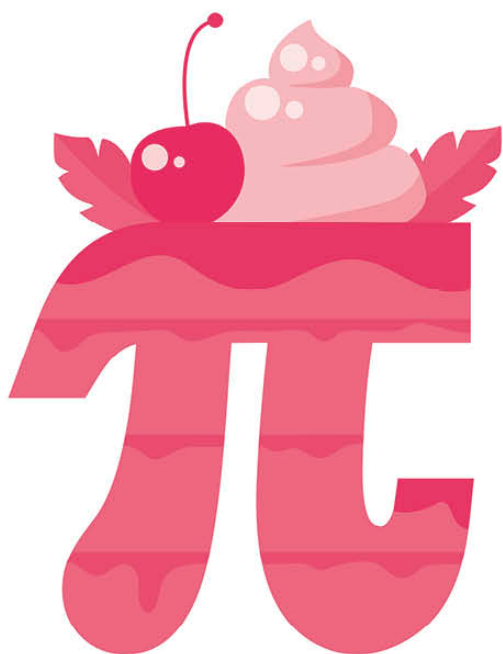


100
friandises
mathématiques



Robert Ferachoglou
Michel Lafond


ellipses poche

PREMIERE PARTIE

APERITIF

Exercice 1.
Longue distance (1979)

Quelle distance maximum peut-on parcourir avec une voiture disposant de 7 pneus neufs, sachant que chaque pneu peut parcourir **40 000 km** ?

Solution

Chaque pneu peut parcourir au maximum 40 000 km. Donc les 7 pneus peuvent parcourir ensemble $7 \times 40\,000 = 280\,000$ km. Mais un kilomètre voiture correspond à 4 km pour les pneus installés.

Donc la voiture ne peut faire que $\frac{280\,000}{4} = \mathbf{70\,000}$ km.

- Une solution est donnée ci-dessous nécessitant 6 changements de pneus.

on parcourt	avec les pneus numérotés
Une 1 ^{ère} tranche de 10 000 km	1, 2, 3, 4
Une 2 ^{ème} tranche de 10 000 km	2, 3, 4, 5
Une 3 ^{ème} tranche de 10 000 km	3, 4, 5, 6
Une 4 ^{ème} tranche de 10 000 km	4, 5, 6, 7
Une 5 ^{ème} tranche de 10 000 km	5, 6, 7, 1
Une 6 ^{ème} tranche de 10 000 km	6, 7, 1, 2
Une 7 ^{ème} tranche de 10 000 km	7, 1, 2, 3

- Voici une autre solution, nécessitant toujours 6 changements de pneus, mais ne demandant que 4 arrêts :

on parcourt	avec les pneus numérotés
Une 1 ^{ère} tranche de 10 000 km	1, 2, 3, 4
Une 2 ^{ème} tranche de 10 000 km	1, 2, 3, 5
Une 3 ^{ème} tranche de 10 000 km	1, 2, 3, 6
Une 4 ^{ème} tranche de 10 000 km	1, 2, 3, 7
Une 5 ^{ème} tranche de 30 000 km	4, 5, 6, 7

- **Prolongement possible**

Pour respecter le Code de la Route, on peut rajouter la contrainte suivante : les deux pneus avant doivent avoir la même usure, ainsi que les deux pneus arrière. Comment procéder ?

Exercice 2.

Rangement triangulaire (1979)

On place les nombres entiers dans un tableau triangulaire, suivant la disposition indiquée par le schéma ci-dessous :

			1				
		2	3	4			
	5	6	7	8	9		
10	11	12	13	14	15	16	
etc.	etc.					etc.	

On désigne une ligne par son premier nombre (situé "à gauche") et une colonne par son premier nombre (situé "en haut").

Par exemple, le nombre 12 est dans la ligne 10 et dans la colonne 2.

Quelle est la ligne et quelle est la colonne du nombre **795 471** ?

Solution

- **Remarque préliminaire :**

si n est un entier non nul, le dernier nombre de la $n^{\text{ième}}$ ligne est n^2 .

Ceci est vrai pour les premières lignes, on peut le constater.

Est-ce vrai pour toutes les lignes, même si on prolonge très loin le triangle ?

Cette question est facilement résoluble à l'aide d'un raisonnement par récurrence :

Si, à chaque numéro de ligne, n , on associe le nombre de termes de cette $n^{\text{ième}}$ ligne, on obtient la suite des nombres impairs : la $1^{\text{ère}}$ ligne possède un nombre, et si la $n^{\text{ième}}$ ligne possède $2n - 1$ nombres, alors la $(n + 1)^{\text{ième}}$ ligne en possède $(2n - 1) + 2 = 2n + 1$.

Supposons donc que la $n^{\text{ième}}$ ligne se termine par le nombre n^2 .

Alors la $(n + 1)^{\text{ième}}$ ligne se termine par le nombre

$n^2 + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$. La propriété est donc bien démontrée.

- Il est facile, à partir de cette propriété, de situer le nombre 795 471.

a) Recherche de la ligne

Il suffit d'encadrer 795 471 par les carrés des deux nombres entiers consécutifs. Or même sans calculatrice cet encadrement est facile à réaliser, car $900^2 = 810\,000$, donc l'entier n tel que $(n-1)^2 < 795\,471 \leq n^2$ est un peu inférieur à 900...

Essayons $890^2 = 792\,100$; 890 est trop petit.

Essayons $891^2 = 793\,881$; 891 est encore trop petit, mais on brûle...

Essayons $892^2 = 795\,664$; donc $891^2 < 795\,471 < 892^2$.

Donc la ligne contenant 785 471 commence par $891^2 + 1 = 793\,882$ et se termine par $892^2 = 795\,664$.

b) Recherche de la colonne

Une méthode suggérée par la structure du triangle consiste à placer le nombre 795 471 par rapport au milieu de sa ligne ; calculons ce milieu, c'est le nombre :

$$\frac{793882 + 795664}{2} = 794\,773.$$

Nous avons donc la situation suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} & 1^2 & & 2^2 & & n^2 & \\ & | & & | & & | & \\ \dots & 794773 & \dots & 794\,774 & \dots & \dots 795\,471 & \dots \\ & & & & & & \dots 892^2 \end{array}$$

Il nous suffit donc de connaître le rang de 795 471 dans l'ensemble ordonné : $\{794\,773 ; 794\,774 \dots 892^2\}$.

Ce rang est $795\,471 - 794\,772 = 699$ (et non $795\,471 - 794\,773$, attention !).

Donc la colonne contenant 795 471 commence par $699^2 = 488\,601$.

Exercice 3.
Douze chiffres en somme (1980)

Quel est le plus petit nombre entier de douze chiffres (en numération décimale) dont la somme des chiffres est 80 ?

Solution

L'énoncé ne précisant pas dans quel ensemble d'entiers on se plaçait, deux cas peuvent être envisagés :

- Dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs, le nombre cherché est **100 799 999 999**.
- Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, le nombre cherché est **–999 999 998 000**.

Une généralisation est possible : n étant un nombre entier fixé, quel est le plus petit nombre entier positif dont la somme des chiffres est égale à n ?

Exercice 4.

La fourmi mathématicienne (1980)

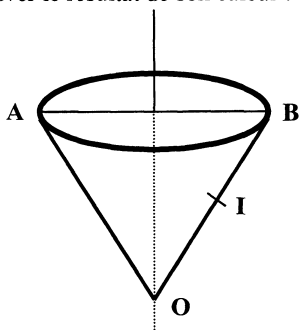
Un entonnoir a la forme d'un cône de révolution de sommet O .

A et B sont deux points diamétralement opposés sur le cercle de base.

On appelle I le milieu de OB . On suppose que $\overline{AB} = \overline{OA}$.

Une fourmi mathématicienne a calculé la longueur du plus court chemin lui permettant d'aller de A à I en restant sur l'entonnoir.

Sauriez-vous retrouver le résultat de son calcul ?



Solution

Si on veut rester sur le cône, on ne voit pas bien comment résoudre ce problème.

En tous cas il n'est pas évident que le trajet minimal soit obtenu par l'intersection du plan passant par A et I et perpendiculaire à (OB) .

L'idée est de penser à «développer» le cône, ce qui donne une partie de disque (un secteur) comme le montre la figure 1.

Le périmètre de l'arc de cercle $\widehat{AA'}$ est égal au périmètre du cercle de base du cône, c'est-à-dire $\pi \cdot AB = \pi \cdot OA$.

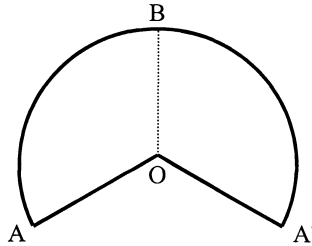


Figure 1

Il est donc égal au demi-périmètre d'un demi-cercle de rayon OA, donc le cône développé est un demi-disque comme l'indique la figure 2.

Attention le développement a modifié la distance AB.

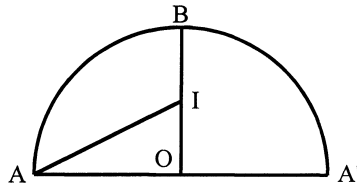


Figure 2

Mais si l'on étudie un trajet **sur le cône**, il est raisonnable de penser que sa longueur a été préservée dans le développement. Nous sommes alors amenés à choisir comme plus court trajet le segment $[AI]$

$$\text{de longueur } L = \sqrt{OA^2 + OI^2} = \sqrt{\frac{5OA^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} OA.$$

Le plus court trajet de A à I sur le cône mesure donc environ **1,12 fois le diamètre du cône**.

On peut démontrer que *le trajet minimal sur le cône n'est pas une courbe plane*, ce n'est donc pas un arc de cercle ni même d'ellipse...

Exercice 5.**Un point c'est tout (1982)**

Trouver un point M intérieur à un rectangle et 3 segments joignant M au bord de ce rectangle, et le partageant en 3 domaines d'aires proportionnelles à 3, 4, 5.

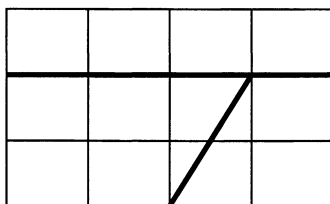
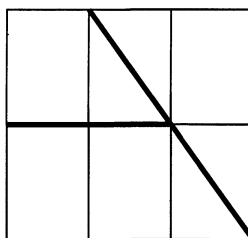
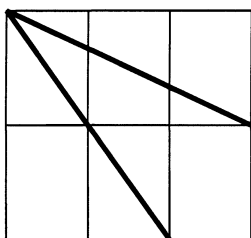
Solution

Il ne faut pas supposer que le rectangle a des dimensions connues (par exemple $4\text{ cm} \times 3\text{ cm}$), mais rester dans le cas général.

Trois solutions, valables pour un rectangle quelconque, sont détaillées ci-après.

Puisque $3 + 4 + 5 = 12$, il suffit de faire en sorte que si l'aire totale est 12 alors :

- l'un des rectangles ait une aire de 3 soit $3/12$ ou un quart du total,
- un autre ait une aire de 4 soit $4/12$ ou un tiers du total,
- et le troisième ait une aire de 5 soit $5/12$ du total.



Il n'est pas très difficile de remarquer que pour tout point M intérieur, on peut trouver 3 segments déterminant 3 domaines tels que la condition du problème soit vérifiée.

Exercice 6.**Le compte est plus ou moins bon (1982)**

Peut-on choisir les signes + ou – pour avoir :

$$1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \dots \pm 99 \pm 100 = 1982 ?$$

Solution• *1^{ère} solution*

On observe d'abord que : $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 = 5050$,
(car $1 + 100 = 2 + 99 = \dots = 50 + 51 = 101$ et $50 \times 101 = 5050$).

Mettre le signe – au lieu du signe + devant un terme n diminue la somme de $2n$, donc il suffit de trouver parmi 1, 2, ..., 100 un certain nombre

d'entiers de somme $1534 = \frac{3068}{2}$ qu'on affectera du signe –. La nouvelle

somme sera bien de $5050 - 3068 = 1982$.

On a par exemple $85 + 86 + 87 + \dots + 99 + 100 = 1480$

et $1480 + 54 = 1534$.

• *Autre solution proposée*

Dans $79 + 80 + 81 + \dots + 99 + 100 = 1969$, il manque 13.

Or $1 - 2 - 3 + 4 + 5 + 6 - 7 + 8 - 9 + 10 = 13$.

Restent les 68 nombres de 11 à 78 qui disparaissent 4 par 4 grâce à la remarquable identité :

$x - (x+1) - (x+2) + (x+3) = 0$ qu'on applique pour x variant de 11 à 75.

• *Prolongement*

Quels sont tous les entiers N tels que $1 \pm 2 \pm \dots \pm 100 = N$?

Pour cela, si on nomme A la somme des entiers affectés du signe + et B la somme des entiers affectés du signe –, alors $A + B = 5050$ et $A - B = N$ d'où $N = 5050 - 2B$.

Ce qui montre que N doit être pair.

Maintenant, si $N = I + R$ est solution, en changeant tous les signes dans R on obtient :

$$N' = I - R = -N + 2.$$

Donc la fonction $i : N \mapsto -N + 2$ est une bijection laissant stable l'ensemble des solutions.

De plus i est égale à sa réciproque.

Comme $N \leq 5050$, les solutions appartiennent à l'ensemble des entiers pairs de -5048 à $+5050$; i faisant correspondre à une solution de $[-5048, 0]$ une solution de $[2, 5050]$.

Mais la condition " N pair entre 2 et 5050" n'est réalisable que si l'on peut trouver parmi $\{2, 3, 4, \dots, 100\}$ des entiers de somme $B = \frac{5050 - N}{2}$,

B variant de 0 à 2524, ce qui n'est possible que si et seulement si $B \neq 1$ (donc $N \neq 5048$). Finalement, les entiers N réalisables sont :

tous les entiers pairs de -5048 à $+5050$ sauf -5046 et $+5048$.

Exercice 7. Découpage (1983)

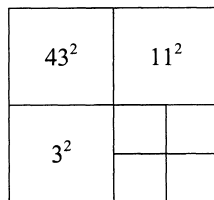
Indiquer un partage d'un carré ABCD en **1983** carrés plus petits, pas nécessairement de même dimension, et ne se recouvrant pas.

Solution

Cette friandise peut être élaborée de façons très diverses :

*** Par addition :**

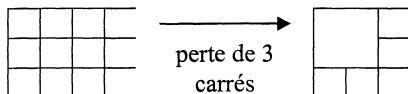
$1983 = 43^2 + 11^2 + 3^2 + 2^2$ donc on commence par partager le carré en 4 carrés égaux que l'on partage respectivement en 43^2 , 11^2 , 3^2 , 2^2 carrés égaux.



*** Par soustraction :**

$$1983 = 2025 - 3 \times 14 = (45)^2 - 3 \times 14.$$

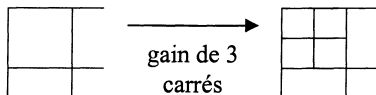
On divise d'abord le carré en 45×45 petits carrés égaux, et on regroupe 14 groupes de 4 carrés en un carré unique, *ce qui supprime 3 carrés chaque fois*.



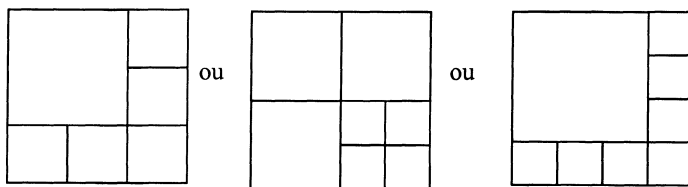
*** Encore par addition :**

On remarque que $1983 = 9 + 3 \times (658)$.

On part donc du partage d'un carré en 9 carrés égaux, et on répète 658 fois l'opération consistant à partager un carré quelconque en 4 (ce qui en rajoute 3 à chaque fois).



Cette dernière méthode permet de démontrer que pour tout $n \geq 6$ on peut partager un carré en n carrés plus petits : selon que n est de la forme $3k$ ou $3k + 1$ ou $3k + 2$, on part de l'une des configurations suivantes :



et on ajoute 3 carrés suffisamment de fois, par le procédé déjà vu de fractionnement d'un carré en 4.

Par contre la pseudo solution suivante est fausse :

"Je partage le carré initial à l'aide de $\sqrt{1983}$ bandes horizontales et verticales". Hélas $\sqrt{1983} = 44,53 \dots$; ce n'est pas un entier.

Exercice 8.**Le compte est bon (1983)**

$\div$ étant le symbole de la division, placer les parenthèses pour que :

$$1 \div 2 \div 3 \div 4 \div 5 \div 6 \div 7 \div 8 \div 9 \div 10 = 7.$$

Solution

Il y a un grand nombre de solutions, la plus immédiate et la plus simple étant :

$$(1 \div 2 + 3 \div 4 \div 5) \div (6 \div 7 \div 8 \div 9 \div 10) = \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5} \div \frac{6}{7 \times 8 \times 9 \times 10} = \frac{7 \times 8 \times 9 \times 10}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = 7.$$

Exercice 9. **Le jeu de la vérité (1984)**

Remplacer les • par
des chiffres
pour que l'affirmation
encadrée soit
exacte.

Dans ce cadre il y a exactement

- fois le chiffre 0
- fois le chiffre 1
- fois le chiffre 2
- fois le chiffre 3
- fois le chiffre 4
- fois le chiffre 5
- fois le chiffre 6
- fois le chiffre 7
- fois le chiffre 8
- fois le chiffre 9

Solution

La seule solution possible est la suivante :

présence	1	7	3	2	1	1	1	2	1	1
chiffre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- Que peut-on dire a priori ?

présence	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
chiffre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- Chaque chiffre est présent au moins une fois, donc $1 \leq x_i \leq 9$;
- $x_0 = 1$ (conséquence de a) ;
- 20 chiffres sont présents dans le cadre donc $\sum x_i = 20$.

Mais ceci ne suffit pas pour trouver tous les x_i . Il faut creuser un peu plus :

- **Voici une démarche possible :**

On pense naturellement à mettre les "1" presque partout. On se doute que le "1" est présent assez souvent disons M fois. On a donc :

présence	1	M		?	
chiffre	0	1	2		M

On suppose alors que "M" est présent 2 fois seulement (c'est en effet probable, car M est assez grand) ce qui entraîne au moins 3 présences du "2" donc 2 présences du "3". On arrive à la situation :

présence	1	M	3	2		2	
chiffre	0	1	2	3		M	

Et si on complète en haut par des 1, on obtient $M = 7$ (6 en haut et 1 en bas).

Exercice 10.

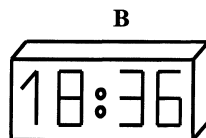
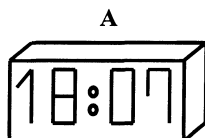
L'heure c'est l'heure (1985)

Ces deux pendules ont été mises à l'heure ce matin, en même temps.

A avance de 9 minutes par heure

B avance de 12 minutes par heure.

Quelle heure est-il ?



Solution

En une heure **réelle** B gagne 3 minutes sur A. Or B a 29 minutes d'avance sur A. Il s'est donc écoulé $\frac{29}{3}$ d'heures réelles depuis la mise à l'heure.

Pendant ce temps, B a donc avancé de $\frac{29}{3} \times 12 = 116$ minutes = 1 h 56.

Il est donc 18 h 36 – 1 h 56 = **16 h 40**.

Remarques sages :

- Il est meilleur d'éviter les solutions algébriques à grand renfort de x , y , t , etc.
- Il ne faut pas s'emmêler les aiguilles dans les calculs (confusions entre heure réelle et heure indiquée).
- Finalement, il vaut mieux une pendule qui marche plutôt que deux qui ne marchent pas.

Exercice 11.
Ca roule (1985)

Si on divise l'année où fut inventée la bicyclette à roue arrière motrice par l'année où fut signé le traité de Windsor, on trouve **1,35353535...**
 Quelles sont ces deux années ?

Solution

Il faut se garder de croire que les données sont insuffisantes.

On peut trouver les bonnes dates sur une encyclopédie et conclure :

"Je sais que la date du traité de Windsor est 1386, donc la bicyclette fut inventée en $1386 \times 1,353535... = 1876$.", mais cela demande de considérer le "bon" traité de WINDSOR, sinon cela donne :

$$\text{"La date du traité de Windsor est 1175, donc } \frac{x}{1175} = 1,353535$$

$$\text{d'où } x = 1590,4036.$$

La bicyclette a donc été découverte fin mai 1590".

(Il y a eu effectivement un certain traité de Windsor en 1175...)

Voici une vraie solution :

Si $x = 1,353535...$ alors $100x = 135,3535... = 134 + x$ donc $99x = 134$

soit $x = \frac{134}{99}$ fraction irréductible.

Les dates cherchées sont donc $134n$ et $99n$ avec n entier naturel non nul.

Pour la bicyclette :	$n = 13$	donne	1742 :	trop tôt ;
	$n = 14$	donne	1876 ;	
	$n = 15$	donne	2010 :	trop tard.

Il reste :

1876 pour la bicyclette donc $14 \times 99 = 1386$ pour le traité de Windsor,

(entre Richard II et Jean I^{er}).

Exercice 12.**5, 4, 3, 2, 1 ... Partez ! (1990)**

Les nombres entiers de 1 à 9999 sont écrits en Français :
(UN, DEUX, ..., VINGT, VINGT-ET-UN, ..., TRENTE-HUIT, ...) puis
rangés par ordre alphabétique.

Quels sont les deux premiers et les deux derniers de la liste ?

Quelle est la place de UN dans la liste ?

Solution

Les deux premiers de la liste sont : **CENT** puis **CENT-CINQ**.

Les deux derniers de la liste sont : **VINGT-SIX** puis **VINGT-TROIS**.

La place de UN est donc la 9989^{ième} (juste devant la série des VINGT).

Prolongements possibles :

What is the place of "ONE" in the list ?

Quale è il numero di "UNO" nella lista ?

Exercice 13.**Tout bu or not tout bu (1991)**

Un litre a la forme d'un cylindre de **20** cm de haut, surmonté d'un goulot de
forme éthyliroïdale, et contient du bon vin.

Si le litre est à l'endroit, on mesure **14** cm de vin.

Si le litre est à l'envers, on mesure **11** cm d'air.

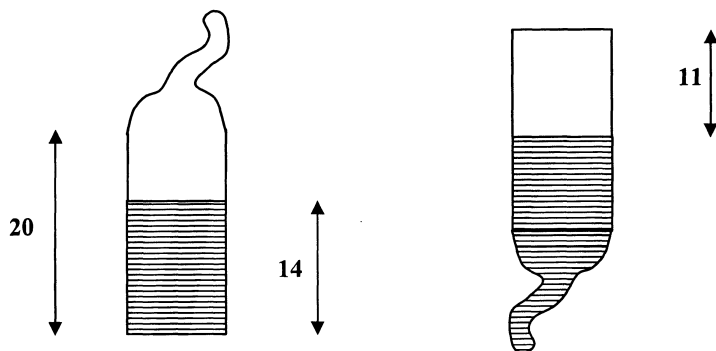
Combien y-a-t-il de vin ?

Solution

Remarquons d'emblée que l'adjectif "éthyliroïdal" sera longtemps absent
des dictionnaires sérieux, peu enclins à adopter les délires des auteurs. Tout
cela pour dire que la forme du goulot n'a aucune importance !

Pour ceux qui sont brouillés avec les unités, rappelons que :

$$1 \text{ dm}^3 = (10 \text{ cm})^3 = 10^3 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ cm}^3.$$



Le volume de vin et le volume d'air font au total 1000 cm^3 . Or si S est la surface de base du litre, le volume de vin est $14 S$ (figure gauche) et le volume d'air est $11 S$ (figure droite).

Donc : $14 S + 11 S = 25 S = 1000$ d'où $S = \frac{1000}{25} = 40 \text{ cm}^2$.

Le volume du vin est donc

$$14 S = 14 \times 40 = 560 \text{ cm}^3 \quad (\text{ou } 0,56 \text{ l}) \quad (\text{ou } 56 \text{ cl}).$$

Remarque :

On peut calculer le rayon du cylindre :

$$\text{de } S = \pi R^2 = 40 \text{ cm}^2 \text{ on tire : } R \approx 3,6 \text{ cm}.$$

On peut aussi calculer le volume du goulot : $1000 - 20 \times 40 = 200 \text{ cm}^3$.

Exercice 14.

Voyage dans le futur (1992)

Les dates sont écrites avec huit chiffres selon le procédé habituel :

3 janvier 1839 s'écrit 03.01.1839

26 mai 1874 s'écrit 26.05.1874

Cette dernière date utilise huit chiffres distincts.

Quelle sera la prochaine date (après le 18 mars 1992) ayant la même particularité ?

Solution

- Toutes les années du XX^{ième} siècle après 1992 s'écrivent à l'aide de deux 9 ; l'année du millénaire commence donc par 2 (au moins).
- Le chiffre des dizaines du mois est 0 ou 1, celui du jour est 0, 1, 2 ou 3. Puisque le 2 est utilisé, et que le 3 réclame les chiffres 0 ou 1, on en déduit que le chiffre des centaines de l'année ne peut être ni 0 ni 1, qui sont tous deux requis pour l'écriture du mois et du jour. Le plus petit chiffre des centaines convenable est 3, et donc, aucune année avant 2345 ne convient.
- Le premier mois écrit à l'aide des chiffres restants est 06 (juin) puisque 1 est nécessaire à l'écriture du jour, et le premier jour possible est le 17.

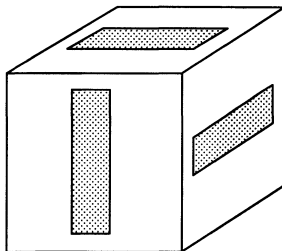
La date cherchée est le 17 / 06 / 2345.

Exercice 15. Tirelire-lire-lire (1992)

Dans un cube de bois de côté **10 cm**, sont percées de part en part trois fentes rectangulaires parallèlement aux arêtes du cube.

Chaque rectangle mesure **8 cm × 2 cm** et a le même centre que la face qui le contient.

Quel est le volume restant ?



Solution

Bien sûr on trouve 1000 cm^3 si l'on considère que la boîte est en tôle et vide, les fentes n'enlevant rien au volume. Mais soyons sérieux :

Voici deux solutions ou V est le volume cherché, T celui du trou.

Solution 1 :

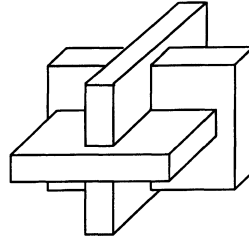
On procède par soustraction :

$$V = 1000 - T.$$

Le trou est composé de 8 parallélépipèdes de dimensions $2 \times 4 \times 8$, et au centre, d'un cube de côté 2 cm. On a donc :

$$T = 6 \times (2 \times 4 \times 8) + 2^3 = 392.$$

$$\text{Il reste } V = 10^3 - 392 = \mathbf{608}.$$

**Solution 2 :**

On peut aussi, en appelant F_1 , F_2 , F_3 les 3 fentes parallélépipédiques, utiliser la formule de POINCARÉ (principe d'exclusion-inclusion) qui permet de trouver le cardinal d'une réunion d'ensembles connaissant les cardinaux de tous les ensembles et de leurs intersections. Ici, cela donne :

$$\begin{aligned} \text{Vol}(F_1 \cup F_2 \cup F_3) &= \text{Vol}(F_1) + \text{Vol}(F_2) + \text{Vol}(F_3) \\ &- \text{Vol}(F_1 \cap F_2) - \text{Vol}(F_1 \cap F_3) - \text{Vol}(F_2 \cap F_3) + \text{Vol}(F_1 \cap F_2 \cap F_3), \end{aligned}$$

$$\text{donc } T = 3 \times (2 \times 8 \times 10) - 3 \times (2 \times 2 \times 8) + 2^3 = 392.$$

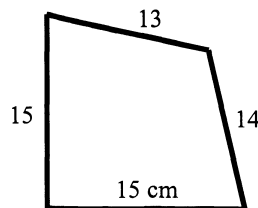
$$\text{Il reste } V = 10^3 - 392 = \mathbf{608}.$$

Exercice 16.**Casse-dalle (1992)**

Pour paver sa cuisine, LEON a des carreaux tous identiques, mais avec un défaut : un seul angle est droit.

Comment peut-il procéder sans casse ?

(Bien sûr, aux bords de la cuisine, des carreaux peuvent être coupés).

**Solution**

Qui aura réussi à paver la cuisine de Léon ?

Sans aller jusqu'à découper les carreaux à sa guise, voici un florilège de faux dessins : (figures 1, 2 et 3).

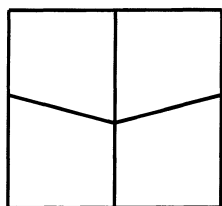


Figure 1

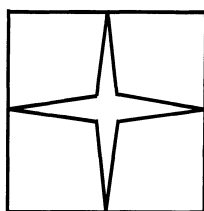


Figure 2

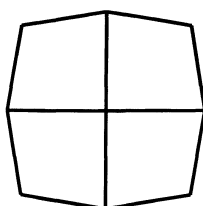


Figure 3

- La figure 1 est une mauvaise perception géométrique ;
- La figure 2 nécessite du ciment pour boucher les trous ;
- La figure 3 ne marche pas, nous verrons plus bas pourquoi.

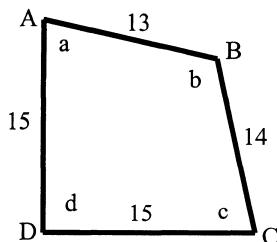
Solution :

Notons a , b , c , d les 4 angles en degrés et remarquons que :

$d = 90$, $a < 90$, $c < 90$, $b > 90$ (c 'est le seul angle obtus).

$a + b + c + d = 360$ car un quadrilatère est la réunion de deux triangles, donc $a + b + c = 270$.

Comme $c < 90$ et $a < 90$, on a $a + b > 180$ et $b + c > 180$.



Démontrons d'abord que dans un pavage du plan, les côtés $AB = 13$ sont nécessairement en contact exact (sans décrochage). Si ce n'était pas le cas, un côté AB serait en contact avec un côté plus long (14 ou 15) qui déborderait d'un côté. On aurait donc l'une des deux situations suivantes :