

Licence
Master

Jean-Claude Laleuf

Bases mathématiques du calcul stochastique



Table des matières

1 Espaces mesurables	9
1.1 Espaces mesurables et probabilités	9
1.2 Mesure positive et mesure signée	13
1.3 Applications mesurables	19
1.4 Processus stochastiques	23
1.5 Théorèmes de classes monotones	26
2 Espérance	31
2.1 Extension d'opérateurs de variables aléatoires	31
2.2 Projecteurs dans un espace vectoriel	37
2.3 Espérance mathématique	39
2.4 Famille uniformément intégrable	44
2.5 Espérance conditionnelle dans $L^2(\mathcal{F})$	45
2.6 Espérance conditionnelle des variables aléatoires	48
3 Capacité	51
3.1 Espace pavé	52
3.2 Théorème d'approximation par dedans	56
3.3 Capacité	59
3.4 Capacité et probabilité	60
3.5 Espaces topologiques métrisables	64
3.6 Théorèmes de projection, graphe, début et section	67
4 Temps d'arrêt	73
4.1 Propriétés générales des temps d'arrêt	74
4.2 Tribus d'événements antérieurs à un TA	78
4.3 Tribu progressive et arrêt des processus	83
4.4 Temps d'arrêt et complétude	85
4.5 Localisation	87
4.6 Processus localement bornés	89
4.7 Exemple : filtration autour d'atomes dans \mathbb{R}^+	90

5 Tribu optionnelle et tribu prévisible	95
5.1 Tribu optionnelle	96
5.2 Tribu prévisible	98
5.3 Tribus \mathcal{O} et \mathcal{P} et conditions usuelles	100
5.4 Exemple : espace des trajectoires <i>càdlàg</i>	102
5.5 Processus <i>canonique</i>	106
6 Temps prévisibles	115
6.1 Temps prévisibles	116
6.2 Temps accessible et inaccessible	119
6.3 Temps annonçables	121
6.4 Théorème des temps annonçables et de section	125
6.5 Ensembles minces	129
6.6 Sauts des processus <i>càdlàg</i>	130
6.7 Exemple : espace des trajectoires <i>càdlàg</i> (suite)	132
7 Processus à variation finie	135
7.1 Fonctions à variation finie	136
7.2 Discontinuités des fonctions à variation finie	141
7.3 Processus à variation finie	144
7.4 Processus minces	149
7.5 Intégrale de Lebesgue-Stieltjes d'une fonction	155
7.6 Intégrale de Lebesgue-Stieltjes d'un processus	162
7.7 Mesure d'ensembles aléatoires	165
8 Martingales	171
8.1 Convergence des martingales discrètes	171
8.2 Décomposition et inégalités de Doob	178
8.3 Arrêt et échantillonnage des martingales discrètes	182
8.4 Inégalités discrètes de Davis	184
8.5 Convergence des martingales à temps continu	192
8.6 Arrêt et d'échantillonnage en temps continu	195
8.7 Martingales <i>càdlàg</i> UI, espace \mathcal{M}	197
8.8 Martingales <i>càdlàg</i> de carré intégrable, espace \mathcal{M}^2	200
8.9 Martingales locales, espace \mathcal{M}_{loc}	202
9 Projection de processus	205
9.1 Projections des processus mesurables bornés	206
9.2 Projections des processus mesurables	210
9.3 Projection des processus fortement intégrables	214
9.4 Projection prévisible d'un processus mince	217
9.5 Processus optionnels et prévisibles de classe \mathcal{A}	219
9.6 Théorème de Doob-Meyer	224

10 Compensateur prévisible	231
10.1 Projections duales des processus de classe \mathcal{A}	232
10.2 Projections duales des processus de \mathcal{A}_{loc}	235
10.3 Compensateur prévisible	238
10.4 Echelon et échelon compensé	239
10.5 Modèles d'échelons	241
10.6 Projection duale et intégrale de Lebesgue-Stieltjes	244
10.7 Décomposition des martingales locales	247
11 Théorie de l'intégration stochastique	249
11.1 Espaces \mathcal{E} et \mathcal{D} , intégrale stochastique élémentaire	250
11.2 Espace \mathcal{I} des intégrateurs	253
11.3 Intégrale stochastique dans $b\mathcal{P}$	254
11.4 Espace $L(X)$, intégrale stochastique dans $L(X)$	256
11.5 Convergence dominée et linéarité dans $L(X)$	259
11.6 Sauts, associativité et arrêt de l'IS	263
11.7 Localisation	268
12 Variation quadratique et covariation	273
12.1 Sommes d'Ito	274
12.2 Covariation et variation quadratique	276
12.3 Inégalités de covariation	281
12.4 Covariation d'intégrales	283
12.5 Formule d'Ito	287
13 Intégration par une martingale	295
13.1 Espace \mathcal{M}^2 et $L^2 < M >$ où $M \in \mathcal{M}^2$	295
13.2 Intégrale stochastique dans \mathcal{M}^2	297
13.3 Intégrale stochastique relative à une martingale locale	300
13.4 Covariation dans \mathcal{M}_{loc}	301
13.5 Inégalités de Davis et de Burkholder	305
13.6 Espaces \mathcal{M}^p	309
13.7 Espaces $L^p(M)$	312
14 Semi martingale	317
14.1 Théorème de Bichteler-Dellacherie	317
14.2 Décomposition des espaces $L(X)$	324
14.3 Changement de probabilité et théorème de Girsanov	330
14.4 Intégrale optionnelle	333
15 Orthogonalité	335
15.1 Orthogonalité des martingales locales	335
15.2 Orthogonalité dans \mathcal{M}_0^2	338
15.3 Séries de martingales locales	341
15.4 Structure d'une martingale purement discontinue	345
15.5 Décomposition de l'IS	349

15.6 Décomposition des covariations	353
16 Représentation des martingales	355
16.1 Inégalité de Fefferman	356
16.2 Martingales à oscillations bornées	359
16.3 Dualité	363
16.4 Représentation intégrale des martingales	367
16.5 Représentation intégrale par un MB	374
17 Processus de Markov	379
17.1 Noyaux markoviens	380
17.2 Processus de Markov	383
17.3 Famille markoviennne	386
17.4 Modèle markovien	390
17.5 Modèle et famille markoviens	396
17.6 Semi groupe d'opérateurs dans un espace de Banach	399
17.7 Semi groupe de noyaux markoviens	409
17.8 Processus de Feller	413
18 Équations stochastiques I	419
18.1 Normes et espaces de semi martingales	420
18.2 Arrêt à gauche d'un processus	422
18.3 Fonctionnelles	424
18.4 Équation stochastique - définitions générales	426
18.5 Équation stochastique - cas Y découpable	432
18.6 Équation stochastique - cas général	438
18.7 Approximation des solutions	442
19 Équations stochastiques II	447
19.1 Continuité des solutions en fonction des conditions initiales	448
19.2 Deuxième théorème de continuité de Kolmogorov	449
19.3 Fonctionnelles markoviennes	452
19.4 Fonctionnelles lipschitziennes dans un domaine	457
19.5 Fonctionnelle markovienne dans un domaine	460
19.6 Fonctionnelles localement lipschitziennes	461
19.7 Système d'équations stochastiques	463
19.8 Système d'équations stochastiques markoviennes	466
20 Diffusion	469
20.1 Diffusion	470
20.2 Construction d'une diffusion	478
20.3 Expression stochastique de la solution d'une EDP	481
20.4 Simulation	486
20.5 Changement de probabilité dans une ES	490