

Alain Busser

Prépas
CAPES
AGREG

Python pour les (futurs) professeurs



ellipses

Table des matières

1	La console	11
1.1	Fonctionnement	12
1.1.1	Expressions	12
1.1.2	Instructions	16
1.2	Affectation de variables	16
1.2.1	Affectation directe	17
1.2.2	Affectations en place	18
1.2.3	Underscore	19
1.3	Quelques singletons de Python	19
1.3.1	Les petits entiers	20
1.3.2	Les booléens	21
1.3.3	None	22
1.4	Les modules	22
2	Ensembles et probabilités	23
2.1	Les ensembles	23
2.1.1	Ensembles	23
2.1.2	Inclusion	24
2.1.3	Intersection	26
2.1.4	Réunion	27
2.1.5	Complément	28
2.1.6	Quantificateurs	28
2.2	Algèbre de Boole	29
2.2.1	Définition	29
2.2.2	Logique propositionnelle	29
2.2.3	Notion d'équation	31
2.3	Mesure et probabilités	32
2.3.1	Notion de borélien	32
2.3.2	Théorie de Lebesgue	33
2.3.3	Axiomatique de Kolmogorov	33
2.3.4	Théorie de Bayes	34

3	Couples, n-uplets et tuples	35
3.1	Couples	35
3.1.1	Par les ensembles	35
3.1.2	Par les fonctions	36
3.2	Graphes et relations	37
3.2.1	Produit cartésien	37
3.2.2	Variables	39
3.3	Fonctions	39
3.3.1	Définition	39
3.3.2	Dictionnaires de Python	40
3.3.3	Fonctions de Python	42
3.4	Triplets et tuples	42
3.4.1	Triplets	42
3.4.2	Quadruplets	42
4	Construction des nombres entiers	43
4.1	Construction de Dedekind	43
4.2	Axiomatique de Peano	45
4.2.1	Relation d'ordre	45
4.2.2	Addition	45
4.2.3	Multiplication	46
4.3	Construction de Von Neumann	47
4.4	Construction de Church	47
4.5	Théorie des catégories	49
4.5.1	Objets et catégories	49
4.5.2	Foncteurs	53
4.5.3	Monades	55
4.5.4	Construction des entiers naturels	56
4.6	Entiers relatifs	57
5	Arithmétique des nombres entiers	59
5.1	Opération des entiers sur des additionnables	59
5.1.1	Additions itérées	59
5.1.2	Multiplication des entiers	61
5.2	Division	62
5.2.1	Propriété archimédienne	62
5.2.2	Divisibilité	63
5.3	Primalité	67
5.3.1	Nombre de diviseurs	67
5.3.2	Test de primalité	68
5.3.3	Facteurs premiers	69
5.3.4	Codage de Gödel	71
5.3.5	une permutation des entiers	73
5.3.6	Suite de Collatz	74

5.4	Division euclidienne	76
5.4.1	Division euclidienne en Python	76
5.4.2	Arithmétique de Presburger	78
5.4.3	Les restes chinois	78
6	Dyadiques et décimaux	81
6.1	Fractions dyadiques	81
6.1.1	Construction de Conway	82
6.1.2	Implémentation en Python	83
6.2	Écriture binaire	84
6.2.1	Pour les nombres entre 0 et 1	84
6.2.2	Suite logistique	86
6.2.3	Conjugaison	88
6.2.4	Des flottants non dyadiques	90
6.3	Nombres décimaux	93
6.3.1	Décimaux et flottants	93
6.3.2	Un module Python pour le calcul décimal	94
7	Fractions	97
7.1	Construction des fractions	97
7.1.1	comme classes d'équivalence	97
7.1.2	comme opérateurs	101
7.1.3	comme quotients	102
7.2	Écriture mixte d'une fraction	103
7.3	Fractions de Farey	105
7.3.1	Approximations rationnelles d'un réel	105
7.3.2	L'arbre de Stern-Brocot	106
7.3.3	Les cercles de Ford	110
7.4	Fractions continuées	111
7.5	Les fractions égyptiennes	113
7.6	Les fractions selon Conway	114
7.6.1	Fractran	114
7.6.2	Les enchevêtrements de Conway	116
8	Structure de corps	119
8.1	Corps à deux éléments	119
8.2	Corps des réels	120
8.2.1	Les réels en Python	120
8.2.2	Quelques réels particuliers	120
8.3	Corps finis	122
8.3.1	Corps ayant un nombre premier d'éléments	122
8.3.2	Autres corps finis	124
8.4	Corps des nimbers	125
8.4.1	Nim-addition	125
8.4.2	Nim-multiplication	127

8.5	Nombres algébriques	128
8.5.1	Triplets pythagoriciens	128
8.5.2	Nombres de Pell	130
8.5.3	Courbes elliptiques	132
8.5.4	Extensions quadratiques	134
8.6	Résolution d'équations	135
8.6.1	Équations du second degré	135
8.6.2	Équations du troisième degré	135
9	Mathématiques des textes	137
9.1	Cryptographie	137
9.1.1	Le chiffre de César	137
9.1.2	Chiffre de Vigenère	138
9.2	Parcours de graphes	138
9.2.1	Chemins et cycles eulériens	138
9.2.2	Chemins et cycles hamiltoniens	140
9.3	Problème du mot	141
9.3.1	Suite de Prouhet-Thue-Morse	141
9.3.2	Générateurs et relations	141
9.4	Travaux d'Emil Post	142
9.4.1	Systèmes de tague	142
9.4.2	Problème de correspondance	143
9.4.3	Look and say	145
9.5	Dessin de courbes fractales	146
9.5.1	Courbe de Von Koch	146
9.5.2	Courbe de Sierpinski	147
9.5.3	Le mot de Fibonacci	148
9.6	Automates	149
9.6.1	Suites de Beatty	149
9.6.2	Automate de division par 2	149
9.6.3	Automate de triplement	151
9.7	Logique des combinateurs	152
9.7.1	S, K et I	152
9.7.2	Comme règles de réécriture	153
9.7.3	B, C, K et W	154
9.7.4	Le combinateur M	154
10	Complexes	155
10.1	Complexes en Python	155
10.1.1	Équations polynomiales	156
10.1.2	Logarithme d'un nombre négatif	157
10.1.3	Trigonométrie complexe	158
10.1.4	Géométrie hyperbolique	159
10.2	Entiers chez les complexes	160
10.2.1	Entiers de Gauss	160
10.2.2	Entiers d'Eisenstein	163

10.3	Systèmes dynamiques complexes	165
10.3.1	Ensembles de Julia	165
10.3.2	Ensemble de Mandelbrot	167
10.4	Quaternions	169
10.5	Octonions	172
11	Analyse	173
11.1	Suites	173
11.1.1	Algorithme de Héron	173
11.1.2	Algorithme de Gauss-Salamin	174
11.1.3	Le logarithme de 2	174
11.2	Fonctions	175
11.2.1	Résolution d'équations	175
11.2.2	Fonctions trigonométriques	176
11.2.3	Limites	178
11.2.4	Dérivée	179
11.2.5	Intégrales	182
11.3	Calcul formel	185
11.4	Circulation d'un vecteur	186
12	Algèbre linéaire	187
12.1	Vecteurs du plan	187
12.1.1	Vecteurs de la tortue	187
12.1.2	Droites du plan	189
12.1.3	Systèmes dynamiques dans le plan	190
12.2	Vecteurs de l'espace	192
12.2.1	Vecteurs 3D en Python	192
12.2.2	Espace des cercles	193
13	Statistiques	195
13.1	Statistique en Python	195
13.1.1	Les listes de Python	195
13.1.2	Statistiques sur les listes	196
13.1.3	Régression linéaire	196
13.2	Variables aléatoires	197
13.2.1	Variables aléatoires binomiales	198
13.2.2	divhasard	200
14	Annexes	203
14.1	Interpréteur Sofus en Python	203
14.2	Catégories et foncteurs en Python	205
14.2.1	Catégories	205
14.2.2	Foncteurs	206
14.3	Union-Find	206
14.4	Nombres algébriques	207
14.5	Quaternions	207
14.6	Octonions	208

14.7	Vecteurs	209
14.7.1	Dessin de vecteurs	209
14.7.2	Barycentres	209
14.7.3	vecteur en 3D	209
14.8	Ensemble de Cantor	210
Bibliographie		210
Index		212