

Alain Busser

Prépas  
CAPES  
AGREG

# Python pour les (futurs) professeurs



ellipses

# Table des matières

<b>1 La console</b>	<b>11</b>
1.1 Fonctionnement . . . . .	12
1.1.1 Expressions . . . . .	12
1.1.2 Instructions . . . . .	16
1.2 Affectation de variables . . . . .	16
1.2.1 Affectation directe . . . . .	17
1.2.2 Affectations en place . . . . .	18
1.2.3 Underscore . . . . .	19
1.3 Quelques singletons de Python . . . . .	19
1.3.1 Les petits entiers . . . . .	20
1.3.2 Les booléens . . . . .	21
1.3.3 None . . . . .	22
1.4 Les modules . . . . .	22
<b>2 Ensembles et probabilités</b>	<b>23</b>
2.1 Les ensembles . . . . .	23
2.1.1 Ensembles . . . . .	23
2.1.2 Inclusion . . . . .	24
2.1.3 Intersection . . . . .	26
2.1.4 Réunion . . . . .	27
2.1.5 Complément . . . . .	28
2.1.6 Quantificateurs . . . . .	28
2.2 Algèbre de Boole . . . . .	29
2.2.1 Définition . . . . .	29
2.2.2 Logique propositionnelle . . . . .	29
2.2.3 Notion d'équation . . . . .	31
2.3 Mesure et probabilités . . . . .	32
2.3.1 Notion de borélien . . . . .	32
2.3.2 Théorie de Lebesgue . . . . .	33
2.3.3 Axiomatique de Kolmogorov . . . . .	33
2.3.4 Théorie de Bayes . . . . .	34

<b>3 Couples, n-uplets et tuples</b>	<b>35</b>
3.1 Couples . . . . .	35
3.1.1 Par les ensembles . . . . .	35
3.1.2 Par les fonctions . . . . .	36
3.2 Graphes et relations . . . . .	37
3.2.1 Produit cartésien . . . . .	37
3.2.2 Variables . . . . .	39
3.3 Fonctions . . . . .	39
3.3.1 Définition . . . . .	39
3.3.2 Dictionnaires de Python . . . . .	40
3.3.3 Fonctions de Python . . . . .	42
3.4 Triplets et tuples . . . . .	42
3.4.1 Triplets . . . . .	42
3.4.2 Quadruplets . . . . .	42
<b>4 Construction des nombres entiers</b>	<b>43</b>
4.1 Construction de Dedekind . . . . .	43
4.2 Axiomatique de Peano . . . . .	45
4.2.1 Relation d'ordre . . . . .	45
4.2.2 Addition . . . . .	45
4.2.3 Multiplication . . . . .	46
4.3 Construction de Von Neumann . . . . .	47
4.4 Construction de Church . . . . .	47
4.5 Théorie des catégories . . . . .	49
4.5.1 Objets et catégories . . . . .	49
4.5.2 Foncteurs . . . . .	53
4.5.3 Monades . . . . .	55
4.5.4 Construction des entiers naturels . . . . .	56
4.6 Entiers relatifs . . . . .	57
<b>5 Arithmétique des nombres entiers</b>	<b>59</b>
5.1 Opération des entiers sur des additionnables . . . . .	59
5.1.1 Additions itérées . . . . .	59
5.1.2 Multiplication des entiers . . . . .	61
5.2 Division . . . . .	62
5.2.1 Propriété archimédienne . . . . .	62
5.2.2 Divisibilité . . . . .	63
5.3 Primalité . . . . .	67
5.3.1 Nombre de diviseurs . . . . .	67
5.3.2 Test de primalité . . . . .	68
5.3.3 Facteurs premiers . . . . .	69
5.3.4 Codage de Gödel . . . . .	71
5.3.5 une permutation des entiers . . . . .	73
5.3.6 Suite de Collatz . . . . .	74

5.4	Division euclidienne . . . . .	76
5.4.1	Division euclidienne en Python . . . . .	76
5.4.2	Arithmétique de Presburger . . . . .	78
5.4.3	Les restes chinois . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Dyadiques et décimaux</b>	<b>81</b>
6.1	Fractions dyadiques . . . . .	81
6.1.1	Construction de Conway . . . . .	82
6.1.2	Implémentation en Python . . . . .	83
6.2	Écriture binaire . . . . .	84
6.2.1	Pour les nombres entre 0 et 1 . . . . .	84
6.2.2	Suite logistique . . . . .	86
6.2.3	Conjugaison . . . . .	88
6.2.4	Des flottants non dyadiques . . . . .	90
6.3	Nombres décimaux . . . . .	93
6.3.1	Décimaux et flottants . . . . .	93
6.3.2	Un module Python pour le calcul décimal . . . . .	94
<b>7</b>	<b>Fractions</b>	<b>97</b>
7.1	Construction des fractions . . . . .	97
7.1.1	comme classes d'équivalence . . . . .	97
7.1.2	comme opérateurs . . . . .	101
7.1.3	comme quotients . . . . .	102
7.2	Écriture mixte d'une fraction . . . . .	103
7.3	Fractions de Farey . . . . .	105
7.3.1	Approximations rationnelles d'un réel . . . . .	105
7.3.2	L'arbre de Stern-Brocot . . . . .	106
7.3.3	Les cercles de Ford . . . . .	110
7.4	Fractions continuées . . . . .	111
7.5	Les fractions égyptiennes . . . . .	113
7.6	Les fractions selon Conway . . . . .	114
7.6.1	Fractran . . . . .	114
7.6.2	Les enchevêtrements de Conway . . . . .	116
<b>8</b>	<b>Structure de corps</b>	<b>119</b>
8.1	Corps à deux éléments . . . . .	119
8.2	Corps des réels . . . . .	120
8.2.1	Les réels en Python . . . . .	120
8.2.2	Quelques réels particuliers . . . . .	120
8.3	Corps finis . . . . .	122
8.3.1	Corps ayant un nombre premier d'éléments . . . . .	122
8.3.2	Autres corps finis . . . . .	124
8.4	Corps des nimbers . . . . .	125
8.4.1	Nim-addition . . . . .	125
8.4.2	Nim-multiplication . . . . .	127

8.5	Nombres algébriques . . . . .	128
8.5.1	Triplets pythagoriciens . . . . .	128
8.5.2	Nombres de Pell . . . . .	130
8.5.3	Courbes elliptiques . . . . .	132
8.5.4	Extensions quadratiques . . . . .	134
8.6	Résolution d'équations . . . . .	135
8.6.1	Équations du second degré . . . . .	135
8.6.2	Équations du troisième degré . . . . .	135
<b>9</b>	<b>Mathématiques des textes</b>	<b>137</b>
9.1	Cryptographie . . . . .	137
9.1.1	Le chiffre de César . . . . .	137
9.1.2	Chiffre de Vigenère . . . . .	138
9.2	Parcours de graphes . . . . .	138
9.2.1	Chemins et cycles eulériens . . . . .	138
9.2.2	Chemins et cycles hamiltoniens . . . . .	140
9.3	Problème du mot . . . . .	141
9.3.1	Suite de Prouhet-Thue-Morse . . . . .	141
9.3.2	Générateurs et relations . . . . .	141
9.4	Travaux d'Emil Post . . . . .	142
9.4.1	Systèmes de tague . . . . .	142
9.4.2	Problème de correspondance . . . . .	143
9.4.3	Look and say . . . . .	145
9.5	Dessin de courbes fractales . . . . .	146
9.5.1	Courbe de Von Koch . . . . .	146
9.5.2	Courbe de Sierpinski . . . . .	147
9.5.3	Le mot de Fibonacci . . . . .	148
9.6	Automates . . . . .	149
9.6.1	Suites de Beatty . . . . .	149
9.6.2	Automate de division par 2 . . . . .	149
9.6.3	Automate de triplement . . . . .	151
9.7	Logique des combinatoires . . . . .	152
9.7.1	S, K et I . . . . .	152
9.7.2	Comme règles de réécriture . . . . .	153
9.7.3	B, C, K et W . . . . .	154
9.7.4	Le combinatoire M . . . . .	154
<b>10</b>	<b>Complexes</b>	<b>155</b>
10.1	Complexes en Python . . . . .	155
10.1.1	Équations polynomiales . . . . .	156
10.1.2	Logarithme d'un nombre négatif . . . . .	157
10.1.3	Trigonométrie complexe . . . . .	158
10.1.4	Géométrie hyperbolique . . . . .	159
10.2	Entiers chez les complexes . . . . .	160
10.2.1	Entiers de Gauss . . . . .	160
10.2.2	Entiers d'Eisenstein . . . . .	163

10.3 Systèmes dynamiques complexes . . . . .	165
10.3.1 Ensembles de Julia . . . . .	165
10.3.2 Ensemble de Mandelbrot . . . . .	167
10.4 Quaternions . . . . .	169
10.5 Octonions . . . . .	172
<b>11 Analyse</b>	<b>173</b>
11.1 Suites . . . . .	173
11.1.1 Algorithme de Héron . . . . .	173
11.1.2 Algorithme de Gauss-Salamin . . . . .	174
11.1.3 Le logarithme de 2 . . . . .	174
11.2 Fonctions . . . . .	175
11.2.1 Résolution d'équations . . . . .	175
11.2.2 Fonctions trigonométriques . . . . .	176
11.2.3 Limites . . . . .	178
11.2.4 Dérivée . . . . .	179
11.2.5 Intégrales . . . . .	182
11.3 Calcul formel . . . . .	185
11.4 Circulation d'un vecteur . . . . .	186
<b>12 Algèbre linéaire</b>	<b>187</b>
12.1 Vecteurs du plan . . . . .	187
12.1.1 Vecteurs de la tortue . . . . .	187
12.1.2 Droites du plan . . . . .	189
12.1.3 Systèmes dynamiques dans le plan . . . . .	190
12.2 Vecteurs de l'espace . . . . .	192
12.2.1 Vecteurs 3D en Python . . . . .	192
12.2.2 Espace des cercles . . . . .	193
<b>13 Statistiques</b>	<b>195</b>
13.1 Statistique en Python . . . . .	195
13.1.1 Les listes de Python . . . . .	195
13.1.2 Statistiques sur les listes . . . . .	196
13.1.3 Régression linéaire . . . . .	196
13.2 Variables aléatoires . . . . .	197
13.2.1 Variables aléatoires binomiales . . . . .	198
13.2.2 divhasard . . . . .	200
<b>14 Annexes</b>	<b>203</b>
14.1 Interpréteur Sofus en Python . . . . .	203
14.2 Catégories et foncteurs en Python . . . . .	205
14.2.1 Catégories . . . . .	205
14.2.2 Foncteurs . . . . .	206
14.3 Union-Find . . . . .	206
14.4 Nombres algébriques . . . . .	207
14.5 Quaternions . . . . .	207
14.6 Octonions . . . . .	208

14.7 Vecteurs . . . . .	209
14.7.1 Dessin de vecteurs . . . . .	209
14.7.2 Barycentres . . . . .	209
14.7.3 vecteur en 3D . . . . .	209
14.8 Ensemble de Cantor . . . . .	210
<b>Bibliographie</b>	<b>210</b>
<b>Index</b>	<b>212</b>