

# ÉNIGMES MATHÉMATIQUES CORRIGÉES

du lycée à Normale Sup'

Préface de  
**Cédric  
Villani**

2<sup>e</sup> édition



Guillaume Deslandes  
Clément Deslandes

Illustrations de Laure Macé de Lépinay

ellipses

# Première partie

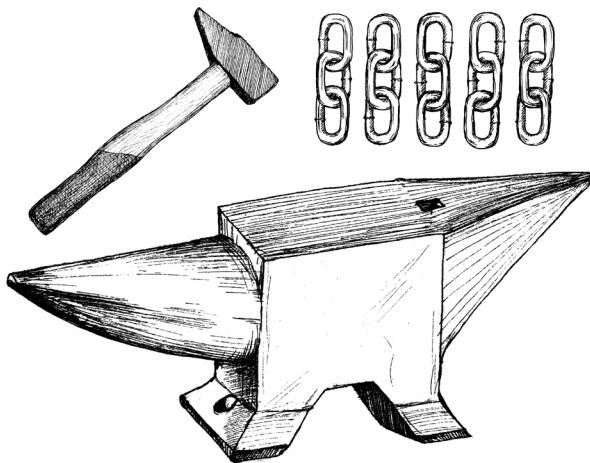
## Énoncés



# Niveau 1

## 1 Le forgeron feignant

Un forgeron souhaite former une chaîne de quinze maillons à l'aide de ces cinq chaînes de trois maillons :



Pour cela, il peut ouvrir des maillons et les refermer.

Comment peut-il réaliser cette chaîne en ouvrant un nombre minimum de maillons ?

## 2 Les fourmis tamponneuses

Cinquante fourmis sont lâchées simultanément sur un bâton. Chaque fourmi atterrit sur une partie quelconque du bâton et part dans une direction quelconque. Lorsque deux fourmis se rejoignent, elles se touchent et repartent instantanément dans des directions opposées. Quand une fourmi arrive au bord du bâton, elle tombe. Le bâton fait un mètre de long et les fourmis avancent à la vitesse de 1 m/min.

Au bout de combien de temps au maximum toutes les fourmis seront-elles tombées du bâton ?

*Par exemple, s'il n'y a qu'une fourmi lâchée sur le bâton au lieu de cinquante, elle mettra au maximum une minute pour en tomber. En effet, le cas le plus défavorable se produit lorsqu'elle atterrit sur l'extrémité gauche du bâton et part du côté droit ou lorsqu'elle atterrit sur l'extrémité droite du bâton et part du côté gauche.*



### 3 Le prix du gâteau

Trois amis préparent une fête. Le premier fait cinq gâteaux, le second en fait trois et le troisième ne sait pas cuisiner. Il propose néanmoins de participer à hauteur de huit euros.

Comment doit-il répartir ses huit euros entre ses deux amis pour que tout le monde ait contribué autant ?

*Les trois amis se sont mis d'accord : le troisième doit distribuer l'intégralité de ses huit euros aux deux autres. Il peut par exemple donner cinq euros à celui qui a fait cinq gâteaux et trois euros à celui qui en a fait trois, mais est-ce équitable ?*

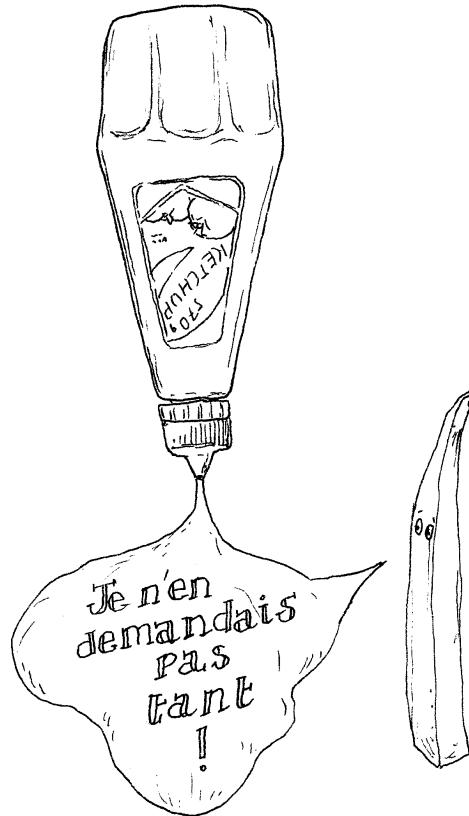
*La première version de cette énigme se trouve dans un livre écrit par le célèbre mathématicien Fibonacci en 1202 !*



## 4 La frite au ketchup

Jacques termine ses frites. Arrivé à la dernière frite, il décide de rajouter un peu de ketchup. Maladroit, il renverse tout le pot sur la malheureuse frite. Jacques constate alors que la masse de ketchup dans l'assiette représente 99% de la masse totale frite plus ketchup qui est de 1 kg. Après mûre réflexion et en considérant son amour pour le ketchup, il décide d'enlever juste assez de ketchup pour avoir exactement 98% de ketchup dans son assiette.

Quelle masse de ketchup doit-il retirer ?



## 5 L'explorateur qui tourne en rond

Un explorateur marche 1000 km vers le sud, puis 1000 km vers l'ouest, puis 1000 km vers le nord. Il constate alors qu'il est retourné à son point de départ !

Quels sont les points de départ possibles ?

*Le pôle Nord est un point de départ possible, mais ce n'est pas le seul.*



## 6 L'œuf à la coque

Un aventurier affamé au milieu de la jungle veut se faire cuire un œuf à la coque. Il a tout ce qu'il faut pour cela, excepté l'indispensable chronomètre. Heureusement, il a ramassé deux lianes dont il sait par expérience qu'elles mettent exactement quatre minutes à brûler.

Comment peut-il chronométrier trois minutes avec ces deux lianes ?

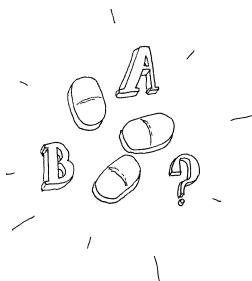
*Les lianes mettent exactement quatre minutes à brûler entièrement mais ne brûlent pas forcément de façon régulière. Par exemple, une moitié de liane peut se consumer en une minute.*

## 7 Les pilules

Yves s'est fait prescrire un traitement particulier par son homéopathe préféré. Il doit prendre exactement une pilule A et une pilule B tous les jours pendant trente jours. Un jour, il met une pilule A dans sa main et maladroitement deux pilules B dans la même main. Les pilules sont indiscernables, il ne sait donc pas ni quelle est la pilule A ni quelles sont les pilules B. Il ne disposait au départ que de trente pilules A et trente pilules B, il ne peut donc pas se permettre de jeter les trois pilules.

Comment Yves peut-il faire pour suivre son traitement sans perdre de pilule ?

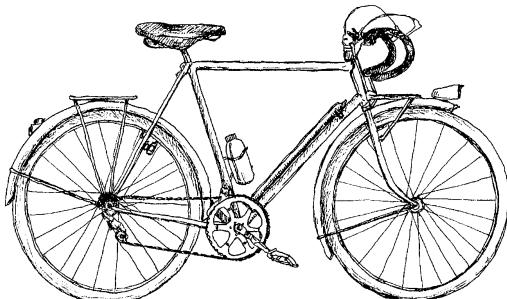
*Il est possible de couper les pilules en plusieurs morceaux.*



## 8 L'étudiant pressé

Un étudiant se rend tous les jours à la fac en vélo. Il fait le trajet à 20 km/h de moyenne.

À quelle vitesse doit-il aller au retour pour que sa vitesse moyenne sur l'aller-retour soit de 40 km/h ?

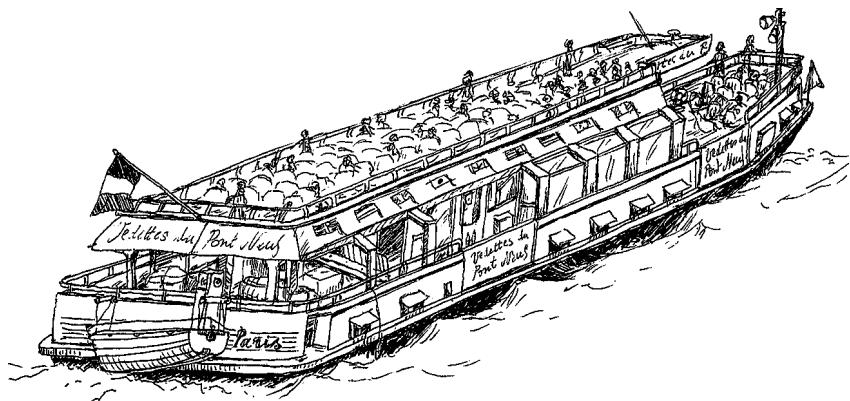


## 9 À contre-courant

Un bateau-mouche fait tous les jours le même parcours : il descend une partie de la Seine, fait demi-tour, et remonte à contre-courant jusqu'à son point de départ. Un jour, la vitesse du courant est plus élevée que d'habitude.

Le bateau va-t-il mettre moins, autant ou plus de temps que d'habitude pour faire l'aller-retour ?

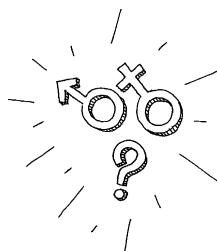
*Le bateau va mettre moins de temps à l'aller mais plus de temps au retour.*



## 10 Vive les garçons

Un pays décrète qu'une famille ne peut avoir un deuxième enfant que si le premier est une fille et dans tous les cas ne peut pas avoir plus de deux enfants.

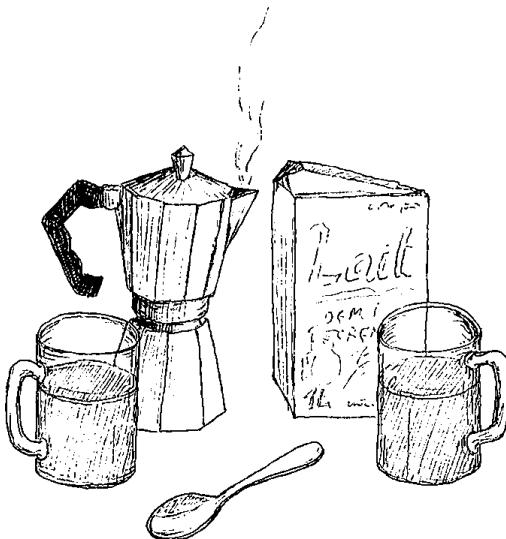
Cela va-t-il modifier la proportion de garçons et de filles ?



## 11 Café au lait

Damien a devant lui une tasse de café et une tasse de lait. Les deux tasses contiennent la même quantité de liquide : 200 mL. Il commence par mettre une cuillère de café dans le lait puis met une cuillère du mélange lait-café dans le café. La cuillère a une contenance de 5 mL.

À la fin de l'opération, y a-t-il plus de lait dans le café ou de café dans le lait ?



## 12 Lait au café

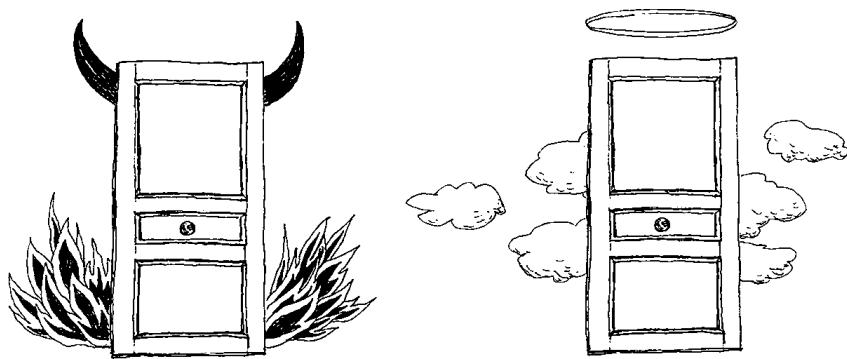
Damien a devant lui une tasse de café et une tasse de lait. Les deux tasses contiennent la même quantité de liquide : 200 mL. Il commence par mettre une cuillère de café dans le lait puis met une cuillère du mélange lait-café dans le café. La cuillère a une contenance de 5 mL.

Peut-il, en répétant autant de fois que nécessaire cette même opération, obtenir une tasse contenant autant de café que de lait ?

## 13 Les gardes du paradis et de l'enfer

Imaginons deux portes indiscernables, derrière l'une, le paradis, derrière l'autre, l'enfer. Chaque porte est surveillée par un garde. Un des gardes dit toujours la vérité tandis que l'autre garde ment systématiquement, mais on ne peut pas savoir auquel des deux gardes on a affaire.

Comment déterminer, en posant qu'une seule question à l'un des deux gardes, quelle est la porte du paradis ?



## 14 Toto monte un escalier

Toto monte un escalier de dix marches. Il peut monter une marche par marche ou sauter une marche dès qu'il le souhaite et ce autant de fois qu'il le souhaite.

Combien Toto a-t-il de façons différentes de monter cet escalier ?

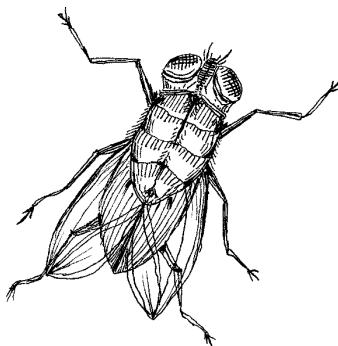
*Par exemple il y a cinq façons différentes de monter un escalier de quatre marches :*



## 15 La mouche virevoltante

Deux trains au départ distants de 400 km foncent l'un vers l'autre, chacun allant à la vitesse de 200 km/h. Une mouche part du premier train et vole à la vitesse incroyable de 400 km/h jusqu'au deuxième train. Lorsqu'elle l'atteint, elle fait instantanément demi-tour et repart vers le premier train et ainsi de suite, continuant ses aller-retours jusqu'à ce que les deux trains se rejoignent.

Quelle distance la mouche parcourt-elle au total ?



## 16 Une heure d'avance

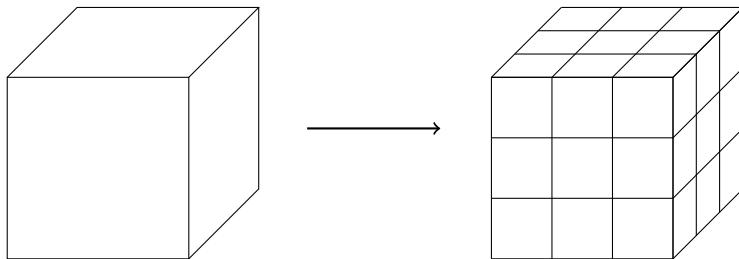
Un petit garçon sort tous les jours de l'école à 16 h et sa maman vient le chercher tous les jours à 16 h. Un jour, le petit garçon sort exceptionnellement à 15 h de l'école. N'ayant pas prévenu sa maman et sachant qu'elle va arriver à 16 h, il préfère marcher à sa rencontre au lieu de l'attendre. Il marche sur la route habituelle vers sa maison jusqu'à ce qu'il croise la voiture de sa maman. Elle le fait monter, fait demi-tour et rentre à la maison. Ils arrivent dix minutes plus tôt que d'habitude.

Combien de temps le petit garçon a-t-il marché ?

*On considérera que sa maman n'a pas perdu de temps en le faisant monter et que la voiture roule à vitesse constante.*

## 17 Comment découper un cube

On souhaite découper un cube en 27 petits cubes comme sur le schéma ci-dessous :



On dispose pour cela d'une scie, qui naturellement coupe suivant des plans : il n'y a pas de coupes tordues. On peut arriver à découper le grand cube en six coupes en maintenant les pièces découpées à leur place, c'est-à-dire en ne les séparant que lorsque le découpage est entièrement fini.

Peut-on arriver à découper le grand cube en moins de six coupes en redisposant les pièces comme on veut à chaque coupe ?

## 18 Le premier à cent

Deux amis jouent au petit jeu suivant. Partant de zéro, chacun ajoute à la somme précédente un nombre entier compris entre un et dix à tour de rôle. Le gagnant est le premier qui arrive à cent.

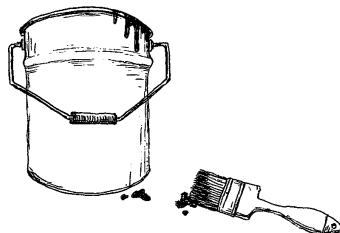
Quelle stratégie celui qui commence peut-il mettre en place pour gagner à tous les coups ?



## 19 Attention peinture fraîche

Trois peintres doivent repeindre un salon. Le premier mettrait deux heures s'il était seul pour tout repeindre, le second en mettrait trois et le troisième cinq.

Combien de temps mettent-ils à trois ?



## 20 Le cocktail mondain

Au cours d'un cocktail, les convives se serrent la main au gré des rencontres. Chaque convive ne serre jamais la main plus d'une fois à la même personne.

Montrer qu'à tout instant il existe au moins deux personnes qui ont serré le même nombre de mains.



## 21 Le cocktail mondain (bis)

Au cours d'un cocktail de quatorze convives répartis en sept couples, les convives se serrent la main au gré des rencontres. Chaque convive ne serre pas la main de son/sa conjoint(e) et ne serre jamais la main plus d'une fois à la même personne. À la fin du cocktail, une convive demande à chacun des autres treize convives le nombre de mains qu'il a serrées et elle obtient des réponses toutes différentes.

Combien de mains a serré le conjoint de cette convive ?

## 22 Même heure, même endroit

Un jeune cadre part de chez lui à huit heures du matin pour aller travailler. Après une longue journée, il quitte son lieu de travail à huit heures du soir et rentre chez lui par le même chemin qu'à l'aller.

Montrer que sur le chemin du retour, il y aura au moins un moment où sa montre indiquera la même heure qu'au même endroit le matin, c'est-à-dire qu'il sera exactement au même endroit que 12 h plus tôt.



## 23 La pièce de trop

Un étudiant passe un entretien d'embauche. On lui propose le jeu suivant pour tester sa sagacité. Il est placé devant une table carrée en face de son futur employeur. À côté se trouve un bac de pièces, toutes rondes et identiques. Chacun place à tour de rôle une pièce sur la table qui ne doit pas toucher les autres pièces déjà posées. Le perdant est celui qui n'a plus de place pour poser sa pièce. L'étudiant commence.

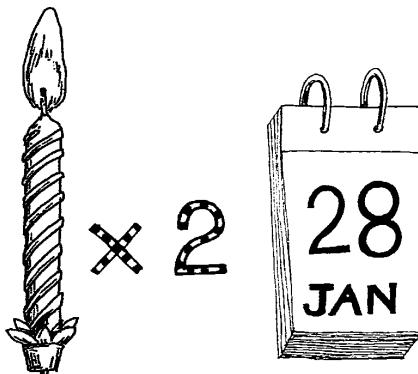
Quelle stratégie peut-il adopter pour gagner à tous les coups ?

## 24 Le paradoxe des anniversaires

Une classe comporte vingt-trois élèves.

Quelle est la probabilité que deux élèves aient leur anniversaire le même jour de l'année ?

*On considérera pour simplifier que toutes les années ont 365 jours. On supposera de plus que chaque élève a une probabilité  $\frac{1}{365}$  d'être né un jour donné. Ce problème n'a rien d'un paradoxe, mais il est souvent appelé ainsi parce que le résultat contredit fortement l'intuition. Cela vaut la peine de faire le calcul !*

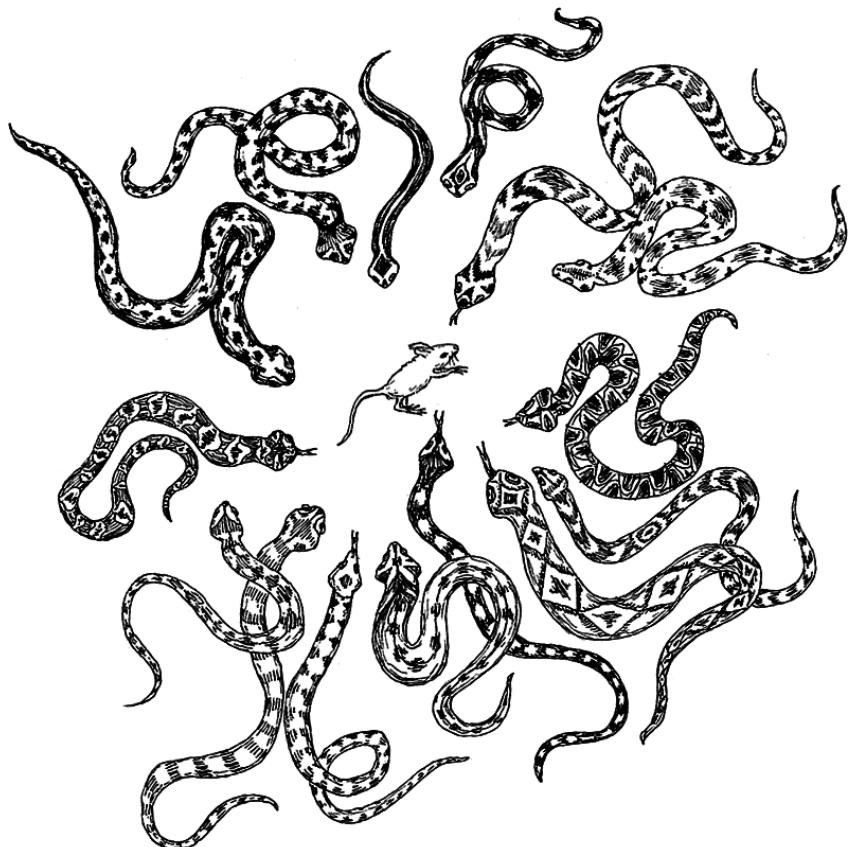


## 25 Les quinze serpents

Quinze serpents encerclent une souris. Tous les serpents veulent manger la souris, mais chaque serpent sait que s'il mange la souris, il va s'endormir et il pourra à son tour se faire manger par un autre serpent.

Que se passe-t-il ?

*Bien sûr, les serpents sont affamés, mais ils préfèrent encore s'abstenir si c'est pour se faire manger dans la foulée. On supposera qu'il existe toujours un serpent plus rapide que les autres.*



## 26 Un test de dépistage

Une maladie frappe 0.1% de la population. Un laboratoire pharmaceutique propose un test de dépistage fiable à 99%, c'est-à-dire ayant 99% de chance d'indiquer "négatif" si l'individu dépisté est sain et 99% de chance d'indiquer "positif" si l'individu est malade. Le test est toujours soit positif, soit négatif.

Quelle est la probabilité qu'un individu dépisté positif soit effectivement malade ?



## 27 Une curieuse étude

Une étude médicale a été menée pour tester la performance de deux traitements A et B contre les calculs rénaux<sup>1</sup>. L'étude se divise en deux parties.

Dans la première, on teste l'efficacité des traitements A et B contre les petits calculs rénaux. Sur  $N_1^A$  petits calculs rénaux traités avec le traitement A, le taux de succès est de 93%. Sur  $N_1^B$  petits calculs rénaux traités avec le traitement B, le taux de succès est de 87%.

Dans la seconde partie, on teste l'efficacité des traitements A et B contre les gros calculs rénaux. Sur  $N_2^A$  gros calculs rénaux traités avec le traitement A, le taux de succès est de 73%. Sur  $N_2^B$  gros calculs rénaux traités avec le traitement B, le taux de succès est de 69%.

Le nombre total de tests effectués avec le traitement A est le même que celui avec le traitement B : on a  $N_1^A + N_2^A = N_1^B + N_2^B$ .

Le traitement A est plus efficace dans les deux cas. Pourtant, lorsqu'on regarde le taux de réussite total (en réunissant les petits et les gros calculs rénaux) du traitement A, on trouve 78%, alors que le taux de réussite total du traitement B est de 83% !

Comment est-ce possible ?

*Inutile de chercher les valeurs de  $N_1^A, N_2^A, N_1^B, N_2^B$  permettant de retrouver ces résultats. L'enjeu est simplement d'expliquer ce phénomène et de trouver un exemple simple où il s'exprime de manière flagrante.*

---

1. C. R. CHARIG, "Comparison of treatment of renal calculi by open surgery, percutaneous nephrolithotomy, and extracorporeal shockwave lithotripsy", British Medical Journal, Clinical Research Ed., Mars 1986, 292(6524) : 879-88

## 28 La proportion de menteurs

Un logicien se rend dans un pays où les habitants sont soit des véridiques (ils disent toujours la vérité), soit des menteurs (ils mentent toujours). Il est placé au milieu d'un cercle de cent habitants et demande à chaque habitant si son voisin de droite est un menteur. Avec les réponses obtenues, le logicien arrive à en déduire la proportion de menteurs dans le cercle.

Quelle est cette proportion ?



# Niveau 2

## 29 Lignes et colonnes de pièces

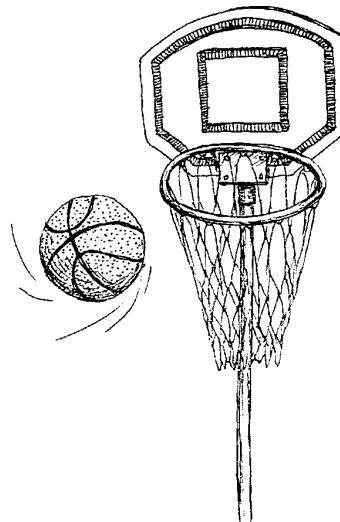
On place sur un échiquier soixante-quatre pièces, une par case. On peut retourner toutes les pièces d'une même ligne ou d'une même colonne autant de fois qu'on le souhaite.

Montrer qu'on peut arriver à une configuration où sur chaque ligne et sur chaque colonne, le nombre de piles est supérieur ou égal au nombre de faces.

## 30 Les lancers francs

Un basketteur s'entraîne aux lancers francs. Il rate son premier lancer mais termine la journée avec une moyenne de 80% de réussite.

Montrer qu'il a eu à un moment une moyenne d'exactement 75% de réussite.



## 31 Le numéro de la rue d'en face

Le facteur apporte le courrier chez l'institutrice. Celle-ci lui propose une devinette :

“J’ai trois enfants. Le produit de leurs âges est 36 et la somme de leurs âges est le numéro de la rue d’en face. Quels âges ont-ils ?

– Je ne peux pas le savoir, répond le facteur qui connaît pourtant le numéro de la rue d’en face.

– L’ainée joue du piano.

– Dans ce cas je connais leurs âges respectifs”.

Quels sont les âges des enfants de l’institutrice ?

## 32 Le tableau instable

Comment accrocher un tableau avec deux clous de telle sorte que, quel que soit le clou que l’on retire, le tableau tombe ?

*Par exemple, sur la figure ci-dessous, le tableau tient encore si l'on retire un clou : ce n'est pas satisfaisant.*

