qu'à l'ordre 1). Le rayon R du cercle osculateur est l'inverse de la courbure κ (et si la courbure est nulle le cercle dégénère en une droite).

Cette définition ne s'applique évidemment pas directement à une courbe polygonale. On peut néanmoins l'adapter, et de plusieurs façons.

Un premier choix est naturel : prenons le cercle circonscrit aux trois points consécutifs p_{i-1}, p_i, p_{i+1} ; la **courbure de MENGER** est l'inverse du rayon r de ce cercle circonscrit. On calcule que

$$\kappa_i = \kappa(p_i) = \frac{1}{r_i} = \frac{4 \text{aire}(p_{i-1}p_i p_{i+1})}{\| \overrightarrow{p_i p_{i-1}} \| \| \overrightarrow{p_i p_{i+1}} \| \| \overrightarrow{p_{i+1} p_{i-1}} \|} = \frac{2 \sin \alpha_i}{\| \overrightarrow{p_{i-1} p_{i+1}} \|} = \frac{2 \sin \theta_i}{\| \overrightarrow{p_{i-1} p_{i+1}} \|} \quad (2)$$

où $\alpha_i = \pi - \theta_i$ est l'angle en p_i du triangle $(p_{i-1}p_i p_{i+1})$. Noter que cette quantité peut être négative, ce qui correspond à une courbe tournant vers sa droite (le rayon étant alors compté négativement).

Si les points sont alignés sur une droite et consécutifs, il n'y a pas de cercle circonscrit mais une droite, ce qui donne une courbure nulle (et en effet on peut considérer la droite comme le cas limite du cercle quand son rayon tend vers l'infini).

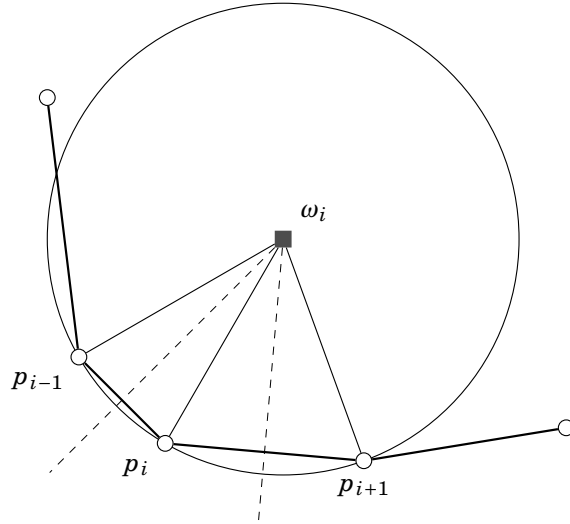


FIGURE 2 – Cercle circonscrit à trois sommets consécutifs. Le centre du cercle ω_i est l'intersection des médiatrices de deux arêtes $(p_{i-1}p_i)$ et $(p_i p_{i+1})$. L'inverse de son rayon est la courbure de Menger.

La courbure de Menger dépend de la longueur des arêtes, ce que l'on peut (ou non) compenser en prenant des arêtes de longueur constante, analogue discret de la paramétrisation par longueur d'arc. Elle présente une incohérence importante comparée au cas continu : les points de rebroussement (quand $\overrightarrow{p_{i-1}p_i}$ et $\overrightarrow{p_i p_{i+1}}$ sont parallèles et de sens opposé), qui, dans le cas continu, possèdent une courbure infinie. Ici, si les longueurs sont identiques, $p_{i-1} = p_{i+1}$, et il y a une infinité de cercles passant par p_i et $p_{i-1} = p_{i+1}$, dont le plus petit est de rayon 2 ; la courbure de Menger est donc mal définie, et comprise entre 0 et 1/2. Et si $p_{i-1} \neq p_{i+1}$, alors il n'y a pas de cercle passant par ces trois points, mais une droite, donc de courbure nulle, ce qui est absurde dans ce cas.

Une seconde possibilité consiste à prendre le cercle tangent à trois arêtes consécutives $(p_{i-1}p_i)$, $(p_i p_{i+1})$ et $(p_{i+1}p_{i+2})$, ce qui n'est possible que si les deux angles consécutifs θ_i, θ_{i+1} sont de même signe (formant un « U » et non un « Z »). On peut donc construire ces cercles osculateurs pour des courbes **localement convexes**, c-à-d dont les angles θ_i sont de signe constant. La courbure est alors une fonction attachée aux arêtes et non aux sommets. Sur l'arête $e_i = (p_i p_{i+1})$

$$\kappa_i = \kappa(e_i) = \frac{1}{r_i} = \frac{1}{\ell_i} \frac{\tan \frac{\alpha_i}{2} + \tan \frac{\alpha_{i+1}}{2}}{\tan \frac{\alpha_i}{2} \tan \frac{\alpha_{i+1}}{2}} = \frac{1}{\ell_i} \frac{\cot \frac{\theta_i}{2} + \cot \frac{\theta_{i+1}}{2}}{\cot \frac{\theta_i}{2} \cot \frac{\theta_{i+1}}{2}}$$

où $\alpha_i = \pi - \theta_i$. Noter que si $\theta_i = 0$ (les deux arêtes successives e_{i-1} et e_i sont alignées), $\cot \frac{\theta_i}{2} = \infty$, mais la définition reste cohérente si l'on prend le cercle tangent à e_i et e_{i+1}

en leur point commun p_{i+1} ; en passant à la limite, on retrouve $\kappa_i = \frac{\tan(\theta_{i+1}/2)}{\ell_i}$. Si les trois arêtes successives sont alignées, il n'y a pas de cercles tangent mais une droite, et la courbure κ est nulle. (On remarquera que la formule ci-dessus s'applique en fait y compris à des courbes non localement convexes, mais on perd l'interprétation géométrique.)

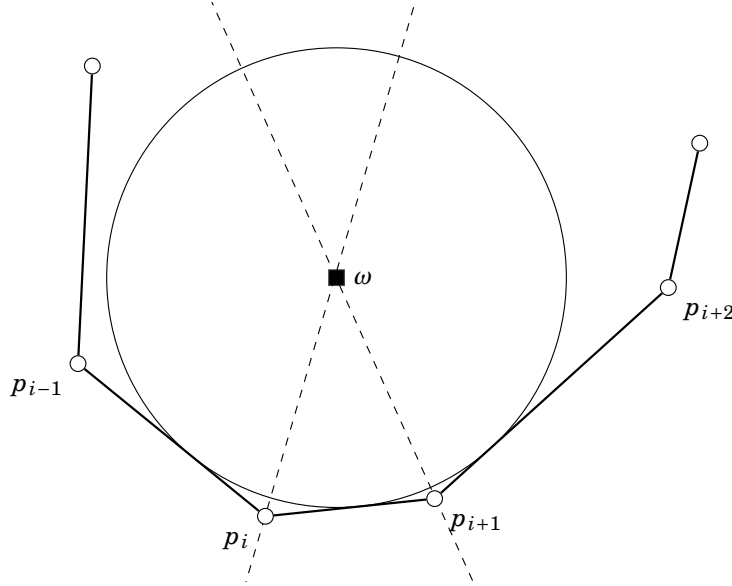


FIGURE 3 – Cercle tangent à trois arêtes consécutives. Le centre du cercle associé à l'arête $e_i = (p_i p_{i+1})$ est l'intersection des deux bissectrices passant par les sommets p_i et p_{i+1} .

3 La courbure comme variation de la longueur

On peut considérer la longueur totale (sous réserve qu'elle soit finie⁴) comme une fonction $L = L(p_1, \dots, p_n)$ des positions $p_i = (x_i, y_i)$:

$$L = L(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \ell_i = \sum_{i=1}^{n-1} \|\vec{p_i p_{i+1}}\| = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

autrement dit une fonction de $2n$ variables réelles. Tant que les points sont distincts, cette fonction est différentiable. Pour mesurer l'influence de la position du point p_i sur L , on calcule son **gradient partiel** en fonction de p_i . Rappelons que

$$\|\vec{v} + \vec{u}\| = \|\vec{v}\| + \vec{u} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} + \frac{\|\vec{v}\|}{2} \left(\left\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{v}\|} \right\|^2 - \left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{v}\|} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right)^2 \right) + o(\|\vec{u}\|^2)$$

4. Ou même dans le cas d'une longueur totale infinie, en ne considérant qu'un morceau de la courbe, par exemple p_{i-1}, p_i, p_{i+1} .

où $o(\|\vec{u}\|^2)$ dénote un terme négligeable devant $\|\vec{u}\|^2$. (Remarquons en passant que le terme quadratique est toujours positif ou nul, et nul si et seulement si $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$.) Alors, si l'on déplace le i -ème sommet p_i , seules les longueurs ℓ_{i-1} et ℓ_i changent et

$$\begin{aligned} L(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i + \vec{u}, p_{i+1}, \dots, p_n) &= L(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \dots, p_n) \\ &\quad + (\vec{v}_{i-1} - \vec{v}_i) \cdot \vec{u} \\ &\quad + \frac{\|\vec{u}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v}_{i-1})^2}{2\ell_{i-1}} + \frac{\|\vec{u}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v}_i)^2}{2\ell_i} + o(\|\vec{u}\|^2) \end{aligned}$$

où $\vec{v}_i := (\overrightarrow{p_i p_{i+1}})/\ell_i$ est le vecteur directeur orienté de longueur 1 de l'arête $(p_i p_{i+1})$. Par conséquent le gradient partiel en p_i de la fonction longueur est $\vec{v}_{i-1} - \vec{v}_i$, et par analogie avec le cas continu, nous appellerons **vecteur courbure moyenne** $\vec{H}_i$ l'opposé du gradient :

$$\vec{H}_i = \vec{H}(p_i) = \vec{v}_i - \vec{v}_{i-1}.$$

Le vecteur courbure moyenne pointe le long de la bissectrice *intérieure* de l'angle en p_i et c'est par conséquent la direction dite *de plus grande pente* pour L , c-à-d que $\vec{H}_i$ indique comment déplacer p_i pour diminuer la longueur totale *le plus efficacement possible*. On constate évidemment que $\vec{H}_i$ dépend des points voisins ; de plus sa longueur est $\|\vec{H}_i\| = 2 \left| \sin \frac{\theta_i}{2} \right|$. En particulier si le point est plat ($\theta_i = 0$), on ne peut pas changer la longueur à l'ordre 1 en déplaçant p_i (et même, la longueur ne peut qu'augmenter, comme le montrent les formules et la remarque ci-dessus). À l'inverse, si le segment est replié ($\theta_i = \pi$) la longueur de $\vec{H}_i$ est 2. On peut alors définir la courbure en p_i comme la longueur algébrique de $\vec{H}_i$ (avec un signe donc) :

$$H_i = 2 \sin \frac{\theta_i}{2}.$$

Cette courbure est appelée courbure moyenne et pour les courbes continues planes elle coïncide avec la courbure usuelle ; on verra qu'il en va autrement pour les surfaces de l'espace.

Remarque 2. On ne peut pas reprendre cette définition pour la courbure aux sommets extrémités, puisqu'il manque un point (précédent ou suivant), un défaut que l'on retrouve dans la plupart des définitions. Pourtant ici le gradient de l'aire est bien défini et vaut $-\vec{v}_1$ en p_1 et $\vec{v}_{n-1}$ en p_n , qui sont donc de longueur 1.

On généralise l'idée de déformation ponctuelle à une déformation globale de la courbe : si $\vec{u}_i$ est une suite de déplacements des sommets p_i , alors

$$L(p_1 + \varepsilon \vec{u}_1, \dots, p_n + \varepsilon \vec{u}_n) = L(p_1, \dots, p_n) - \varepsilon \sum_i \vec{u}_i \cdot \vec{H}_i + o(\varepsilon).$$

On constate que seuls les déplacements parallèles à $\vec{H}_i$ en p_i peuvent changer la longueur (à l'ordre 1). Il est alors naturel de définir le vecteur normal en p_i par la propriété que $\vec{H}_i = H_i \vec{n}_i$. Le lecteur vérifiera que le vecteur normal est bien toujours orienté vers la gauche de la courbe (ce qui est la convention standard). Quand H_i est nul, $\vec{v}_{i-1} = \vec{v}_i$ et on définit $\vec{n}_i$ comme le vecteur de longueur 1 orthogonal à $\vec{v}_i$ et choisi de

sorte que le repère $(\vec{v}_i, \vec{n}_i)$ soit positivement orienté. Ces deux définitions sont cohérentes quand θ_i tend vers zéro.

Donnons-nous maintenant une fonction f définie par ses valeurs f_i aux sommets et considérons la déformation (dite normale) de la courbe définie pour tout ε par $p_i(\varepsilon) = p_i + \varepsilon f_i \vec{n}_i$. Alors la formule précédente se réécrit comme

$$L(p_1(\varepsilon), \dots, p_n(\varepsilon)) = L(p_1, \dots, p_n) - \varepsilon \sum_{i=1}^n f_i H_i + o(\varepsilon)$$

et l'on retrouve une formule analogue à celle de STEINER.

Un défaut néanmoins est immédiat : les différentes notions de courbure ci-dessus ne sont pas homogènes car ce sont des quantités intégrales. Par conséquent une courbe homothétique de rapport λ aura les mêmes invariants angulaires, là on attendrait une courbure divisée par λ (la courbure continue étant l'inverse d'une longueur). On peut corriger ce problème en divisant par un terme de longueur, comme cela est fait en section 1, par exemple

$$\kappa_i = \frac{2H_i}{\ell_i + \ell_{i-1}} = \frac{4 \sin \frac{\theta_i}{2}}{\ell_i + \ell_{i-1}}. \quad (3)$$

Ce point de vue est plus abstrait et plus éloigné de la géométrie classique vue dans les sections précédentes, mais il est très fructueux, par exemple quand on cherche des géodésiques ou « plus courts chemins », ou bien quand on cherche à « lisser » une courbe. En effet, quand la courbe discrète est obtenue en faisant une approximation d'une courbe continue et que l'échantillonnage est *bruité*, autrement dit que les points p_i ne sont pas les « vrais » points mais sont décalés de façon aléatoire, alors ce bruit crée de la courbure. On retrouve une meilleure approximation en diminuant la courbure ou plus simplement en diminuant la longueur des segments, comme c'est expliqué en §5.

4 Convergence et approximation

Bien que cela ne soit pas *stricto sensu* indispensable à la théorie, il est intéressant de valider les multiples notions de courbure en les comparant à ce que donnerait une courbe continue, dont la courbe discrète ne serait qu'une approximation. C'est le problème de la *discrétisation*. On va voir que dans ce cas toutes les notions se rejoignent. On dit qu'elles convergent vers la courbure différentielle classique.

Ces démonstrations sont néanmoins ambiguës, car il faut définir soigneusement (i) ce qu'on entend par discrétisation, (ii) quelles hypothèses on impose à la courbe et (iii) quel type de convergence on souhaite obtenir. Comme on le verra dans le chapitre suivant, cette propriété de convergence cesse d'être vraie en dimension supérieure, ou alors avec des hypothèses beaucoup plus restrictives ou des types de convergence beaucoup plus faibles (voir §II.6).

Considérons une courbe régulière de classe $\mathcal{C}^2$ (de façon à pouvoir définir la courbure). Nous pouvons sans perte de généralité travailler localement autour de p_i et

supposer que la courbe est donnée comme le graphe d'une fonction $x \mapsto y(x)$. De plus, pour alléger les calculs nous supposons que $p_i = (x_i, y_i) = (0, 0)$, que la tangente à la courbe en p_i est horizontale, soit $y'(0) = 0$. Alors la courbe est décrite localement par $y(x) = \frac{1}{2}y''_0x^2 + o(x^2)$. Rappelons la formule (A.2) donnée en annexe, qui nous permet d'écrire finalement

$$y(x) = \frac{\kappa}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{où } \kappa \text{ est la courbure en } x = 0.$$

Nous ferons aussi l'hypothèse suivante (importante) sur l'échantillonnage, à savoir que $p_{i+1} = (\tau_i, y(\tau_i))$ et $p_{i-1} = (-\tau_{i-1}, y(-\tau_{i-1}))$ avec τ_i, τ_{i-1} positifs, tendant vers zéro simultanément (mais sans contrainte sur leurs vitesses de convergence respectives) :

$$\begin{aligned} \ell_i &= \tau_i \left(1 + \frac{\kappa^2}{8} \tau_i^2 + o(\tau_i^2) \right), \quad \ell_{i-1} = \tau_{i-1} \left(1 + \frac{\kappa^2}{8} \tau_{i-1}^2 + o(\tau_{i-1}^2) \right) \\ \overrightarrow{p_{i-1}p_i} \cdot \overrightarrow{p_i p_{i+1}} &= \tau_{i-1} \tau_i \left(1 - \frac{\kappa^2}{4} \tau_i \tau_{i-1} + o(\tau_{i-1} \tau_i) \right) \\ \cos \theta_i &= \frac{\overrightarrow{p_{i-1}p_i} \cdot \overrightarrow{p_i p_{i+1}}}{\ell_i \ell_{i-1}} = \frac{\left(1 - \frac{\kappa^2}{4} \tau_i \tau_{i-1} + o(\tau_{i-1} \tau_i) \right)}{\left(1 + \frac{\kappa^2}{8} \tau_{i-1}^2 + o(\tau_{i-1}^2) \right) \left(1 + \frac{\kappa^2}{8} \tau_i^2 + o(\tau_i^2) \right)} \\ &= \left(1 - \frac{\kappa^2}{4} \tau_i \tau_{i-1} + o(\tau_{i-1} \tau_i) \right) \left(1 - \frac{\kappa^2}{8} (\tau_{i-1}^2 + \tau_i^2) + o(\tau_{i-1}^2) + o(\tau_i^2) \right) \\ &= 1 - \frac{\kappa^2}{8} (\tau_i + \tau_{i-1})^2 + o(\tau_{i-1}^2) + o(\tau_i^2) + o(\tau_{i-1} \tau_i) = 1 - \frac{\theta_i^2}{2} + o(\tau^2) \end{aligned}$$

où $\tau = \max(\tau_{i-1}, \tau_i)$. Cela prouve que θ_i est au plus quadratique en τ_i, τ_{i-1} avec

$$\theta_i \sim \kappa \frac{\tau_{i-1} + \tau_i}{2}.$$

Évidemment quand les écarts τ_i, τ_{i-1} deviennent très petits, les arêtes successives sont très petites et quasiment alignées ($\theta_i \rightarrow 0$). Si l'on reprend maintenant la définition de la courbure discrète par la normale, donnée en (1),

$$\kappa_i = \frac{2\theta_i}{\ell_i + \ell_{i-1}} \sim \kappa \frac{\tau_{i-1} + \tau_i}{2} \frac{2}{\tau_{i-1} + \tau_i} = \kappa$$

et l'on comprend le sens de la division par les longueurs. La formule (3) est équivalente, puisque quand $\theta_i \rightarrow 0$, $2 \sin \frac{\theta_i}{2} \sim \theta_i$. Enfin la courbure de Menger donne le même résultat puisque $\|\overrightarrow{p_{i-1}p_i}\| \sim \ell_{i-1} + \ell_i$ et alors

$$\frac{2 \sin \theta_i}{\|p_{i-1} - p_{i+1}\|} \sim \frac{2 \sin \theta_i}{\ell_{i-1} + \ell_i} \sim \kappa.$$

Nous laissons au lecteur en exercice le cas plus compliqué de la courbure sur les arêtes.

5 Flot par la courbure

Terminons ce chapitre par une application concrète qui illustrera les différences entre les diverses notions de courbure rencontrées.

On appelle **flot** d'une courbe la famille de courbes ($s \mapsto \gamma_t(s)$) indicées par une variable t , souvent appelée *temps*, et décrite par

1. la donnée d'une courbe initiale γ_0 , correspondant au temps $t = 0$,
2. une équation différentielle (ou équation aux différences, si $t \in \mathbb{N}$ est une variable discrète) permettant d'obtenir la nouvelle courbe γ_{t+dt} (ou γ_{t+1} en temps discret) en fonction de γ_t et éventuellement de ses dérivées (ou autres quantités différentielles), autrement dit caractérisant $d\gamma_t(s)/dt$.

Exemple 1. Le plus simple est le flot induit par une translation de vecteur constant $\vec{u}$, dont l'équation différentielle est

$$\frac{d\gamma_t(s)}{dt} = \vec{u}$$

et l'analogue en temps discret est

$$\gamma_{t+1}(s) = \gamma_t(s) + \vec{u}.$$

La solution est $\gamma_t(s) = \gamma_0(s) + t\vec{u}$ (en temps discret comme en temps continu). Dans cet exemple, la paramétrisation de γ_t peut être discrète ou continue.

On peut aussi écrire γ comme une fonction $\gamma(s, t)$ de *deux* variables : le temps t et le paramètre s le long de la courbe. L'un comme l'autre peuvent être discrets ou continus. Si le temps *et* le paramètre sont continus, on a en général une *équation aux dérivées partielles* (EDP) ; si le temps est continu mais le paramètre discret (ce qui est l'objet de ce chapitre) on obtient un système d'*équations différentielles ordinaires* (EDO). Enfin quand le temps est discret, cela donne des récurrences sur les fonctions ou sur les points (systèmes dynamiques). De façon générale les EDP sont bien comprises par la théorie mais nécessitent un arsenal technique sophistiqué ; par exemple il faut démontrer ne serait-ce que l'existence pour t proche de zéro. À l'inverse les systèmes d'EDO sont beaucoup plus simples théoriquement, l'existence pour t petit étant en général une simple conséquence du théorème de CAUCHY–LIPSCHITZ. Par contre les systèmes dynamiques sont plus complexes à comprendre. Notons que ces différents cas de figure se rejoignent en pratique quand l'intégration exacte de l'équation est remplacée par une équation numérique discrétisée. Le cas générique est alors celui où temps et paramètre sont discrets.

Un des flots les plus intéressants est le flot par la courbure⁵. Pour les courbes continues, il consiste en l'EDP

$$\frac{\partial \gamma_t(s)}{\partial t} = \kappa_t(s) \vec{n}_t(s)$$

5. Dit aussi flot par courbure moyenne (*mean curvature flow*) ; mais pour des courbes il n'existe qu'une seule courbure : la courbure moyenne est celle que nous avons vue (cf. annexe). Cela sera différent pour des surfaces.

où κ_t et $\vec{n}_t$ sont la courbure et le vecteur normal de γ_t . On remarquera tout de suite que les points de γ se déplacent vers la concavité de la courbe, et que le point $\gamma_t(s)$ ne bouge pas, à l'ordre 1, si la courbure s'y annule.

Exemple 2.

- Les lignes droites sont invariantes par ce flot.
- Un cercle de rayon r_0 rétrécit progressivement (en gardant le même centre) et son rayon r_t suit l'équation $\dot{r} = -1/r$, donc $r_t = \sqrt{r_0^2 - t}$. Au bout du temps $T = r_0^2$, le cercle se réduit à un point (centre du cercle initial) et le flot s'arrête.

Une propriété importante de ce flot est qu'il raccourcit la longueur de la courbe à laquelle il s'applique. GRAYSON a prouvé dans [Gra87] que toute courbe fermée sans intersection du plan devient progressivement convexe puis se rapproche d'un cercle dont le rayon tend vers zéro⁶. (Cette démonstration remarquable mais très technique a été simplifiée en 2011 par ANDREWS & BRYAN [AB11]). Nous nous proposons d'étudier ici sous forme d'exercice quelques propriétés de ce flot pour les courbes discrètes.

Le premier flot considéré consiste à déplacer en temps continu les sommets d'une courbe discrète $p_i(t)$ par la courbure

$$\frac{dp_i}{dt} = \vec{H}_i \quad (\text{FC})$$

ou par la courbure pondérée

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{2\vec{H}_i}{\ell_{i-1} + \ell_i} \quad (\text{FCP})$$

où

$$\vec{H}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{i-1} = \frac{\overrightarrow{p_i p_{i+1}}}{\ell_i} - \frac{\overrightarrow{p_{i-1} p_i}}{\ell_{i-1}}$$

avec une courbe donnée initialement $p_i(0)$ fermée à n sommets (comme d'habitude les indices sont considérés périodiquement, c-à-d $p_{n+1} = p_1$). La courbe initiale est supposée *régulière* ou non-dégénérée, à savoir que aucune arête n'est de longueur nulle.

Les **flots par les sommets** (FC) et (FCP) sont deux systèmes d'équations différentielles ordinaires en $2n$ variables $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$; les longueurs ℓ_i et $\vec{H} = (\vec{H}_1, \dots, \vec{H}_n)$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ (et même analytique) de ces variables, *tant que les ℓ_i ne s'annulent pas*, condition qui est localement satisfaite par hypothèse. Le théorème de CAUCHY–LIPSCHITZ garantit donc l'existence de solutions pour $t \in [0, T[$ (existence locale). (Attention : ce n'est pas en général le même temps d'existence pour les deux flots.) Plus précisément, les solutions existent tant qu'aucune arête n'est de longueur nulle. Le flot devient *singulier* quand l'une (ou plusieurs) des arêtes se réduisent à un point. Cela se produit *en un temps fini* (voir exercice ci-dessous). Il est possible de définir

6. Par « tendre vers un cercle » il faut comprendre que l'on peut composer le flot avec une homothétie de rapport croissant avec t (c-à-d zoomer progressivement vers le point limite), et pour un choix approprié du rapport d'homothétie, la courbe limite est un cercle.

alors un prolongement du flot au-delà de la singularité, en fusionnant les deux sommets de l'arête de longueur nulle en un seul. Cela implique de changer la combinatoire de la courbe, qui possède un sommet de moins (ou plusieurs en cas d'extinction simultanée). On peut alors reprendre le flot à partir de la nouvelle courbe. Comme le nombre d'arêtes est fini, on aboutit à un seul point, quitte à franchir au plus n singularités.



Exercice 1.

1. Montrer que les longueurs $\ell_i(t)$ diminuent quand $t < T$ augmente, pour chacun des deux flots.
2. Donner une majoration strictement négative de dL/dt pour (FC) et (FCP), en remarquant que l'un des θ_i est supérieur ou égal à $2\pi/n$. En déduire que le temps maximal d'existence du flot est borné.
3. Montrer que les polygones réguliers sont des solutions autosimilaires des flots. On rappelle qu'un polygone régulier est une courbe discrète dont les n sommets sont sur un cercle et obtenus par rotation successive d'angle α , où $n\alpha = 0 \pmod{2\pi}$ (on ne suppose pas nécessairement que $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, autrement dit la courbe polygonale peut s'auto-intersecter). Une solution est dite **autosimilaire** si le flot de cette courbe est constitué de courbes homothétiques à la courbe initiale. Ici le centre des homothéties sera le centre du cercle. Déterminer le rapport de l'homothétie en fonction de t . Au bout de combien de temps le polygone devient-il un point ? (Pour (FCP) on retrouve exactement le même résultat que pour le flot continu du cercle.)

Contrairement au cas continu, la preuve de la convergence vers un point est aisée, par contre il n'est pas vrai en général que cette convergence se fasse en « arrondissant » la courbe, comme l'a montré GRAYSON dans le cadre continu. Le concept de « rondeur » est de toute façon délicat à définir. Nous allons voir dans l'exemple suivant que ce n'est pas le cas, sauf en changeant de flot.

Le flot par courbure par les arêtes (FCA), repose sur une définition duale des courbes discrètes : plutôt que de se donner les sommets, on se donne les droites D_i supportant les arêtes. Sous réserve que deux droites consécutives ne soient jamais parallèles, elles possèdent une seule intersection $p_i = D_i \cap D_{i+1}$ (voir figure 4).

Dans le cas où la courbe est localement convexe, le flot (FCA) déplace par définition l'arête e_i en une arête parallèle, ce déplacement ayant lieu dans le sens du cercle osculateur tangent à e_{i-1}, e_i, e_{i+1} , et avec une vitesse égale à la courbure κ_i du cercle. Il est plus simple de considérer que les droites sont orientées dans le sens de parcours de la courbe discrète (qui n'est pas évident à trouver !), ce qui revient à donner un vecteur directeur orienté (unitaire) $\vec{v}_i$ ou encore un vecteur normal $\vec{n}_i$ choisi de sorte que $(\vec{v}_i, \vec{n}_i)$ soit une base orthonormale directe. Dans ce cas κ_i est choisi avec un signe positif ou négatif, selon que le cercle est du côté de $\vec{n}_i$ ou de l'autre côté.

Si par exemple la droite D_i est décrite par $\vec{n}_i$ et un point de passage q_i , alors $\vec{n}_i$ est constant mais q_i change :

$$\frac{dq_i}{dt} = \kappa_i \vec{n}_i, \quad \kappa_i = \frac{1}{\ell_i} \frac{\cot \frac{\theta_i}{2} + \cot \frac{\theta_{i+1}}{2}}{\cot \frac{\theta_i}{2} \cot \frac{\theta_{i+1}}{2}}.$$

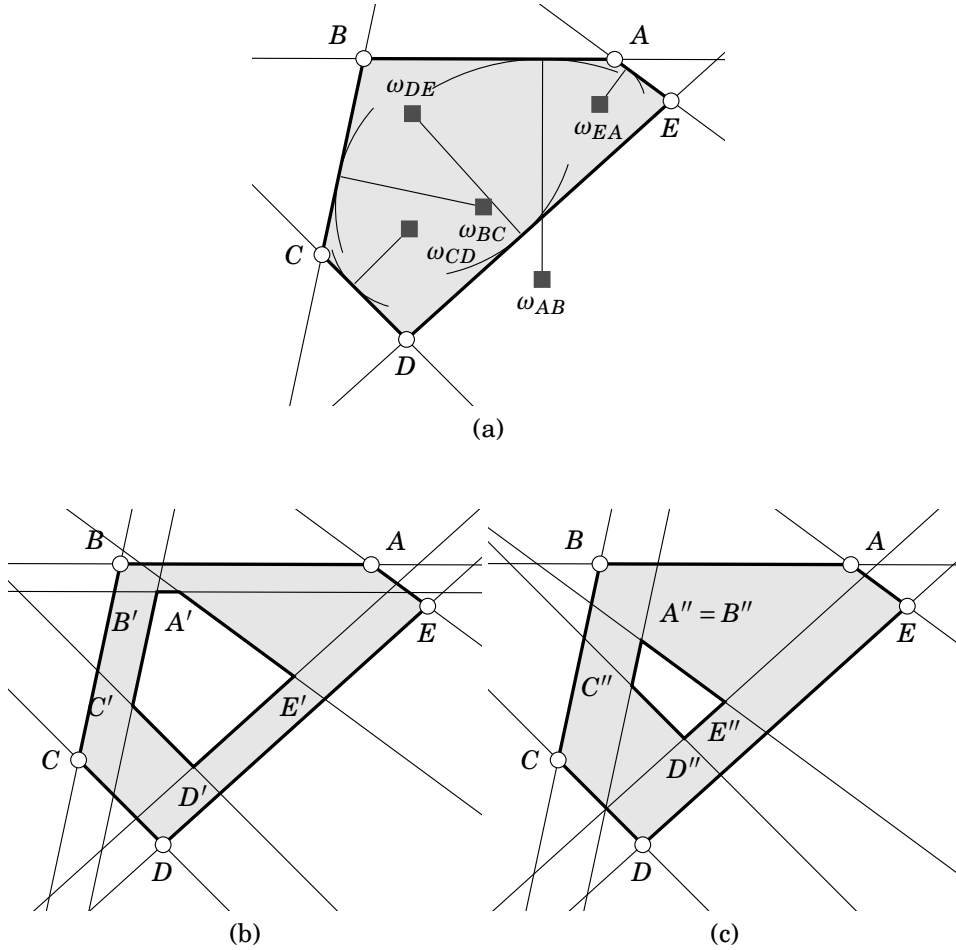


FIGURE 4 – (a) Polygone discret donné par les droites porteuses (AB) , (BC) , (CD) , (DE) et (EA) , et centres $\omega_{AB}, \dots, \omega_{EA}$ des cercles osculateurs associés (à la place du cercle, seul un arc partiel a été tracé pour ne pas encombrer la figure). (b) Polygone $(A'B'C'D'E')$ obtenu par le flot de la courbure moyenne portée par les arêtes, au bout d'un temps t' : la droite $(A'B')$ est parallèle à (AB) , etc. La courbure de l'arête (AB) est très petite (grand rayon de courbure), tandis que celle de l'arête (EA) est très grande (petit rayon). Par conséquent pendant le même temps t' , la droite porteuse de (EA) se déplace beaucoup plus vite que celle de (AB) . (c) Au bout d'un temps t'' , les sommets A'' et B'' se confondent et le flot continue après un changement de combinatoire, donnant un quadrilatère $(A''C''D''E'')$.

Bien que ce soit un peu calculatoire, on peut réexprimer ce flot en fonction des sommets. Mais même sans cela, on constate facilement que le théorème de CAUCHY–LIPSCHITZ s'applique encore et garantit l'existence d'une solution, tant que les arêtes sont de longueur strictement positive. On peut encore étendre le flot au delà d'éventuelles singularités.

Comparons maintenant les différents flots dans le cas très simple d'un rectangle $\mathcal{R}$.



Exercice 2.

1. Montrer que, tant qu'elles existent, les solutions des flots (FC), (FCP) et (FCA) sont encore rectangulaires, avec des côtés parallèles aux côtés initiaux. On notera $a(t), b(t)$ les longueurs des côtés, et on supposera que $a(0) \leq b(0)$.
2. Écrire pour les trois flots les équations différentielles suivies par les longueurs a et b , ainsi que l'aire $A = a(t)b(t)$ et le périmètre $L = 2(a + b)$. Donner le moment T_1 où la première singularité est atteinte (autrement dit : où A s'annule) dans chacun des cas.
3. Étudier la forme du rectangle $\mathcal{R}(t)$ par exemple grâce au rapport d'aspect $\rho(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$. Un des flots tend-il vers un polygone régulier (ici un carré)?
4. On considère désormais un autre flot (FCA2) sur les arêtes, où la courbure κ_i est remplacée par κ_i^2 (c'est le flot de WILLMORE ou des courbes élastiques).
 - (a) Exprimer les équations différentielles satisfaites par $a(t)$ et $b(t)$. Montrer que l'aire $A(t)$ et le périmètre $L(t)$ sont des fonctions décroissantes.
 - (b) Montrer que $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ est constant au cours du temps, et donner une expression de $b(t) - a(t)$ en fonction de $A(t)$ et des données initiales.
 - (c) Montrer que ρ reste supérieur ou égal à 1 et décroît. En déduire que si $A(T_1) = 0$ alors $L(T_1) = 0$. Montrer que, si en $t = 0$, on a $a_0 = b_0$ (c-à-d qu'on lance le flot sur un carré), alors $a(t) = b(t)$ pour tout $t \leq T_1$.
 - (d) Comment se comporte ρ au voisinage de la limite T_1 (dans le cas général)?

L'analyse de cet exemple montre que le flot par courbure habituel (au sens où il est défini comme un gradient de la fonction longueur) n'exhibe pas les propriétés attendues de régularisation montrées dans le cadre continu, à savoir qu'il n'arrondit pas les courbes en même temps qu'il en diminue la longueur. Par contre le flot (FCA2) par courbure quadratique le fait.

Abordons maintenant un dernier type de flot, le **flot isométrique sur les courbes** (FCI), dont la définition est plus complexe et que nous retrouverons au chapitre III.

L'idée de base, due⁷ à CRANE, PINKALL et SCHRÖDER [CPS13], est qu'une courbe discrète plane est entièrement déterminée, à rotation et translation près, par ses courbures, comme le montre le théorème de BONNET (voir page 2). Il est donc (presque) équivalent de travailler avec les courbures κ_i plutôt que les positions p_i . Or lisser une courbe revient à minimiser ses courbures ; on cherchera donc à minimiser l'énergie

7. Je remercie en passant Yann ROLLIN de me l'avoir indiquée.

$\mathcal{E}(\kappa) = \frac{1}{2} \sum_i \kappa_i^2$. Le flot gradient (inversé) de cette énergie est la simple EDO $\dot{\kappa}_i = -\kappa_i$, dont les solutions sont triviales. Mais n'oublions pas que le théorème de BONNET ne considère que des courbes *ouvertes* et ne prend pas en compte la condition de périodicité pour une courbe fermée : un choix arbitraire de longueurs ℓ_i et courbures κ_i n'engendre pas en général une courbe fermée. Et sans condition de périodicité, l'EDO fait tendre la courbe vers un segment rectiligne. Pour garantir la fermeture/périodicité, il faut que les courbures satisfassent deux conditions (trois conditions scalaires); autrement dit, projeter le flot ci-dessus sur l'espace des mouvements admissibles, c-à-d ceux qui préservent les conditions. Cela engendre une complexité accrue (projection et intégration), mais en dépit de cela, le flot obtenu est nettement plus plaisant, et nous renvoyons aux illustrations de l'article [CPS13]. Nous allons maintenant détailler cette approche.

Le principe de ce flot isométrique est que les longueurs ℓ_i ne changent pas, seuls les courbures, donc les angles, peuvent évoluer. Notons $\vec{e}_i = \overrightarrow{p_i p_{i+1}} = p_{i+1} - p_i$ le vecteur arête, et remarquons que $\vec{e}_i = \frac{\ell_i}{\ell_{i-1}} R_{\theta_i} \vec{e}_{i-1}$ où R_θ désigne la rotation d'angle θ . Pour que la courbe engendrée par les (ℓ_i, θ_i) soit périodique, il faut que

1. $\vec{e}_{n+1} = \vec{e}_1$, ce qui implique

$$\theta_1 + \dots + \theta_n = 2\pi N \quad (A)$$

où N est un entier (le nombre de tour);

2. $p_{n+1} = p_1$, d'où la condition (vectorielle)

$$\vec{e}_1 + \dots + \vec{e}_n = 0 \quad (B)$$

La condition (B) semble suffire à garder la courbe fermée, mais elle ne donne pas la périodicité. En particulier, si l'on commence la construction de la courbe à partir d'un autre sommet que p_1 , on n'obtiendra pas la même courbe mais une image de celle-ci après rotation. Noter aussi que les $\vec{e}_i$ sont déterminés à rotation près, autrement dit à un angle ϕ près.

Considérons maintenant l'évolution au cours du temps d'une courbe discrète fermée dont les longueurs restent fixes. Il faut satisfaire A, donc

$$\sum_i \dot{\theta}_i = 0 \quad (A')$$

Pour simplifier les calculs sur (B), nous supposons que $\vec{e}_1$ reste constant au cours de l'évolution, alors qu'en réalité il peut évoluer si par exemple ϕ change; mais cela n'a aucun impact sur la condition de fermeture, car les autres $\vec{e}_i$ évolueront conjointement. Puisque

$$\vec{e}_i = \frac{\ell_i}{\ell_{i-1}} \dots \frac{\ell_2}{\ell_1} R_{\theta_1} \dots R_{\theta_{i-1}} \vec{e}_1 = \frac{\ell_i}{\ell_1} R_{\theta_1 + \dots + \theta_{i-1}} \vec{e}_1$$

il vient

$$\dot{\vec{e}}_i = \frac{\ell_i}{\ell_1} (\dot{\theta}_1 + \dots + \dot{\theta}_{i-1}) R_{\theta_1 + \dots + \theta_{i-1}} \vec{e}_1 = (\dot{\theta}_1 + \dots + \dot{\theta}_i) R_{\theta_1 + \dots + \theta_i} \vec{e}_i$$

et la condition de fermeture est

$$\begin{aligned}
0 &= R_{-\pi/2} \sum_{i=1}^n \dot{\vec{e}}_i = \sum_{i=2}^n (\dot{\theta}_2 + \dots + \dot{\theta}_i) \vec{e}_i = \sum_{i=2}^n (\dot{\theta}_2 + \dots + \dot{\theta}_i) (p_{i+1} - p_i) \\
&= \sum_{i=3}^{n+1} (\dot{\theta}_2 + \dots + \dot{\theta}_{i-1}) p_i - \sum_{i=2}^n (\dot{\theta}_2 + \dots + \dot{\theta}_i) p_i = -\dot{\theta}_2 p_2 + \sum_{i=3}^n \dot{\theta}_i p_i + \left(\sum_{i=2}^n \dot{\theta}_i \right) p_{n+1} \\
&= -\dot{\theta}_2 p_2 + \sum_{i=3}^n \dot{\theta}_i p_i - \dot{\theta}_1 p_1 = \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i p_i
\end{aligned}$$

en utilisant (A'). On constate que cette nouvelle contrainte, (B'), est encore linéaire et peut s'exprimer comme deux produits scalaires $\dot{\theta} \cdot x = 0$ et $\dot{\theta} \cdot y = 0$ entre le vecteur des dérivées des angles $\dot{\theta} = (\dot{\theta}_i)$ et ceux des abscisses $x = (x_i)$ et des ordonnées $y = (y_i)$.

Comme $\kappa_i = \frac{2\theta_i}{\ell_{i-1} + \ell_i}$, et en notant $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$, (A') se ramène à l'équation $\dot{\kappa} \cdot \hat{a} = 0$ avec

$$\hat{a} = (\ell_n + \ell_1, \ell_1 + \ell_2, \dots, \ell_{n-1} + \ell_n)$$

tandis que (B') revient à deux équations scalaires $\dot{\kappa} \cdot \hat{x} = \dot{\kappa} \cdot \hat{y} = 0$ où

$$\begin{cases} \hat{x} &= ((\ell_n + \ell_1)x_1, (\ell_1 + \ell_2)x_2, \dots, (\ell_{n-1} + \ell_n)x_n), \\ \hat{y} &= ((\ell_n + \ell_1)y_1, (\ell_1 + \ell_2)y_2, \dots, (\ell_{n-1} + \ell_n)y_n) \end{cases}$$

Le flot isométrique consiste donc à projeter le vecteur $\dot{\kappa}$ perpendiculairement à $\hat{a}$, $\hat{x}$ et $\hat{y}$, sachant que ces deux derniers sont eux-mêmes calculés à partir de κ . Dans le cas continu, on obtient un flot aux propriétés de lissage et de conservation souhaitées. Il se prête bien à une intégration numérique en temps discret, mais, comme souvent, une méthode d'EULER explicite induira une approximation dans les égalités (A) et (B). Pour contourner ce problème, il est possible de reprojeter les angles obtenus sur l'espace des contraintes ou bien, comme le suggèrent les auteurs de [CPS13], abandonner la condition (A') mais résoudre à la place un problème de POISSON consistant à trouver à chaque itération la courbe ayant les arêtes les plus proches possible des arêtes précédentes.

Chapitre II

Surfaces et polyèdres

Dans ce chapitre nous introduisons les objets principaux de notre étude : les surfaces discrètes ou polyédriques. Nous définirons les invariants géométriques, combinatoires et topologiques de base nous permettant de mieux comprendre et manipuler les surfaces, en prélude aux applications et constructions plus sophistiquées des chapitres qui suivent. Ces invariants s'avèrent remarquablement riches bien qu'élémentaires (notamment les courbures) comparés au cas des surfaces lisses, et leur compréhension ne requiert qu'une bonne vision dans l'espace et une connaissance de la géométrie euclidienne classique. Nous terminerons en traitant rapidement des problèmes de convergence et d'approximation.

1 Combinatoire des surfaces discrètes

Définition 1. Une **surface polyédrique abstraite** ou **surface discrète abstraite** S (aussi appelée **complexe cellulaire de dimension 2**) est la donnée

- d'un ensemble de sommets (*vertices* en anglais) $V = V(S)$ fini ou infini
- d'un ensemble $E = E(S)$ d'arêtes (*edges*) formées de couples (non ordonnés) de sommets distincts, notées $e = (p_1 p_2) = (p_2 p_1)$; cet ensemble est toujours supposé **localement fini** : tout sommet appartient à un nombre fini d'arêtes
- d'un ensemble $F = F(S)$ de faces $f = (p_1 \dots p_n)$ où les p_i sont des sommets distincts et $(p_i p_{i+1}) \in E$ pour tout $i = 1, \dots, n$ (avec la convention que $p_{n+1} = p_1$ de façon à obtenir une boucle¹)

satisfaisant les conditions ci-dessous : en notant F_p l'ensemble des faces contenant le sommet p , F_e l'ensemble des faces contenant l'arête e et E_p l'ensemble des arêtes contenant p , et $|S|$ le cardinal d'un ensemble S , c-à-d le nombre de ses éléments,

- (A) tout sommet est l'extrémité d'au moins 3 arêtes (2 s'il est au bord) : $|F_p| \geq 3$
($|F_p| \geq 2$ au bord)

1. Pour des raisons de simplicité on se limite aux faces simplement connexes, autrement dit polygonales, dont les arêtes du bord forment une seule courbe.

- (B) toute arête est incidente à 2 faces (une seule si l'arête est au bord) : $|F_e| = 2$ ($|F_e| = 1$ au bord)
- (C) toute face possède au moins 3 arêtes² (ou 3 sommets, ce qui revient au même)
- (D) pour tout sommet p , si les q_i sont les sommets des faces contenant p (p excepté) prises dans l'ordre, alors les arêtes $(q_i q_{i+1})$ forment une courbe *fermée*, sauf quand p est sur le bord, auquel cas c'est la courbe formée des arêtes $(pq_1), (q_1 q_2), \dots, (q_{n-1} q_n), (q_n p)$ qui est fermée
- (E) les sommets et arêtes du bord forment une ou plusieurs courbes discrètes *fermées*.

Définitions. Un sommet p est **incident** à une arête e ou une face f (noté $p \in e$ ou $p \in f$) si p est l'une des extrémités de l'arête e , ou l'un des sommets de f . De même une arête e est **incidente** à une face $f = (p_1 \dots p_n)$ si e est l'une des arêtes $(p_i p_{i+1})$. On utilisera parfois appartenance pour signifier incidence. Deux sommets p, q sont **voisins** (ou **adjacents**) si $(pq) \in E$, ce qui est noté $p \sim q$. Une courbe est une suite $p_1, \dots, p_n$ de sommets voisins ; elle est dite **fermée** si elle forme une boucle, autrement dit si $p_n = p_1$. On parlera aussi de **lacet**.

Cas particulier : une **triangulation** ou **surface triangulée** est une surface polyédrique dont les faces sont toutes triangulaires. Ce sont les surfaces les plus simples à obtenir et manipuler, mais pas nécessairement les plus simples géométriquement.

Remarque 1. De même que la donnée des sommets ne suffit pas à déterminer une courbe discrète, les ensembles V et E ne suffisent pas à déterminer F . Par exemple, on peut retirer au cube (8 sommets, 12 arêtes, 6 faces) une face ou deux faces opposées, sans changer ni les sommets ni les arêtes (mais en créant des bords, voir ci-dessous).

Note 1. On supposera que les surfaces considérées sont **connexes**, c-à-d que deux sommets quelconques de V peuvent toujours être reliés l'un à l'autre par un chemin (en général non unique). Si S n'est pas connexe, elle se décompose en plusieurs sous-parties connexes, elles aussi polyédriques, appelées **composantes connexes**.

On partitionne naturellement V en sommets **intérieurs/internes**, dont l'ensemble sera noté $\hat{V}$, et sommets du bord ou **externes/extérieurs** (ensemble V^∂); de même l'ensemble E des arêtes se compose des arêtes intérieures ou internes (sous-ensemble $\hat{E}$) et des arêtes du bord ou externes (sous-ensemble E^∂). Une arête est intérieure si elle est incidente à deux faces, et extérieure si elle appartient à une seule. Un sommet p est intérieur (resp. extérieur) si $|F_p| = |E_p|$ et extérieur si $|F_p| + 1 = |E_p|$ ou, de façon équivalente, si p appartient à une arête externe. Le bord ∂S est constitué de la ou des courbe(s) polygonale(s) constitué des points de V^∂ reliés par les arêtes de E^∂ . La surface est un **polyèdre** si elle est finie et n'a pas de bord : $\partial S = \emptyset$.

2. Cette hypothèse n'est pas cruciale, mais permet d'éviter certaines difficultés techniques, par exemple dans la définition de l'axiome (D). On verra des cas où elle n'est pas satisfaite, ce qui n'empêche pas la plupart des raisonnements.

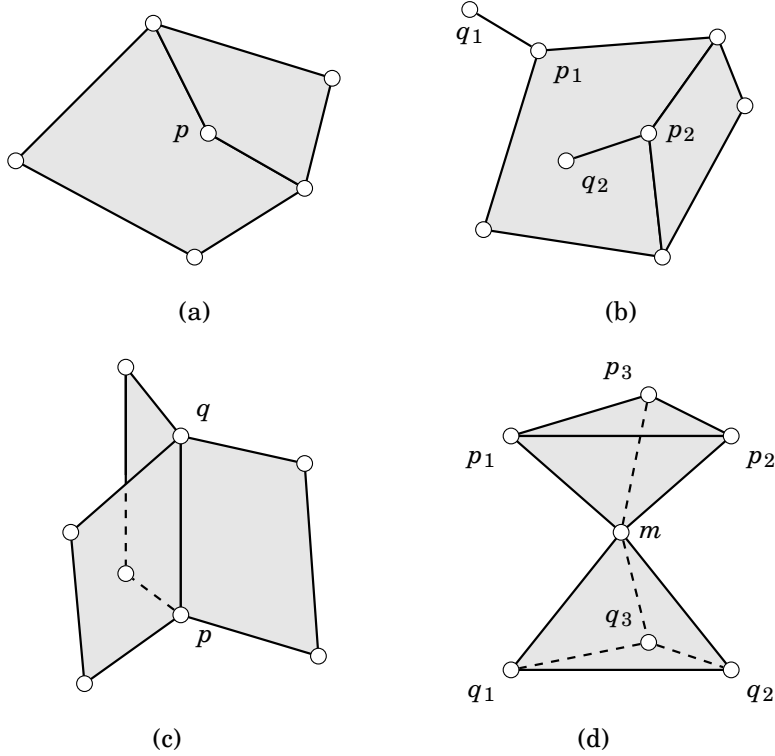


FIGURE 1 – Exemples qui ne sont *pas* des surfaces discrètes. Dans (a) le sommet p contredit l'axiome A. Dans (b), les arêtes (p_1q_1) et (p_2q_2) sont respectivement incidentes à 0 et 1 face, ce qui contredit B, et p_1, q_1, q_2 contredisent A. Dans (c), que l'on doit imaginer en perspective dans l'espace, l'arête (pq) est incidente à 3 faces, contredisant B. La figure (d) représente deux tétraèdres tête-bêche, ce qui contredit D, car les sommets voisins de m forment deux courbes (p_1, p_2, p_3) et (q_1, q_2, q_3) .

On retrouve la notion habituelle de polyèdre avec la définition suivante :

Définition 2. Une surface polyédrique de l'espace, dite aussi **concrète**, est la donnée d'une surface polyédrique abstraite *et* d'une application $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ avec la condition suivante : les points d'une même face sont coplanaires et il existe dans ce plan un domaine borné polygonal connexe, d'aire non vide, dont le bord est l'union des arêtes $(f(p_i), f(p_{i+1}))$; ce domaine sera identifié à la face. Les sommets de la face sont ceux du polygone, et de même pour les arêtes.

L'idée derrière cette définition est que la surface de l'espace dicte la structure abstraite : les faces déterminent les sommets et les arêtes. Implicitement, cela exclut deux arêtes consécutives parallèles (c-à-d trois sommets consécutifs alignés), et à plus forte raison des arêtes de longueur nulle. De même, la face est d'aire non nulle pour éliminer les faces aplaties, et les arêtes ne se coupent pas. On se restreint souvent aux

faces convexes, auquel cas chaque face est l'enveloppe convexe³ de ses sommets. Le cas le plus connu de surface polyédrique concrète est celui des polyèdres convexes : ce sont les enveloppes convexes dans l'espace d'un ensemble fini de points (chaque face est convexe, mais on a mieux : le volume délimité par S est lui-même convexe).

Pour une surface polyédrique de l'espace, la donnée des ensembles abstraits V, E, F est appelée la **combinatoire** de la surface, et elle détermine sa topologie, autrement dit sa structure à déformation continue près. Mais deux surfaces peuvent avoir une combinatoire identique et des géométries (aspects) très différentes.

Il est intéressant de disposer d'une notion intermédiaire entre la surface abstraite et la surface concrète.

Définition 3. Une **immersion** d'une surface abstraite S dans l'espace est une application $f : V(S) \rightarrow \mathbb{R}^3$, autrement dit prescrivant l'image P_i de chaque sommet abstrait p_i , telle que

- l'image d'une arête ne soit jamais de longueur nulle : si $(p_1 p_2) \in E$ alors $P_1 \neq P_2$;
- l'image d'une face ne soient jamais contenue dans une droite.

En d'autres termes, f identifie les arêtes abstraites $(p_1 p_2)$ à des segments concrets de l'espace $(P_1 P_2)$ qui ne doivent pas être de longueur nulle. Cela n'exclut nullement que $f(p_1)$ soit égal à $f(p_2)$ si p_1 et p_2 ne sont pas voisins, donc f peut ne pas être injective. La notion d'immersion tient compte des sommets et par conséquent des arêtes, mais oublie en partie les faces. De plus, rien ne garantit que les sommets soient coplanaires.

Remarque 2. Les **graphes** sont des proches cousins des surfaces discrètes. Ils ne sont donnés que par un ensemble de sommets V et d'arêtes E , et *a priori* sans les conditions additionnelles que nous exigeons pour les surfaces. Par exemple, des sommets peuvent être isolés, deux sommets peuvent être reliés par plusieurs arêtes, voire un sommet relié à lui-même (si le graphe est **réflexif**). Les graphes englobent des situations beaucoup plus générales que les surfaces polyédriques, et ces dernières peuvent être vues comme des cas particuliers de graphes. Il n'y a pas par contre de notion immédiate de dimension car il n'y a pas de face⁴, par conséquent un grand nombre d'outils géométriques ou topologiques ne peuvent pas être définis à ce niveau de généralité (cf. le chapitre sur le calcul différentiel). De même les notions métriques (distance, angles, aires et courbures) sont moins naturelles⁵. Certains concepts présentés dans la suite seront applicables aux graphes (par exemple la caractéristique d'EULER), d'autres seront spécifiques à la géométrie discrète, comme l'orientation. Enfin nous verrons comment parfois le raisonnement purement combinatoire de la théorie des graphes possède un équivalent géométrique, quand le graphe est une surface discrète munie d'une métrique appropriée dite **métrique équilatérale**.

3. L'enveloppe convexe d'un ensemble S est le plus petit convexe contenant S , c'est aussi l'ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls de points de S .

4. Même si la notion de **clique** peut s'y substituer parfois.

5. On peut toutefois définir facilement une distance sur un graphe pondéré ou non, et des définitions pour la courbure ont été proposées (voir par exemple [LLY11, JL11]). On obtient logiquement des résultats plus généraux mais moins fins. D'une certaine façon, les graphes ressemblent aux espaces métriques (ce qu'ils sont d'ailleurs), là où les surfaces discrètes sont les analogues des surfaces différentielles.