MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES INFORMATIQUE

Pour consolider les acquis du lycée et réussir le 2e semestre

ECG

2e semestre

Sébastien Krief-Détraz

ellipses

Chapitre nº 1

CONDITIONNEMENT & INDÉPENDANCE

Sommaire

Les probabilités conditionnelles sont omniprésentes dans la vie courante et leur utilisation inappropriée mène facilement à de fausses interprétations. Un événement a-t-il plus de chances de se réaliser si sa probabilité vaut 0,0001 ou s'il se réalise 1 fois sur 5 000 lorsqu'un autre événement se réalise une fois sur deux ? La perception de probabilité varie pour chaque individu, d'où l'importance de bien en maîtriser les notions de base.

Après le traité de Huygens de 1657, cette branche des mathématiques connaîtra un rapide développement au XVIII^{e}s. avec les travaux de Bayes, premier à utiliser la notion de conditionnalité, et de Moivre, premier à utiliser la notion d'indépendance.

De par leur proximité avec le quotidien, les probabilités conditionnelles font l'objet de nombreux paradoxes passionnants. Nous en étudierons certains en exercices.

Activité

Si vous êtes sages et attentifs, il y a une forte probabilité que vous ayez une correction de cette activité en page 18.

Voici la répartition selon le salaire et le sexe des employés d'une fabrique de machin-trucs.

	Salaire $\leqslant 20\,000$ €	*Salaire* $> 20\,000$ €
Femme	$0,35$	$0,1$
Homme	$0,3$	$0,25$

On considère les événements F *: « l'employé choisi est une femme »*
et E *: « l'employé choisi gagne moins de 20 000 € par an ».*

1. *Que signifient les valeurs* $0,25$ *et* $0,35$ *?*
2. *Parmi tous les employés, on en choisit un au hasard.*
   (a) *Quelle est la probabilité que ce soit une femme qui gagne moins de 20 000 € par an ?*
   (b) *Quelle est la probabilité qu'il gagne moins de 20 000 € par an ?*
   (c) *Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?*
   (d) *Calculer* $\mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(F)$ *et comparer ce produit à* $\mathbb{P}(E \cap F)$.
3. *Parmi les femmes, on en choisit une au hasard.*
   (a) *Quelle est la probabilité qu'elle gagne moins de 20 000 € par an ?*
   (b) *Comparer la probabilité précédente au quotient* $\frac{\mathbb{P}(E\cap F)}{\mathbb{P}(F)}$.
4. *Parmi les employés qui gagnent moins de 20 000 €, on en choisit un au hasard.*
   (a) *Quelle est la probabilité que l'employé choisi soit une femme ?*
   (b) *Exprimer la probabilité précédente au moyen des probabilités* $\mathbb{P}(E \cap F)$ *et* $\mathbb{P}(E)$.
5. *Calculer puis interpréter le quotient* $\frac{\mathbb{P}(E\cap\overline{F})}{\mathbb{P}(\overline{F})}$.
6. *Dresser deux arbres pondérés avec des probabilités en lettres.*

1 Probabilité conditionnelle

1.1 Définition

Nous rappelons la définition d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur un univers fini $\Omega = \{x_1; \ldots; x_n\}$.

Définition & Propriété 1.1 *Une loi de probabilité* $\mathbb{P}$ *sur* $\mathcal{P}(\Omega)$ *est une application de* $\mathcal{P}(\Omega)$ *dans* $[\,0\,;1\,]$ *telle que* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *et, pour tous événements* A *et* B *incompatibles, c.-à-d. tels que* $A \cap B = \varnothing$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
Si $\Omega = \{x_1; \ldots; x_n\}$, *on pose* $p_i = \mathbb{P}(\{x_i\})$ *la probabilité de l'événement élémentaire* $\{x_i\}$,
et l'on a $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ *et* $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
La probabilité d'un événement est alors la somme des probabilités des issues qui le réalisent :

$$\text{Si} \quad A = \{x_{i_1}, x_{i_2} \ldots, x_{i_m}\} \quad \text{alors} \quad \mathbb{P}(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_m}.$$

On a toujours $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ *et* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Suite à notre activité d'introduction, il est bigrement tentant de se lancer dans la définition suivante, non ?

Définition 1.1 ***Probabilité conditionnelle***
A et B étant deux événements d'une même expérience aléatoire tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on définit la probabilité conditionnelle de B sachant A par le nombre $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.

Cette probabilité conditionnelle est aussi notée $\mathbb{P}(B|A)$. Il est souvent plus facile de déterminer une probabilité conditionnelle que celle d'une intersection d'où l'utilité de la propriété suivante.

Propriété 1.2 *Si* $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \neq 0$, *alors* $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$.

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de la définition des probas conditionnelles. $\square$

Théorème 1.3 *Si* $\mathbb{P}(A) \neq 0$, *la probabilité $\mathbb{P}_A$ définit bien une loi de probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.*
En particulier, $\mathbb{P}_A(\Omega) = 1$, $\mathbb{P}_A(\varnothing) = 0$, $\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1$
et $\mathbb{P}_A(B \cup C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C) - \mathbb{P}_A(B \cap C)$.

Démonstration : • $\mathbb{P}_A$ est bien définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ et l'on a $\mathbb{P}_A(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(A\cap\Omega)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$.
- Puisque $A \cap B \subset A$, $0 \leqslant \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A)$ et comme $\mathbb{P}(A) > 0$, $0 \leqslant \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}_A(B) \leqslant 1$.
- Soient B et C deux événements incompatibles.

On a $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, deux événements incompatibles car $B \cap C = \varnothing$.
Ainsi, $\mathbb{P}$ étant une loi de probabilité, $\mathbb{P}(A\cap(B\cup C)) = \mathbb{P}((A\cap B)\cup(A\cap C)) = \mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A\cap C)$
et $\mathbb{P}_A(B \cup C) = \frac{\mathbb{P}(A\cap(B\cup C))}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} + \frac{\mathbb{P}(A\cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C)$: $\mathbb{P}_A$ est une loi. $\square$

1.2 Formule des probabilités composées

Cette formule généralise celle de la propriété 1.2 : pour $\mathbb{P}(A) \neq 0$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$.

Théorème 1.4 ***Probabilités composées***
Soient $n \geqslant 2$ et n événements A_1, A_2, ..., A_n tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$,
alors $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\dots\mathbb{P}_{A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n)$.

Cette formule s'observe très bien dans un arbre de probabilité d'ordre 3. Elle est utile lorsque le contenu des urnes évolue au cours du jeu (sans remise ou avec remise partielle ou...). Elle est donc adaptée aux situations de tirages successifs sans remise par exemple.

Démonstration : · Remarquons premièrement que si $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$, alors ceci est vrai si l'on s'arrête « avant », en $p \leqslant n$, et les probabilités conditionnelles intermédiaires sont bien définies.
· La formule est trivialement vraie au rang 1 et vraie au rang 2 par définition (prop. 1.2).
· Supposons qu'elle le soit au rang n. On a alors, avec la propriété 1.2,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mathbb{P}\left((\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \cap A_{n+1}\right) \overset{prop.}{=} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).\mathbb{P}_{\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right)}(A_{n+1})$$

$$\overset{H.R.}{=} \left(\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\dots\mathbb{P}_{A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n)\right).\mathbb{P}_{A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n}(A_{n+1})$$

et la propriété est vraie au rang $n+1$. $\square$

1.3 Formule des probabilités totales

Rappelons la définition mathématique du puzzle.

Définition 1.2 ***Système complet d'événements***
On dit que la famille d'événements $(A_1, A_2, ..., A_n)$*, pour* $n \geqslant 2$*, forme un système complet d'événements de l'univers* Ω *si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- *Ces événements sont deux à deux incompatibles :* $\forall\,(i\,,\,j) \in [\![\,1\,;n\,]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing.$
- *Leur réunion est égale à* Ω *:* $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$

Si, de plus, chacun de ces événements est non vide, $\forall i = 1, ..., n, \quad A_i \neq \varnothing,$ *on dit que la famille* $(A_1, A_2, ..., A_n)$ *réalise une partition de l'univers* Ω*.*
En particulier, pour tout événement A *non vide et différent de* Ω*,* $\{A\,,\ \overline{A}\}$ *est une partition de* Ω*.*

Voici un rappel et une seconde version d'un fameux théorème d'un chapitre précédent.

Théorème 1.5 ***Probabilités totales***
Soit $(A_1, A_2, ..., A_n)$ *un système complet d'événements de* Ω *et soit* B *un événement de* Ω*.*

On a $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \ \ldots\ + \mathbb{P}(A_n \cap B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B).$$

Si de plus, $\forall i,\ \mathbb{P}(A_i) \neq 0,$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(B) + \ \ldots\ + \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B).$$

En particulier, si $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(\overline{A}) \neq 0,$
$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(B).$

Ce sont souvent les deux dernières lignes qui sont utiles. En effet, à la lecture des énoncés, on peut souvent déterminer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{A_i}(B)$. Par exemple, lors de tirages successifs, il est courant d'utiliser le s.c.e. du premier tirage ainsi que celui du tirage précédent.

Démonstration : Il suffit de remarquer que B est la réunion disjointe des événements $A_i \cap B$. Sa probabilité est alors la somme des probabilités de ces événements mais cela a déjà été démontré. Les lignes suivantes en sont des conséquences immédiates puisque $\mathbb{P}(A_i \cap B) = \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)$. ☐

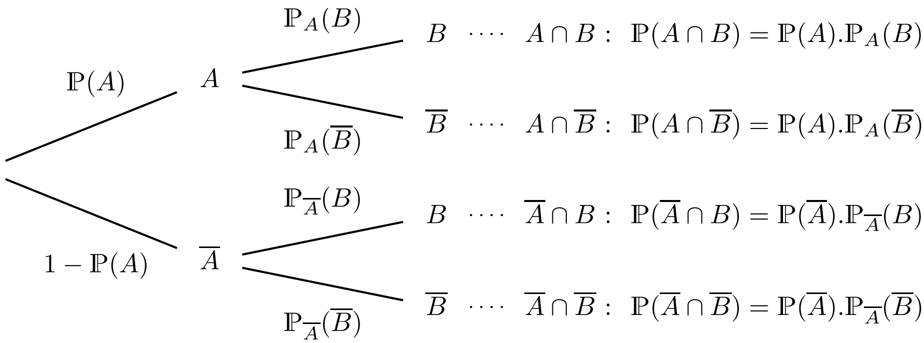
Exemple : Dans l'activité de la page 5, $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap F) + \mathbb{P}(E \cap \overline{F}) = 0,35 + 0,3 = 0,65$
et $\mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}_F(E) + \mathbb{P}(\overline{F}) \times \mathbb{P}_{\overline{F}}(E) = (0,35 + 0,1) \times \frac{0,35}{0,45} + (0,30 + 0,25) \times \frac{0,3}{0,55} = 0,65.$

1.4 Arbre de probabilité

Ce qui suit découle de la définition des probabilités conditionnelles et des théorèmes précédents.

Règles Dans un arbre de probabilités,

- la probabilité inscrite sur une branche reliant un événement A à un événement B est la probabilité conditionnelle de B sachant A ;
- la somme des probabilités sur les branches issues d'un même nœud vaut 1 ;
- la probabilité d'un événement représenté par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin ;
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y mènent.



$\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1$, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A}).\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$ par exemple.

Dans un arbre de probabilités, on utilise la formule des probabilités composées pour déterminer la probabilité d'un événement réalisé par un chemin et celle des probabilités totales pour déterminer la probabilité d'un événement réalisé par plusieurs chemins.

1.5 Formule de Bayes

Cette formule nous permet de « retourner » un arbre de probabilités : de passer d'un arbre A puis B à un arbre B puis A. Elle découle immédiatement de la propriété 1.2.

Théorème 1.6 ***Formule de Bayes***
Si A et B sont deux événements de probabilité non nulle, alors $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Théorème 1.7 ***Formule de Bayes généralisée***
Soient $(A_1, A_2, ..., A_n)$ un système complet d'événements de Ω et B un événement de Ω, tous de probabilité non nulle. On a, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathbb{P}_B(A_k) = \dfrac{\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}$.

Dém. : En effet, la formule des probabilités totales donne $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B) = \mathbb{P}(B)$. □

2 Indépendance

2.1 Indépendance de deux événements

A et B sont deux événements de probabilité non nulle d'une expérience aléatoire.
Dans certaines situations, il peut arriver que le fait de savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité que B le soit. On dit alors que B est indépendant de A ce qui signifie $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.
Ainsi, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}_B(A)$: A est alors indépendant de B.

Définition 1.3 ***Indépendance***
Deux événements A et B sont dits indépendants lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Remarques : • Il n'est pas nécessaire que les événements indépendants soient de probabilité non nulle mais si $\mathbb{P}(B) = 0$ par exemple, on a $\mathbb{P}(B \cap A) \leqslant \mathbb{P}(B) = 0$ donc $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = 0 = \mathbb{P}(B)$ et B est indépendant de A.

• Ne pas confondre indépendance $\big(\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)\big)$ et incompatibilité $\big(A \cap B = \varnothing\big)$. En effet, deux événements ne peuvent être à la fois indépendants et incompatibles que si au moins l'un des deux est de probabilité nulle, ce qui n'est généralement pas le cas des événements considérés. Effectivement, si deux événements sont incompatibles, le fait d'avoir l'un implique nécessairement de ne pas avoir l'autre : ils sont donc « liés », en quelque sorte.

Exemple : On a vu que $\mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(F) = 0,2925 \neq 0,35 = \mathbb{P}(E \cap F)$ donc les événements E et F de l'activité de la page 5 ne sont pas indépendants.

La propriété suivante nous permet de retomber sur nos pieds (cf. introduction du paragraphe).

Propriété 1.8 *Si* $\mathbb{P}(A) \neq 0$, *alors* A *et* B *sont indépendants* $\iff$ $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.

Dém. : A, B indép. $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \overset{\mathbb{P}(A)\neq 0}{\iff} \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \Leftrightarrow \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$. □

2.2 Indépendance des événements contraires

Théorème 1.9 *Deux événements* A *et* B *sont indépendants si, et seulement si, il en est de même pour les couples d'événements* $\overline{A}$ *et* B, A *et* $\overline{B}$, $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$.

Démonstration : • On a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.
Par ailleurs, $\{A, \overline{A}\}$ forme un système complet d'événements de Ω.
La formule des probabilités totales affirme alors que $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$.
D'où, $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B) \times (1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(\overline{A})$.
$\overline{A}$ et B sont donc indépendants.

• Il suffit de reprendre le raisonnement ci-dessus en échangeant A et B.

• D'après le premier point, $\overline{A}$ et B sont indépendants et d'après le second, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

• Réciproquement, si A et B ne sont pas indépendants, alors A et $\overline{B}$ ne peuvent l'être car, d'après les points précédents, A et $\overline{\overline{B}} = B$ devraient l'être. □

Exemple : On a vu que les événements E et F de l'activité de la page 5 ne sont pas indépendants donc $\overline{E}$ et F ne le sont pas non plus et en effet, $\mathbb{P}(\overline{E}) \times \mathbb{P}(F) = (1 - 0,65) \times 0,45 \neq 0,1 = \mathbb{P}(\overline{E} \cap F)$.

2.3 Indépendance de n événements

Définition 1.4 ***Indépendance deux à deux***
Soit $n \geqslant 2$. *On dit que les événements* A_1, A_2, ..., A_n *de* Ω *sont deux à deux indépendants si, pour tout* $(i\,,\,j) \in [\![\,1\,;n\,]\!]^2$ *dictincts, les événements* A_i *et* A_j *sont indépendants.*

Remarque : Trois événements A, B et C sont deux à deux indépendants si
$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(C \cap A) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(A)$.

Exemple : Lors du lancer de deux dés, on définit les événements X_i : « le lancer du dé n° i est pair » et Y : « la somme des résultats des deux dés est paire ». Les événements X_1, X_2 et

Y sont deux à deux indépendants. En effet, connaître la parité de l'un des dés ne permet pas de connaître celle de l'autre ni celle de la somme, et connaître la parité de la somme ne permet pas de connaître celle des dés.

Définition 1.5 ***Indépendance mutuelle***
Soit $n \geqslant 2$. On dit que des événements A_1, A_2, ..., A_n de Ω sont mutuellement indépendants si, pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$ et pour toute famille $(i_1, i_2, ..., i_k)$ d'éléments distincts de $[\![1 ; n]\!]$,
$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Remarques : • A, B et C sont mutuellement indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(C \cap A) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.
• Il est clair que si les événements A_1, A_2, ..., A_n de Ω sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants. En revanche, la réciproque est fausse. Regardez l'exemple suivant.

Exemple : En reprenant l'exemple du lancer de deux dés précédent, les événements ne sont pas mutuellement indépendants. En effet, si l'on connaît les parités des deux dés ou celle d'un dé et de la somme, alors on connaît la parité manquante :
$$\mathbb{P}(X_1 \cap X_2 \cap Y) \overset{X_1 \cap X_2 \subset Y}{=} \mathbb{P}(X_1 \cap X_2) \overset{\textit{indép.}}{=} \mathbb{P}(X_1)\mathbb{P}(X_2) \neq \mathbb{P}(X_1)\mathbb{P}(X_2)\mathbb{P}(Y).$$

Propriété 1.10 *Si les événements A_1, A_2, ..., A_n de Ω sont mutuellement indépendants, alors il en est de même pour les événements B_1, B_2, ..., B_n où B_k désigne A_k ou $\overline{A_k}$.*

Démonstration : Soit une famille $(i_1, i_2, ..., i_k)$ d'éléments distincts de $[\![1 ; n]\!]$, $C = A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ et remplaçons A_{i_1} par son contraire.
Puisque A_{i_1} et C sont indépendants par indépendance mutuelle des A_{i_j}, $\overline{A_{i_1}}$ et C le sont aussi et
$$\mathbb{P}(\overline{A_{i_1}} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(\overline{A_{i_1}} \cap C) = \mathbb{P}(\overline{A_{i_1}})\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\overline{A_{i_1}})\mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}). \qquad \square$$

Théorème 1.11 ***Lemme des coalitions***
Si des événements sont mutuellement indépendants, alors tout événement formé par réunions et/ou intersections de certains d'entre eux est indépendant de tout événement formé à partir des autres.

Exemple : Si A, B et C sont mutuellement indépendants, alors $A \cup B$ et C sont indépendants.
Nous le démontrerons en exercice.

Remarque : Lors d'épreuves indépendantes, les résultats de chaque épreuve sont mutuellement (et naturellement) indépendants. En revanche, ce n'est pas le cas de tous les événements que l'on peut y associer. En voici un exemple éloquent.
On lance un certain nombre de fois une pièce bien équilibrée.
Pour $k \geqslant 1$, on note F_k : « obtenir face au k^{e} lancer » et $D_k = \overline{F_k} \cap F_{k+1}$, événement construit à partir des événements mutuellement indépendants F_k.
On a, pour tout $k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(\overline{F_k}) = \mathbb{P}(F_{k+1}) = \frac{1}{2}$
et $\mathbb{P}(D_k) = \mathbb{P}(\overline{F_k} \cap F_{k+1}) = \mathbb{P}(\overline{F_k})\mathbb{P}(F_{k+1}) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
Ainsi, $\mathbb{P}(D_k)\mathbb{P}(D_{k+1}) = \frac{1}{4}.\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.
Par ailleurs, $\mathbb{P}_{D_k}(D_{k+1}) = 0$ car on ne peut obtenir $\overline{F_{k+1}}$ si l'on sait que l'on a obtenu F_{k+1} :
$$D_k \cap D_{k+1} = \overline{F_k} \cap F_{k+1} \cap \overline{F_{k+1}} \cap F_{k+2} = \overline{F_k} \cap \varnothing \cap F_{k+2} = \varnothing \quad \text{donc} \quad \mathbb{P}(D_k \cap D_{k+1}) = 0 \neq \frac{1}{16}.$$
Les événements D_k ne sont donc pas deux à deux indépendants (et a fortiori, pas mutuellement indépendants).

Exercices

Conditionnement & Indépendance

Exercice 1.1 *(N1)* On considère une loterie dont certains tickets sont gagnants mais pas tous. Dans cette loterie, certains tickets sont carmin mais pas tous. On tire au hasard un ticket et l'on appelle C l'événement « le ticket tiré est carmin » et G l'événement « le ticket tiré est gagnant ». Traduire en terme de probabilité les phrases suivantes.

1. Le quart des tickets carmin sont gagnants.
2. Le tiers des tickets gagnants sont carmin.
3. Un ticket sur cinq est carmin et gagnant.
4. Un ticket perdant sur cinq est carmin.

Exercice 1.2 *(N1)*

1. On donne $\mathbb{P}_A(B) = 0,6$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,3.$ Calculer $\mathbb{P}(A)$.
2. On donne $\mathbb{P}(B) = 0,7$ et $\mathbb{P}_B(A) = 0,2.$ Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$.
3. On donne $\mathbb{P}(A) = 0,3$, $\mathbb{P}(B) = 0,7$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,9.$ Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$.
4. On donne $\mathbb{P}(B) = 2\,\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,5$ et $\mathbb{P}_A(B) = 0,5.$ Calculer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.
5. On donne $\mathbb{P}_A(B) = 0,5$, $\mathbb{P}_B(A) = 0,3$ et $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + 0,3$. Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$.
6. Dans chacun des cas précédents et lorsque c'est possible, préciser si A et B sont indépendants.

Exercice 1.3 *(N1)* Les événements A, B et $A \cap B$ sont de probabilité non nulle.
Déterminer $\mathbb{P}_A(A)$, $\mathbb{P}_A(\overline{A})$, $\mathbb{P}_{A \cap B}(A)$ et $\mathbb{P}_B(A \cup B)$.

Exercice 1.4 *(N1)* Parmi les phrases suivantes, lesquelles sont compatibles avec l'hypothèse « les événements A et B sont indépendants » ?

1. A et B ne se réalisent jamais en même temps.
2. La réalisation de A n'influence pas celle de B.
3. Si A est réalisé alors B n'est pas réalisé.
4. $A \subset B$.
5. A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercice 1.5 *(N1)*

1. On donne $\mathbb{P}(A) = 0,4$ et $\mathbb{P}(B) = 0,3.$ Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cup B)$ sachant que : (a) A et B sont indépendants. (b) A et B sont incompatibles.
2. On donne $\mathbb{P}(A) = 0,5$, $\mathbb{P}(B) = 0,3$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,65.$ A et B sont-ils indépendants ?
3. A et B sont indépendants et tels que $\mathbb{P}(A) = 0,5$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,75.$ Calculer $\mathbb{P}(B)$.
4. On donne $\mathbb{P}(A) = 0,8$, $\mathbb{P}(B) = 0,3$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,86.$ Calculer $\mathbb{P}_B(A)$.
   A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 1.6 *(N1)* On lance simultanément deux dés bien équilibrés, un rubis et un vermillon, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère les événements suivants :

R : « le numéro sorti sur le dé rubis est pair » ;
V : « le numéro sorti sur le dé vermillon est pair » ;
S : « la somme des numéros sortis est paire ».

1. Démontrer que S et V sont indépendants.
2. Les événements S et R sont-ils indépendants ?
3. Les événements S et $V \cap R$ sont-ils indépendants ?
4. Les événements R, S et V sont-ils *mutuellement* indépendants ?

Exercice 1.7 *(N1)* Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la Santé. Une maladie est présente dans la population dans la proportion d'une personne malade sur $100\,000$. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99 %. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1 %.
Autorisez-vous la commercialisation de ce test ?

Exercice 1.8 *(N1)* Au club Math Max du lycée Henri Matisse de La Fare-en-Dole, on compte sept élèves de seconde, neuf de première et n de terminale. De plus, il n'y a qu'un seul garçon parmi les élèves de seconde, contre trois parmi les élèves de première et six parmi les terminales. On tire au sort un élève du club afin de le torturer avec des exercices encore plus difficiles que ceux de l'épreuve blanche organisée au retour des vacances d'hiver.

1. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de n les événements « l'élève est en terminale » et « l'élève est un garçon » sont indépendants.
2. Pour $n = 24$, que dire de l'indépendance éventuelle des événements suivants ?
   (a) « l'élève est en terminale » et « l'élève est une fille »,
   (b) « l'élève est en première » et « l'élève est un garçon ».

Exercice 1.9 *(N1)* Gaspard, Melchior et Balthazar sont en vacances itinérantes et dorment au camping. Après s'être largement repus de leur huitième galette quotidienne, ils décident de tirer à la courte-paille la corvée de vaisselle. Gaspard et Melchior se disputent déjà pour savoir qui tirera le premier, l'un désire même tirer à la courte-paille pour savoir qui tirera le premier ! Balthazar leur dit d'arrêter de se disputer puisqu'ils ont autant de chances de tirer la petite paille au premier et au deuxième tirage et d'ailleurs autant au troisième tirage. A-t-il raison ? Et si comme le suggère Michel Tournier, leur ami Taor s'était joint à eux ? Et s'ils étaient encore plus nombreux ?

Exercice 1.10 *(N2)* Paradoxal ?

1. M. Dupond a deux enfants. L'aîné est une fille prénommée Bianca.
   Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?
   M. Dupont a lui aussi deux enfants. Au moins l'un des deux est un garçon prénommé Archibald.
   Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?
2. On lance trois pièces de monnaie. Quelle est la probabilité que toutes trois retombent du même côté, que ce soit pile ou face ? Une sur quatre. Soit. Pourtant, si je lance trois pièces, il y en a forcément deux qui seront déjà du même côté ; la troisième y sera avec une chance sur deux. Candide affirme donc qu'il y a une chance sur deux que toutes trois tombent du même côté.
   Qu'en penser ?

3. On vous présente trois boîtes. Deux contiennent chacune une sucette et l'autre un séjour d'une semaine à Zanzibar. Vous en choisissez une et immédiatement après, le présentateur de ce jeu débile, Pierre-Jean Faucceult, en retire une des deux restantes en affirmant avec raison qu'elle contient l'une des sucettes. Il vous propose alors d'échanger votre boîte avec la dernière.
   Que faites-vous ?
4. Clotaire sait qu'il va subir trois devoirs surveillés cette semaine mais il ne sait ni de quoi ni quand. Étant mardi soir, il ne lui reste plus que trois jours. Pour enfin préparer celui de mathématiques éventuel, il se demande s'il est plus probable qu'il en ait un par jour ou qu'il n'en ait pas vendredi. Peux-tu l'aider ?

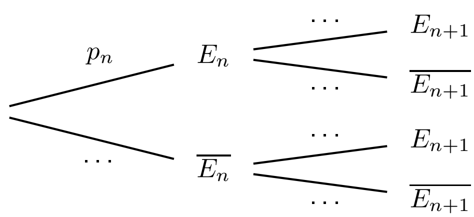
Exercice 1.11 *(N2)* Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent.
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il le devient la semaine $n+1$ avec probabilité $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il le reste la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'événement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'événement E_n.

On a ainsi $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $0 \leqslant p_n < 1$.

1. (a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.
   (b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
2. (a) Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant.



   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2\,p_n + 0,04$.
   (c) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.
   En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.
   (d) En déduire la limite de la suite (p_n).
   (e) On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. Écrire une fonction Python, d'argument un entier k, donnant le nombre de semaines nécessaires à ce que la probabilité que le salarié soit absent cette semaine soit proche de 5 % à 10^k près.
   Pourquoi est-on certain qu'un tel algorithme s'arrête ?

Exercice 1.12 *(N2)* VouF ?

1. Si $\mathbb{P}(B) \notin \{0;1\}$, alors on a toujours $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A) = 1 - \mathbb{P}_B(A)$.
2. Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors on a toujours $\mathbb{P}_B(A) \leqslant \mathbb{P}(A)$.

3. Si B et C sont incompatibles et A est indépendant de B et C, alors A est indépendant de $B \cup C$.
4. Si A, B et C sont deux à deux indépendants, alors $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B).\mathbb{P}(C)$.
5. Si A et B sont indépendants, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(\overline{B}) + \mathbb{P}(B)$.
6. Si A, B et C sont mutuellement indépendants, alors $A \cup B$ et C sont indépendants.

Exercices

Exercice 1.13 *(N2)* Soient A, B et C trois événements.

1. Montrer que si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors $\mathbb{P}_B(A) \geqslant \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}_A(B) \geqslant \mathbb{P}(B)$.
2. Comparer $\mathbb{P}_{B\cap C}(A)$ et $\mathbb{P}_C(A \cap B)$ lorsque $\mathbb{P}(B \cap C) \neq 0$.
3. Montrer que A et B sont indépendants $\iff \mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B})\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$.
   On pourra utiliser les s.c.e. $\{A; \overline{A}\}$ et $\{B; \overline{B}\}$.

Exercice 1.14 *(N1)* On considère 100 dés cubiques dont 25 sont pipés. Pour ces derniers, la probabilité d'obtenir le numéro 6 est $\frac{1}{2}$. On choisit un dé au hasard, on le lance et obtient 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

Exercice 1.15 *(N2)* Une urne contient 5 boules rouges et 4 boules vertes.
On extrait au hasard et sans remise 3 boules de cette urne.
Quelle est la probabilité que l'on obtienne 2 boules vertes ?
Qu'en est-il si les boules sont tirées simultanément ?

Exercice 1.16 *(N2)* Soit $n \geqslant 2$. On dispose de n urnes numérotées $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ telles que, pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$, l'urne $\mathcal{U}_k$ contient k boules blanches et $(n-k)$ boules noires.
On choisit une urne au hasard et on en extrait une boule.

1. Quelle est la probabilité que la boule extraite soit blanche ?
2. Sachant que la boule extraite est blanche, quelle est la probabilité qu'elle provienne de $\mathcal{U}_1$?
3. Que dire lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 1.17 *(N2)* On tire au hasard et sans remise n boules d'une urne en contenant n blanches et n noires ($n \geqslant 1$). Quelle est la probabilité qu'elles soient toutes blanches ?
Qu'en est-il si les boules sont tirées simultanément ?

Exercice 1.18 *(N2)* Soit $n \geqslant 2$. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n telles que, pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$, l'urne n° k contient k boules numérotées de 1 à k. On enlève au hasard l'une des urnes puis on tire une boule au hasard dans chacune des $n-1$ urnes restantes.
Une épreuve, c.-à-d. un tirage, est considérée comme gagnée si l'on tire une boule n° 1.
Déterminer la probabilité de l'événement T : « On gagne les $n-1$ épreuves ».

Exercice 1.19 *(N1)* On dispose de trois urnes $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_3$. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient deux boules noires, $\mathcal{U}_2$ contient deux boules blanches et $\mathcal{U}_3$ contient une boule noire et une boule blanche.
On choisit une urne au hasard et on tire une boule au hasard dans cette urne.
Calculer la probabilité que l'urne choisie soit $\mathcal{U}_1$ dans chacun des cas suivants.

1. L'urne choisie contient au moins une boule noire.
2. La boule tirée est noire.

Exercice 1.20 *(N3)* On cherche un livre dans une pièce dans laquelle se trouve une commode comportant k tiroirs ($k \geqslant 1$). La probabilité que le livre se trouve dans la commode est p ($p \in \,]\,0 ; 1\,[$).
Si ce livre est dans la commode, il a la même probabilité de se trouver dans chacun des k tiroirs.
On ouvre les r premiers tiroirs de la commode sans trouver le livre ($1 \leqslant r \leqslant k$).
Quelle est la probabilité que le livre se trouve dans la commode ?

Exercice 1.21 *(N3)* Soit $(a, b, n) \in (\mathbb{N}^*)^3$. On effectue dans une urne contenant initialement b boules blanches et b boules noires une série de tirages de la façon suivante : si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne en même temps que a autres boules blanches et l'on effectue un autre tirage, sinon, on s'arrête de tirer. On note A_n : « une boule blanche apparaît à chacun des n tirages ».

Montrer que $\mathbb{P}(A_n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{ka+b}{k+2b}$.

Exercice 1.22 *(N3)* Urne de Pólya

On considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges où b et $r \in \mathbb{N}^*$. On tire une boule de l'urne, on note sa couleur puis on la remet dans l'urne avec une autre boule de la même couleur et l'on recommence un certain nombre de fois cette opération.
Pour tout $n \geqslant 1$, on note $p_n(r, b)$ la probabilité d'obtenir une boule blanche au n^{e} tirage, partant d'une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges.

1. Préciser $p_1(r, b)$.
2. Montrer en utilisant le premier tirage que, pour tous entiers naturels non nuls r, b et n,
   $p_{n+1}(r, b) = \frac{b}{b+r} p_n(r, b+1) + \frac{r}{b+r} p_n(r+1, b)$.
3. Montrer alors que, pour tous entiers naturels non nuls r, b et n, $p_n(r, b) = \frac{b}{b+r}$.

Exercice 1.23 *(N2)* Ruine du joueur

Soient un entier $N \geqslant 2$ et un réel $p \in \,]\,0\,;1\,[$. Un joueur effectue un certain nombre de manches indépendantes. À chaque manche, il gagne 1 € avec probabilité p et perd 1 € avec probabilité $q = 1-p$. Le jeu prend fin lorsqu'il a accumulé N euros (il est riche) ou lorsqu'il n'a plus d'argent (il est ruiné). Pour tout entier $n \in [\![\, 0\,; N\,]\!]$, on note u_n la probabilité que le joueur devienne riche en partant d'un capital initial de n euros. On convient que $u_0 = 0$ et $u_N = 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in [\![\, 1\,; N-1\,]\!]$, $u_n = p u_{n+1} + q u_{n-1}$.
   On pourra introduire l'événement G : « le joueur gagne la première manche ».
2. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$.
   (a) Exprimer u_n en fonction de $n \in [\![\, 0\,; N\,]\!]$.
   (b) Calculer la probabilité que le joueur devienne richissime, c.-à-d. en supposant que N est très grand devant le capital initial n. On pourra distinguer $p > \frac{1}{2}$ et $p < \frac{1}{2}$.

Exercice 1.24 *(N3)* Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère N urnes numérotées de 1 à N telles que, pour tout $j \in [\![\, 1\,; N\,]\!]$, l'urne numéro j contient j boules blanches et $N+1-j$ boules noires.
On tire simultanément n boules d'une urne choisie au hasard.
Déterminer la probabilité d'obtenir n boules blanches.

Exercice 1.25 *(N3)* On dispose de deux jetons A et B que l'on peut placer dans deux cases C_1 et C_2. Initialement, les jetons se trouvent tous les deux dans la case C_1.
On procède alors à une succession de lancers d'un dé cubique bien équilibré.
À l'issue de chaque lancer, on effectue l'une des opérations suivantes.

- Si le dé tombe sur 1 ou 2, on change de case le jeton A (et le B ne bouge pas).
- Si le dé tombe sur 3 ou 4, on change de case le jeton B (et le A ne bouge pas).
- Si le dé tombe sur 5 ou 6, on ne change rien.

I_ Étude du mouvement du jeton A.

1. Déterminer la probabilité qu'après avoir lancé n fois le dé, le jeton A n'ai jamais changé de case.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par
   X_n l'événement « Le jeton A se trouve dans la case C_1 après n lancers » et
   Y_n l'événement « Le jeton A se trouve dans la case C_2 après n lancers »,
   de probabilités respectives x_n et y_n.
   Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.
3. Montrer que (x_n) est arithmético-géométrique, exprimer x_n en fonction de n puis en déduire l'expression de y_n.
4. Calculer les limites des suites (x_n) et (y_n) puis interpréter le résultat obtenu.

II_ Étude des mouvements du couple de jetons.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par
E_n l'événement « Les jetons sont tous les deux dans la case C_1 après n lancers »,
F_n l'événement « Le jeton A est dans la case C_1 et le jeton B dans C_2 après n lancers »,
G_n l'événement « Le jeton B est dans la case C_1 et le jeton A dans C_2 après n lancers » et
H_n l'événement « Les jetons sont tous les deux dans la case C_2 après n lancers »,
de probabilités respectives e_n, f_n, g_n et h_n.

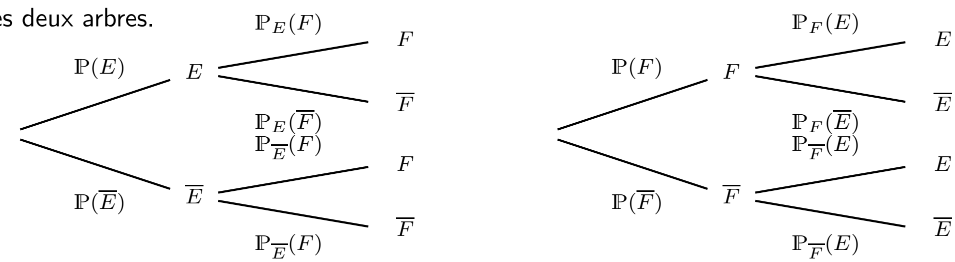
1. Calculer les probabilités de chacun de ces événements pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.
2. On note $Z_n = \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice carrée M d'ordre 4 telle que $Z_{n+1} = MZ_n$.
3. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = M^n Z_0$ et préciser Z_0.
4. Calculer M^2 puis M^4.
5. On note $J = (1)_{i,j \in [\![1\,;4]\!]} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe deux réels α_p et β_p tels que $M^{2p} = \alpha_p J + \beta_p I$ et déterminer les relations de récurrence permettant d'exprimer α_{p+1} et β_{p+1} en fonction de α_p et β_p.
6. Déterminer les valeurs de α_p et β_p et en déduire celles de e_n, f_n, g_n et h_n lorsque n est pair. Ces expressions de e_n, f_n, g_n et h_n sont elles encore valables lorsque n est impair ?
7. En prenant en compte uniquement les formules pour n pair, déterminer les limites de ces probabilités et interpréter le résultat obtenu.
8. Écrire un script Python permettant de déterminer le premier indice i tel que les quatre termes n° i des suites (e_n), (f_n), (g_n) et (h_n) soient proches de leur limite à 10^{-N} près en calculant les termes de manière récursive. On les comparera ensuite à ceux obtenus de manière matricielle.

Corrigé des exercices

Conditionnement & Indépendance

Activité de la page 5.

1. 25 % des employés de cette fabrique de machines à machin-trucs sont des hommes gagnant plus de 20 000 € annuels et 35 % sont des femmes gagnant moins de 20 000 € annuels.
2. (a) $\mathbb{P}(E \cap F) = 0,35$.
   (b) $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap F) + \mathbb{P}(E \cap \overline{F}) = 0,35 + 0,3 = 0,65$.
   (c) $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(E \cap F) + \mathbb{P}(\overline{E} \cap F) = 0,35 + 0,1 = 0,45$.
   (d) $\mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(F) = 0,2925 \neq 0,35 = \mathbb{P}(E \cap F)$.
3. (a) $\frac{0,35}{0,35+0,1} = \frac{7}{9} \simeq 0,78$.
   (b) $\frac{\mathbb{P}(E\cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{0,35}{0,45} = \frac{7}{9}$. On note ce quotient $\mathbb{P}_F(E)$.
4. $\mathbb{P}_E(F) = \frac{\mathbb{P}(E\cap F)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{0,35}{0,35+0,3} = \frac{7}{13} \simeq 0,54$
5. $\mathbb{P}_{\overline{F}}(E) = \frac{\mathbb{P}(E\cap\overline{F})}{\mathbb{P}(\overline{F})} = \frac{\mathbb{P}(E)-\mathbb{P}(E\cap F)}{1-\mathbb{P}(F)} = \frac{0,65-0,35}{1-0,45} \simeq 0,55$: la probabilité que l'employé choisi au hasard gagne moins de 20 000 € sachant que c'est un homme.
6. Voici les deux arbres.



Exercice 1.1

1. $\mathbb{P}_C(G) = \frac{1}{4}$. | 2. $\mathbb{P}_G(C) = \frac{1}{3}$. | 3. $\mathbb{P}(C \cap G) = \frac{1}{5}$. | 4. $\mathbb{P}_{\overline{G}}(C) = \frac{1}{5}$.

Exercice 1.2

1. $\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}_A(B)} = \frac{1}{2}$.
2. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(B) = 0,14$.
3. $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cup B) = 0,1$, $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{7}$ et $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1}{3}$.
   $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = 0,21 \neq 0,1 = \mathbb{P}(A \cap B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.
4. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = 3\mathbb{P}(A) - 0,5$ et $0,5 = \mathbb{P}_A(B) = \frac{3\mathbb{P}(A)-0,5}{\mathbb{P}(A)}$
   d'où $0,5\mathbb{P}(A) = 3\mathbb{P}(A) - 0,5$, $\mathbb{P}(A) = \frac{0,5}{2,5} = \frac{1}{5}$. $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{5} \neq 0,5 = \mathbb{P}_A(B)$: A et B non indépendants.
5. $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,5\mathbb{P}(A) = 0,3\mathbb{P}(B) = 0,3(\mathbb{P}(A) + 0,3)$ d'où $\mathbb{P}(A) = \frac{0,09}{0,2} = \frac{9}{20}$,
   $\mathbb{P}(B) = \frac{9}{20} + \frac{6}{20} = \frac{3}{4}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,5\mathbb{P}(A) = \frac{9}{40} \neq \frac{9}{20} \times \frac{3}{4} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

Exercice 1.3 $\mathbb{P}_A(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1,$ $\mathbb{P}_A(\overline{A}) = \frac{\mathbb{P}(A\cap \overline{A})}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\varnothing)}{\mathbb{P}(A)} = 0,$
$\mathbb{P}_{A\cap B}(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap(A\cap B))}{\mathbb{P}(A\cap B)} = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A\cap B)} = 1$ et $\mathbb{P}_B(A\cup B) = \frac{\mathbb{P}(B\cap(A\cup B))}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$

Exercice 1.4

1. Compatible seulement lorsque A ou B est de probabilité nulle.
2. Compatible. Toutefois, il faut que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ pour écrire $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.
3. Compatible seulement lorsque A ou B est de probabilité nulle.
4. Compatible seulement lorsque $\mathbb{P}(B) = 1$ ou $\mathbb{P}(A) = 0$.
5. Toujours compatible.

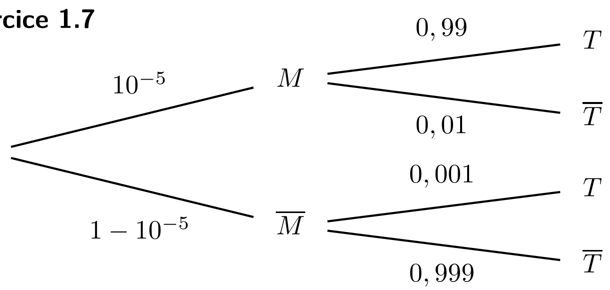
Exercice 1.5

1. (a) $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B) = 0,12$ et $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B) = 0,58.$
   (b) $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$ et $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B) = 0,7.$
2. $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cup B) = 0,15 = 0,5\times 0,3 = \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)$: A et B indépendants.
3. $\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A\cup B)-\mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(B)(1-\mathbb{P}(A)) = 0,75-0,5 \Leftrightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{0,25}{1-0,5} = \frac{1}{2}.$
4. $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cup B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0,24}{0,3} = 0,8 = \mathbb{P}(A)$: A et B sont indépendants.

Exercice 1.6

1. On a $S = (R\cap V)\cup(\overline{R}\cap\overline{V})$ et R et V sont indépendants bien sûr.
   D'où $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(R).\mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(\overline{R}).\mathbb{P}(\overline{V}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
   et $\mathbb{P}_V(S) = \mathbb{P}_V(R) = \mathbb{P}(R) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(S)$: S et V sont donc indépendants.
2. $\mathbb{P}_R(S) = \mathbb{P}_R(V) = \mathbb{P}(V) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(S)$ donc S et R sont indépendants.
3. $V\cap R\subset S$ donc $\mathbb{P}((V\cap R)\cap S) = \mathbb{P}(V\cap R) \neq \mathbb{P}(V\cap R)\times\mathbb{P}(S)$ car $\mathbb{P}(V\cap R)\neq 0$ et $\mathbb{P}(S)\neq 1$. $V\cap R$ et S ne sont donc pas indépendants.
4. Les trois événements ne sont pas mutuellement indépendants car s'il on connaît le résultat de deux d'entre eux, on connaît nécessairement le troisième.

Exercice 1.7

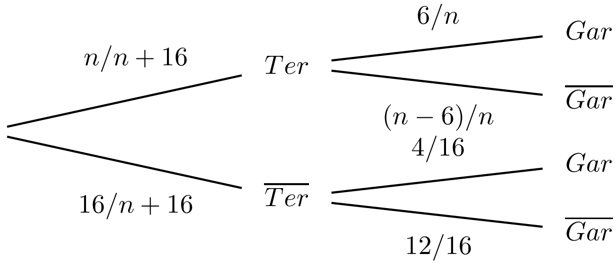


$$\mathbb{P}_{\overline{T}}(M) = \frac{\mathbb{P}(\overline{T}\cap M)}{\mathbb{P}(\overline{T})} = \frac{\mathbb{P}(\overline{T}\cap M)}{\mathbb{P}(\overline{T}\cap M)+\mathbb{P}(\overline{T}\cap\overline{M})} = \frac{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(\overline{T})}{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(\overline{T})+\mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{T})}$$
$$= \frac{10^{-5}\times(1-0,99)}{10^{-5}\times(1-0,99)+(1-10^{-5})\times(1-0,001)} \simeq 10^{-7}.$$
$$\mathbb{P}_T(\overline{M}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{M}\cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(\overline{M}\cap T)}{\mathbb{P}(T\cap M)+\mathbb{P}(T\cap\overline{M})} = \frac{\mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}_{\overline{M}}(T)}{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(T)+\mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}_{\overline{M}}(T)}$$
$$= \frac{(1-10^{-5})\times 0,001}{10^{-5}\times 0,99+(1-10^{-5})\times 0,001} \simeq 0,99.$$

Ainsi, seule une personne sur 10 millions serait déclarée saine alors qu'elle est malade.
En revanche, une personne positive a 99 % de chance de ne pas l'être.
Si ce test est commercialisé, il ne peut être mis en œuvre qu'avec un autre test afin de corroborer les résultats.

Exercice 1.8

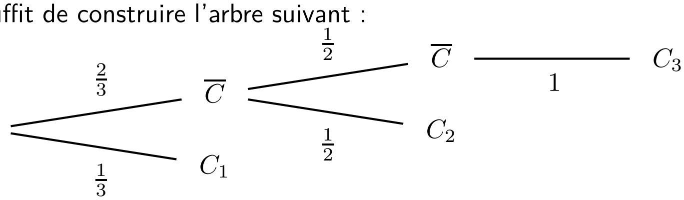
1. D'après l'énoncé, il y a $n+16$ élèves dont 10 garçons. On peut alors dresser l'arbre suivant.



   On a $\mathbb{P}(T \cap G) = \mathbb{P}(T)\mathbb{P}_T(G) = \frac{n}{n+16}.\frac{6}{n} = \frac{6}{n+16}$, $\mathbb{P}(T) = \frac{n}{n+16}$ et d'après les probabilités totales, $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(T \cap G) + \mathbb{P}(\overline{T} \cap G) = \mathbb{P}(T \cap G) + \mathbb{P}(T)\mathbb{P}_{\overline{T}}(G) = \frac{6}{n+16} + \frac{16}{n+16}.\frac{4}{16} = \frac{10}{n+16}$.
   Ainsi, les événements « l'élève est en terminale » et « l'élève est un garçon » sont indépendants ssi $\mathbb{P}(T \cap G) = \mathbb{P}(G).\mathbb{P}(T) \iff \frac{6}{n+16} = \frac{n}{n+16}.\frac{10}{n+16} \iff 6(n+16) = 10n \iff n = 24$.

2. Pour $n = 24$, les événements T et G sont indépendants.
   (a) Puisque $F = \overline{G}$, les événements T et F sont indépendants.
   (b) On a $\mathbb{P}(G) = \frac{10}{24+16} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \mathbb{P}_{1re}(G)$ donc $1re$ et G ne sont pas indépendants.

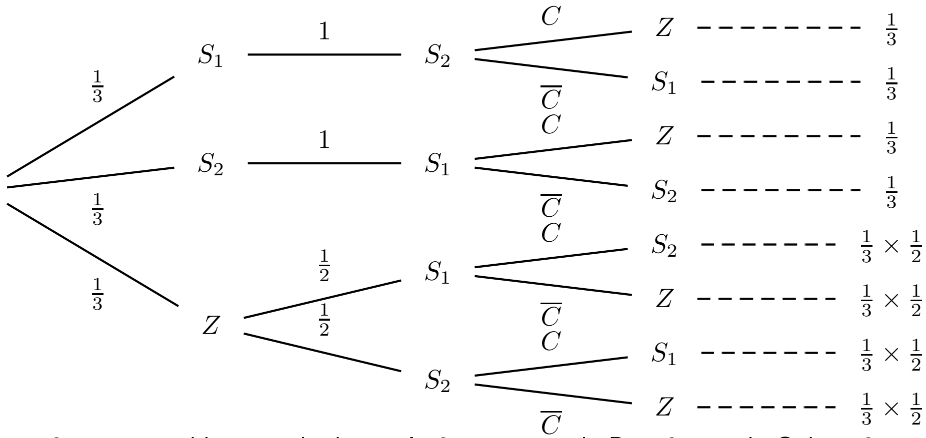
Exercice 1.9 Il suffit de construire l'arbre suivant :



On a donc $\mathbb{P}(C_1) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(C_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(C_3) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{3}$.
S'il y a n rois mages, on a pour $i \neq 1$, $\mathbb{P}(C_i) = \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1} \dots \frac{n+1-i}{n+2-i} \times \frac{1}{n+1-i} = \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(C_1) = \frac{1}{n}$.

Exercice 1.10 Paradoxal ?

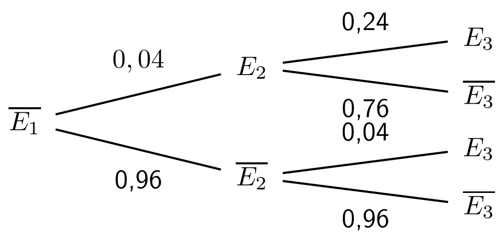
1. F_1 et F_2 sont indépendants donc
   $\mathbb{P}_{F_1}(F_1 \cap F_2) = \frac{\mathbb{P}(F_1 \cap (F_1 \cap F_2))}{\mathbb{P}(F_1)} = \frac{\mathbb{P}(F_1 \cap F_2)}{\mathbb{P}(F_1)} = \frac{\mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(F_1)} = \mathbb{P}(F_2) = \frac{1}{2}$.
   $\mathbb{P}_{G_1 \cup G_2}(G_1 \cap G2) = \frac{\mathbb{P}((G_1 \cup G_2) \cap (G_1 \cap G_2))}{\mathbb{P}(G_1 \cup G_2)} = \frac{\mathbb{P}(G_1 \cap G_2)}{\mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(G_2) - \mathbb{P}(G_1 \cap G_2)} = \frac{1/2 \times 1/2}{1/2 + 1/2 - 1/4} = \frac{1}{3}$.
2. Le plus simple est de lister les possibilités : PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP et FFF. Seules PPP et FFF répondent au problème parmi les huit possibilités : il y a donc une chance sur quatre que toutes trois tombent du même côté. (les probas conditionnelles mènent à des calculs plus compliqués). Candide, quant à lui, présuppose que les deux « premières » sont déjà du même côté ce qui est une condition plus forte.
3. Dans l'arbre suivant, le premier nœud correspond à votre premier choix, le deuxième nœud à celui de Pierre-Jean et le troisième à votre choix définitif, selon que vous changez ou non de boîte.
   Si vous changez de boîte, $\mathbb{P}(Z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Si vous ne changez pas, $\mathbb{P}(Z) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.
   Il est en fait plus aisé de se convaincre de ce résultat apparemment paradoxal en pensant à éliminer les deux sucettes plutôt que de gagner le séjour.
   Pour plus d'informations, tapoter http://fr.wikipedia.org/wiki/Problème_de_Monty_Hall



4. Il y a 3 jours possibles pour le devoir A, 3 jours pour le B et 3 pour le C donc 27 possibilités au total qui sont toutes équiprobables.
   Pour qu'il y ait exactement un devoir par jour, il y a trois jours possibles pour le devoir A, reste alors 2 jours possibles pour le B puis un seul pour le C donc $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilités et la probabilité qu'il y ait un devoir par jour est de $\frac{6}{27}$.
   Pour qu'il n'y ait pas de devoir le vendredi, il y a deux jours possibles pour le A, deux jours pour le B et deux pour le C donc $2^3 = 8$ possibilités et la probabilité qu'il n'y ait pas de devoir le vendredi est donc de $\frac{8}{27}$.

Exercice 1.11

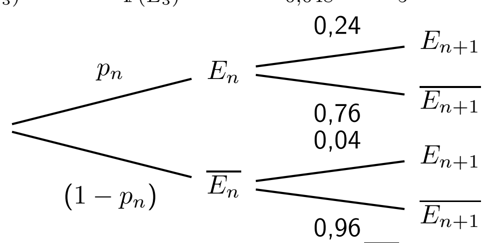
1. (a) On a l'arbre suivant



   Le théorème des probabilités totales donne $p_3 = \mathbb{P}(E_3) = \mathbb{P}(E_3 \cap E_2) + \mathbb{P}(E_3 \cap \overline{E_2})$
   donc $p_3 = \mathbb{P}(E_2)\mathbb{P}_{E_2}(E_3) + \mathbb{P}(\overline{E_2})\mathbb{P}_{\overline{E_2}}(E_3) = 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04 = 0,048.$

   (b) On a $\mathbb{P}_{E_3}(E_2) = \frac{\mathbb{P}(E_2 \cap E_3)}{\mathbb{P}(E_3)} = \frac{\mathbb{P}(E_2)\mathbb{P}_{E_2}(E_3)}{\mathbb{P}(E_3)} = \frac{0,04 \times 0,24}{0,048} = \frac{1}{5} = 0,2.$

2. (a) On a l'arbre suivant



   (b) Avec les probabilités totales, $p_{n+1} = \mathbb{P}(E_n \cap E_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{E_n} \cap E_{n+1})$ donc
   $p_{n+1} = \mathbb{P}_{E_n}(E_{n+1})\mathbb{P}(E_n) + \mathbb{P}_{\overline{E_n}}(E_{n+1})\mathbb{P}(\overline{E_n}) = 0,24\, p_n + 0,04(1-p_n) = 0,2\, p_n + 0,04.$

   (c) $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05 = 0,2p_n + 0,04 - 0,05 = 0,2p_n - 0,01 = 0,2(p_n - 0,05) = 0,2u_n$
   donc (u_n) est géométrique de premier terme $u_1 = p_1 - 0,05 = -0,05$ et de raison $r = 0,2$.
   Ainsi, $u_n = u_1 \times r^{n-1} = -0,05 \times 0,2^{n-1}$ et donc $p_n = u_n + 0,05 = 0,05(1 - 0,2^{n-1})$.

   (d) Comme $|0,2| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,2)^{n-1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,05(1-0) = 0,05.$

(e) L'existence de la limite et la croissance de (p_n) assurent la convergence de l'algorithme.

```
k=int(input('Précision à 10-k : '))
def probalimite(k) :
    p,j=0,0
    while p<0.05-10**(-k) :
        p=0.2*p+0.04
        j=j+1
    return(j)
print(probalimite(k))
```

Exercice 1.12 VouF ?

1. Si $\mathbb{P}(B) \notin \{0;1\}$, alors on a toujours $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A) = 1 - \mathbb{P}_B(A)$: Faux.
   Avec un dé cubique, $A = \{2\}$ et $B = \{2,4,6\}$, on a $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A) = 0$ et $1 - \mathbb{P}_B(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
2. Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors on a toujours $\mathbb{P}_B(A) \leqslant \mathbb{P}(A)$: Faux.
   Si $A = B$, on a $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}_B(B) = 1 \geqslant \mathbb{P}(B)$ et exceptionnellement égal...
3. Si B et C sont incompatibles et A est indépendant de B et C, alors A est indépendant de $B \cup C$:
   Vrai. $p = \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cap C))$
   $p \overset{indép.}{=} \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cap C)) \overset{incomp.}{=} \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) - 0$
   $p = \mathbb{P}(A)(\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - 0) = \mathbb{P}(A)(\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cup C)$.
4. Si A, B et C sont deux à deux indépendants, alors $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$: Faux.
   Reprendre l'exemple du cours et ne surtout pas confondre avec l'indépendance mutuelle.
5. Si A et B sont indépendants, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}) + \mathbb{P}(B)$: Vrai.
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \overset{indép.}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}) + \mathbb{P}(B). \end{aligned}$$
6. Si A, B et C sont mutuellement indépendants, alors $A \cup B$ et C sont indépendants : Vrai.
   $\mathbb{P}((A \cup B) \cap C) = \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$
   $\mathbb{P}((A \cup B) \cap C) \overset{mut.indép.}{=} \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$
   $\mathbb{P}((A \cup B) \cap C) = (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B))\mathbb{P}(C) \overset{indép.}{=} (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B))\mathbb{P}(C)$
   $\mathbb{P}((A \cup B) \cap C) = \mathbb{P}(A \cup B)\mathbb{P}(C)$.

Exercice 1.13

1. Puisque $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, on a
   $$\mathbb{P}_B(A) \geqslant \mathbb{P}(A) \iff \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \geqslant \mathbb{P}(A) \iff \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \geqslant \mathbb{P}(B) \iff \mathbb{P}_A(B) \geqslant \mathbb{P}(B).$$
   Ceci signifie que si B facilite A, alors A facilite B.
2. On a $\mathbb{P}(B \cap C) \neq 0$ et $B \cap C \subset C$ donc $0 < \mathbb{P}(B \cap C) \leqslant \mathbb{P}(C)$ et $\frac{1}{\mathbb{P}(B \cap C)} \geqslant \frac{1}{\mathbb{P}(C)}$.
   D'où, $\mathbb{P}_{B \cap C}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(B \cap C)} \geqslant \frac{\mathbb{P}((A \cap B) \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \mathbb{P}_C(A \cap B)$.
3. On a toujours $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C \cap D) + \mathbb{P}(C \cap \overline{D})$ donc $\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(C \cap \overline{D})$.
   Ainsi, $\mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B})\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$
   $$\begin{aligned} &\iff \mathbb{P}(A \cap B)\left(\mathbb{P}(\overline{A}) - \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)\right) = (\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B))\,\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \\ &\iff \mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}(\overline{A}) - \mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \\ &\iff \mathbb{P}(A \cap B)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(A)(\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)) \\ &\iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &\iff A \text{ et } B \text{ sont indépendants.} \end{aligned}$$

Exercice 1.14 Soient S : « le dé donne 6 » et T : « le dé est pipé ». On calcule alors la probabilité recherchée : $\mathbb{P}_S(T) = \frac{\mathbb{P}(S \cap T)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\mathbb{P}_T(S)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(S\cap T)+\mathbb{P}(S\cap \overline{T})} = \frac{\mathbb{P}_T(S)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}_T(S)\mathbb{P}(T)+\mathbb{P}_{\overline{T}}(S)\mathbb{P}(\overline{T})} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{25}{100}}{\frac{1}{2}\times\frac{25}{100}+\frac{1}{6}\times\frac{75}{100}} = \frac{1}{2}$.

Exercice 1.15 Pour $i \in \{1,2,3\}$, on définit V_i : « la i^{e} boule tirée est verte » et soit D : « on a tiré deux boules vertes ».
On a $D = (V_1 \cap V_2 \cap \overline{V_3}) \cup (V_1 \cap \overline{V_2} \cap V_3) \cup (\overline{V_1} \cap V_2 \cap V_3)$, union de trois événements deux à deux incompatibles. D'après la formule des probabilités composées,
$\mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap \overline{V_3}) = \mathbb{P}(V_1)\mathbb{P}_{V_1}(V_2)\mathbb{P}_{V_1\cap V_2}(\overline{V_3}) = \frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{7} = \frac{5}{42}$ en comptant les boules restantes.
De même, $\mathbb{P}(V_1 \cap \overline{V_2} \cap V_3) = \mathbb{P}(V_1)\mathbb{P}_{V_1}(\overline{V_2})\mathbb{P}_{V_1\cap \overline{V_2}}(V_3) = \frac{4}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{7} = \frac{5}{42}$
et $\mathbb{P}(\overline{V_1} \cap V_2 \cap V_3) = \mathbb{P}(\overline{V_1})\mathbb{P}_{\overline{V_1}}(V_2)\mathbb{P}_{\overline{V_1}\cap V_2}(V_3) = \frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7} = \frac{5}{42}$.
D'où, $\mathbb{P}(D) = \frac{5}{42}+\frac{5}{42}+\frac{5}{42} = \frac{5}{14}$.
Si les boules sont tirées simultanément, on a $\mathbb{P}(D) = \frac{\binom{4}{2}\times\binom{5}{1}}{\binom{9}{3}}$ en comptant le nombre de possibilités de choisir deux vertes et une non-vertes à choisir par rapport aux trois à choisir dans l'ensemble.

Exercice 1.16

1. Soit l'événement, pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, U_k : « la boule est extraite de l'urne $\mathcal{U}_k$ » et soit B : « la boule extraite est blanche ». Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, on a $\mathbb{P}(U_k) = \frac{1}{n} \neq 0$ et $\mathbb{P}_{U_k}(B) = \frac{k}{n}$.
   Puisque $(U_k)_{[\![1\,;n]\!]}$ est un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne
   $\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(U_k)\mathbb{P}_{U_k}(B) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{k}{n} = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$.
   On obtient le même résultat que si l'on avait une unique urne avec tout autant de boules.
2. La formule de Bayes donne $\mathbb{P}_B(U_1) = \frac{\mathbb{P}(U_1\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}_{U_1}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}}{\frac{n+1}{2n}} = \frac{1}{n^2}\times\frac{2n}{n+1} = \frac{2}{n(n+1)}$.
3. On a $\mathbb{P}(B) = \frac{n+1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$: plus n est grand, plus le nombre de boules noires se rapproche du nombre de boules blanches.
   On a $\mathbb{P}_B(U_1) = \frac{2}{n(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$: plus n est grand, plus la probabilité qu'une boule blanche provienne de la première urne est faible, les autres urnes en contenant beaucoup plus.

Exercice 1.17 Pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, on définit l'événement B_k : « la k^{e} boule tirée est blanche » et l'on cherche donc la probabilité de l'événement $\bigcap\limits_{k=1}^{n} B_k$.
Puisque $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} B_k\right) \neq 0$, on peut appliquer la formule des probabilités composées et
$\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} B_k\right) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{(B_1\cap B_2)}(B_3)\ldots\mathbb{P}_{(B_1\cap\ldots\cap B_{n-1})}(B_n)$.
Or, pour tout $k \in [\![2\,;n]\!]$, $\mathbb{P}_{(B_1\cap\ldots\cap B_{k-1})}(B_k) = \frac{n-(k-1)}{2n-(k-1)}$ puisque $k-1$ blanches ont été tirées.
D'où, $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} B_k\right) = \frac{n}{2n}\times\frac{n-1}{2n-1}\times\ldots\times\frac{n-(k-1)}{2n-(k-1)}\times\ldots\times\frac{n-(n-1)}{2n-(n-1)} = \frac{n!}{2n(2n-1)\ldots(n+1)} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.
Si les boules sont tirées simultanément, on obtient facilement $\frac{\binom{n}{n}}{\binom{2n}{n}}$ en comptant les boules désirées.

Exercice 1.18 Pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, on note U_k : « On a enlevé l'urne n° k » et G_k : « Le tirage de l'urne n° k est gagnant ». On a $\mathbb{P}(U_k) = \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(G_k) = \frac{1}{k}$.
Les réussites aux tirages étant mutuellement indépendantes, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{U_k}(T) &= \mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_{k-1} \cap G_{k+1} \cap \ldots \cap G_n)\\ &\overset{mut.indép.}{=} \mathbb{P}(G_1)\mathbb{P}(G_2)\ldots\mathbb{P}(G_{k-1})\mathbb{P}(G_{k+1})\ldots\mathbb{P}(G_n)\end{aligned}$$

$\mathbb{P}_{U_k}(T) = \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{k-1} \times \frac{1}{k+1} \times \ldots \times \frac{1}{n} = \frac{k}{1\times 2\times \ldots \times (k-1)\times k\times (k+1)\times \ldots \times n} = \frac{k}{n!}$.

$(U_k)_{[\![1\,;n]\!]}$ étant un s.c.e. de probabilités toutes non nulles, la formule des probabilités totales donne

$$\mathbb{P}(T) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(U_k)\mathbb{P}_{U_k}(T) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{k}{n!} = \frac{1}{n\times n!}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n\times n!}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2(n!)}$$

et l'on vérifiera la cohérence de ce résultat par la calcul à la main dans le cas $n = 2$.

Exercice 1.19 Soient les événements incompatibles formant un système complet d'événements U_k : « l'urne choisie est $\mathcal{U}_k$ », pour $k \in \{1, 2, 3\}$.

1. On sait que l'urne choisie contient au moins une boule noire. On calcule alors la probabilité recherchée : $\mathbb{P}_{(U_1\cup U_3)}(U_1) = \frac{\mathbb{P}((U_1\cup U_3)\cap U_1)}{\mathbb{P}(U_1\cup U_3)} \overset{incomp.}{=} \frac{\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(U_1)+\mathbb{P}(U_3)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$.
2. On sait que la boule tirée est noire et notons N : « la boule tirée est noire ». On calcule alors la probabilité recherchée : $\mathbb{P}_N(U_1) = \frac{\mathbb{P}(N\cap U_1)}{\mathbb{P}(N)} \overset{Bayes}{=} \frac{\mathbb{P}_{U_1}(N)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(N)}$

   $$\mathbb{P}_N(U_1) \overset{prob.tot.}{=} \frac{\mathbb{P}_{U_1}(N)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}_{U_1}(N)\mathbb{P}(U_1)+\mathbb{P}_{U_2}(N)\mathbb{P}(U_2)+\mathbb{P}_{U_3}(N)\mathbb{P}(U_3)} = \frac{1\times\frac{1}{3}}{1\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

Exercice 1.20 On définit C : « le livre se trouve dans la commode » et, pour $i \in [\![1\,;k]\!]$, les événements incompatibles T_i : « le livre se trouve dans le i^{e} tiroir ». On calcule alors la probabilité recherchée : $\mathbb{P}_{(\overline{T_1}\cap\overline{T_2}\cap\ldots\cap\overline{T_r})}(C) = \frac{\mathbb{P}(\overline{T_1}\cap\overline{T_2}\cap\ldots\cap\overline{T_r}\cap C)}{\mathbb{P}(\overline{T_1}\cap\overline{T_2}\cap\ldots\cap\overline{T_r})} \overset{prob.tot.}{=} \frac{\mathbb{P}_C(\overline{T_1}\cap\overline{T_2}\cap\ldots\cap\overline{T_r})\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}_C(\overline{T_1}\cap\overline{T_2}\cap\ldots\cap\overline{T_r})\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}_{\overline{C}}(\overline{T_1}\cap\overline{T_2}\cap\ldots\cap\overline{T_r})\mathbb{P}(\overline{C})}$.

Or, $\mathbb{P}(C) = p$, $\mathbb{P}(\overline{C}) = 1 - p$ et $\mathbb{P}_{\overline{C}}(\overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \ldots \cap \overline{T_r}) = 1$ car si le livre n'est pas dans la commode, il n'est pas dans un des tiroirs T_1,..., T_r.

De plus, $p = \mathbb{P}_C(\overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \ldots \cap \overline{T_r}) \overset{Morgan}{=} \mathbb{P}_C(\overline{T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_r}) = 1 - \mathbb{P}_C(T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_r)$

$$p \overset{incomp.}{=} 1 - (\mathbb{P}_C(T_1) + \mathbb{P}_C(T_2) + \ldots + \mathbb{P}_C(T_r)) \overset{\text{équiprob.}}{=} 1 - (\tfrac{1}{k} + \ldots + \tfrac{1}{k}) = 1 - \tfrac{r}{k} = \tfrac{k-r}{k}.$$

D'où, $\mathbb{P}_{\overline{T_1}\cap\overline{T_2}\cap\ldots\cap\overline{T_r}}(C) = \frac{\frac{k-r}{k}\times p}{\frac{k-r}{k}\times p+1\times(1-p)} = \frac{(k-r)p}{(k-r)p+(1-p)k} = \frac{(k-r)p}{k-rp}$.

Cette formule est cohérente pour $r = k$ ($\mathbb{P}_{\overline{C}}(C) = 0$), et même pour $r = 0$ ($\mathbb{P}(C) = p$).

Exercice 1.21 On désigne, pour $i \in \mathbb{N}^*$, B_i : « une boule blanche apparaît au tirage n° i ».

On a $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n)$ et puisque $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{n-1}) \neq 0$, la formule des probabilités composées donne, pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{(B_1\cap B_2)}(B_3)\ldots\mathbb{P}_{(B_1\cap B_2\cap\ldots\cap B_{n-1})}(B_n)\\ &= \mathbb{P}(B_1)\prod_{k=2}^{n}\mathbb{P}_{(B_1\cap B_2\cap\ldots\cap B_{k-1})}(B_k).\end{aligned}$$

D'après l'énoncé, $\mathbb{P}(B_1) = \frac{b}{2b}$ et, pour tout $k \in [\![2\,;n]\!]$, $\mathbb{P}_{(B_1\cap B_2\cap\ldots\cap B_{k-1})}(B_k) = \frac{(k-1)a+b}{(k-1)a+2b}$ car on a ajouté $(k-1)$ fois a boules blanches après les $(k-1)$ premiers tirages.

Ainsi, $\mathbb{P}(A_n) = \frac{b}{2b}\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)a+b}{(k-1)a+2b} = \frac{0+b}{0+2b}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{ka+b}{ka+2b} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{ka+b}{ka+2b}$.

Pour $n = 1$, $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{b}{2b} = \prod_{k=0}^{1-1}\frac{ka+b}{ka+2b}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{ka+b}{k+2b}$.

Exercice 1.22 Urne de Pólya

1. On a, d'après l'énoncé, $p_1(r, b) = \frac{b}{r+b}$.
2. Soient r, b et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les événements B_n : « on tire une boule blanche au n^{e} tirage » et R_n : « on tire une boule rouge au n^{e} tirage ».
   On applique la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements (B_1 , R_1).

$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(B_{n+1})$.
On a $\mathbb{P}(B_1) = p_1(r,b) = \frac{b}{r+b}$, $\mathbb{P}(R_1) = 1 - \mathbb{P}(B_1) = 1 - \frac{b}{r+b} = \frac{r}{r+b}$ et $\mathbb{P}(B_{n+1}) = p_{n+1}(r,b)$.
Déterminons $\mathbb{P}_{B_1}(B_{n+1})$: puisque B_1 est réalisé, on a r boules rouges et $b+1$ boules blanches à l'issue du premier tirage et il reste alors n tirages à réaliser. Ainsi, $\mathbb{P}_{B_1}(B_{n+1}) = p_n(r, b+1)$.
Déterminons de même $\mathbb{P}_{R_1}(B_{n+1})$: puisque R_1 est réalisé, on a $r+1$ boules rouges et b boules blanches à l'issue du premier tirage et il reste alors n tirages à réaliser.
Ainsi, $\mathbb{P}_{R_1}(B_{n+1}) = p_n(r+1, b)$.
Il vient alors $p_{n+1}(r,b) = \frac{b}{r+b}p_n(r,b+1) + \frac{r}{r+b}p_n(r+1,b)$

3. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathscr{P}_n : \forall\,(r\,,\,b) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad p_n(r,b) = \frac{b}{r+b}$.
On verra que les quantificateurs dans l'énoncé de la proposition seront bien utiles.
· Init. : $\mathscr{P}_1$ est vraie d'après la question 1.
· Héréd. : Supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.
On a $p_{n+1}(r,b) = \frac{b}{r+b}p_n(r,b+1) + \frac{r}{r+b}p_n(r+1,b) \overset{H.R.}{=} \frac{b}{r+b} \times \frac{(b+1)}{r+(b+1)} + \frac{r}{r+b} \times \frac{b}{(r+1)+b}$
$p_{n+1}(r,b) = \frac{b(b+1)+rb}{(r+b)(r+b+1)} = \frac{b(b+1+r)}{(r+b)(r+b+1)} = \frac{b}{r+b}$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
· Concl. : $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1.23 Ruine du joueur

1. Pour tout entier $n \in [\![\,0\,;N\,]\!]$, on définit les événements R_n : « le joueur devient riche à partir d'un capital initial de n € » et G : « le joueur gagne la première manche ».
Les probabilités totales pour le s.c.e. $\left(G\,,\,\overline{G}\right)$ donnent $\mathbb{P}(R_n) = \mathbb{P}(G)\mathbb{P}_G(R_n) + \mathbb{P}(\overline{G})\mathbb{P}_{\overline{G}}(R_n)$.
On a $\mathbb{P}(G) = p$, $\mathbb{P}(\overline{G}) = q$ et $\mathbb{P}(R_n) = u_n$.
Soit $n \in [\![\,1\,;N-1\,]\!]$.
Déterminons $\mathbb{P}_G(R_n)$: puisque G est réalisé, le joueur a un capital de $n+1$ € à l'issue de la première manche et il doit alors devenir riche avec un capital de $n+1$ €.
On a donc $\mathbb{P}_G(R_n) = \mathbb{P}(R_{n+1}) = u_{n+1}$.
Déterminons $\mathbb{P}_{\overline{G}}(R_n)$: puisque G n'est pas réalisé, le joueur a un capital de $n-1$ € à l'issue de la première manche et il doit alors devenir riche avec un capital de $n-1$ €.
On a donc $\mathbb{P}_{\overline{G}}(R_n) = \mathbb{P}(R_{n-1}) = u_{n-1}$.
Ainsi, $u_n = pu_{n+1} + qu_{n-1}$.
2. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$.
   (a) On a, pour tout $n \in [\![\,0\,;N-2\,]\!]$, $u_{n+1} = pu_{n+2} + qu_n$ donc $u_{n+2} = \frac{1}{p}u_{n+1} - \frac{q}{p}u_n$: c'est une S.R.L.2 d'équation caractéristique (E_c): $r^2 - \frac{1}{p}r + \frac{q}{p} = 0$ qui admet $r_1 = 1$ comme racine évidente $(1 - \frac{1}{p} + \frac{q}{p} = \frac{p-1+q}{p} = \frac{0}{p} = 0)$.
   D'où, $(E_c) \iff (r_1 - 1)(r_2 - \frac{q}{p}) = 0$ et il existe un unique couple de réels $(\,\lambda\,,\,\mu\,)$ tel que $\forall n \in [\![\,0\,;N\,]\!]$, $u_n = \lambda.1^n + \mu\left(\frac{q}{p}\right)^n$. On a $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_N = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + \mu\left(\frac{q}{p}\right)^N = 1 \end{cases}$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ -\mu + \mu\left(\frac{q}{p}\right)^N = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ \mu = \frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} \end{cases}$ et $u_n = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}$ pour tout $n \leqslant N$.
   (b) · Si $\frac{1}{2} < p < 1$, alors $0 < q = 1 - p < \frac{1}{2}$ et $0 < \frac{q}{p} < 1$.
   Ainsi, $\lim\limits_{N \to +\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^N = 0$ et pour N très grand, $\left(\frac{q}{p}\right)^N \approx 0$ donc $u_n \approx 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n$: le joueur a une probabilité non nulle de devenir richissime.

· Si $\quad 0 < p < \frac{1}{2}$, alors $\quad \frac{1}{2} < q = 1 - p < 1 \quad$ et $\quad \frac{q}{p} > 1$.

Ainsi, $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^N = +\infty$ et pour N très grand, $u_n \approx 0$: le joueur a une probabilité quasi nulle de devenir richissime.

Il faut bien comprendre que n ne tend pas vers l'infini, c'est un capital de départ, fixé, et ce résultat signifie que plus on veut être riche à partir de ce capital, plus la probabilité de le devenir est proche de 0 lorsque $p < \frac{1}{2}$.

Exercice 1.24 Soit p la probabilité recherchée.

Remarquons que chaque urne contient $N+1$ boules dont au moins une blanche et une noire.

· Pour $n > N$, on ne peut obtenir plus de boules blanches que ce qu'en contient chacune des urnes donc $\quad p = 0$.

· Pour $n \in [\![1\,; N]\!]$, on note $\quad A_n$: « on obtient n boules blanches »

et pour $j \in [\![1\,; N]\!]$, $\quad U_j$: « on choisit l'urne n° j ».

On a, pour tout $j \in [\![1\,; N]\!]$, $\quad \mathbb{P}(U_j) = \frac{1}{N}$ et, $(U_1, U_2, \ldots, U_N)$ étant un s.c.e. de probabilités toutes non nulles, les probabilités totales donnent $\quad p = \mathbb{P}(A_n) = \sum\limits_{j=1}^{N} \mathbb{P}(U_j)\mathbb{P}_{U_j}(A_n) = \frac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^{N} \mathbb{P}_{U_j}(A_n)$.

Or, pour $j < n$, $\quad \mathbb{P}_{U_j}(A_n) = 0 \quad$ puisque l'urne n° j ne contient que j boules blanches

et pour $j \in [\![n\,; N]\!]$, $\quad \mathbb{P}_{U_j}(A_n) = \frac{\binom{j}{n}}{\binom{N+1}{n}} \quad$ puisque l'on tire n boules dans l'urne j qui contient $N+1$ boules dont seulement j sont blanches.

Donc, $\quad p = \frac{1}{N}\sum\limits_{j=n}^{N} \mathbb{P}_{U_j}(A_n) = \frac{1}{N}\sum\limits_{j=n}^{N} \frac{\binom{j}{n}}{\binom{N+1}{n}} = \frac{1}{N\binom{N+1}{n}}\sum\limits_{j=n}^{N}\binom{j}{n} \overset{Pascal}{=} \frac{1}{N\binom{N+1}{n}}\sum\limits_{j=n}^{N}\left[\binom{j+1}{n+1} - \binom{j}{n+1}\right]$

$$p \overset{télésc.}{=} \frac{1}{N\binom{N+1}{n}}\left[\binom{N+1}{n+1} - \binom{n}{n+1}\right] = \frac{\binom{N+1}{n+1} - 0}{N\binom{N+1}{n}} = \frac{(N+1)!}{(n+1)!((N+1)-(n+1))!} \times \frac{n!(N+1-n)!}{N(N+1)!} = \frac{N+1-n}{N(n+1)}.$$

Exercice 1.25

I_ Étude du mouvement du jeton A.

1. Pour que le jeton ne change jamais de case, il faut qu'à chaque lancer, le dé tombe sur 3, 4, 5 ou 6, ce qui se produit avec une probabilité de $\frac{2}{3}$. Au bout de n lancers, la probabilité que le jeton n'ait jamais bougé est donc de $\quad \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
2. La formule des probabilités totales pour le s.c.e. (X_n, Y_n) de probabilités non nulles donne
   $\mathbb{P}(X_{n+1}) = \mathbb{P}(X_n)\mathbb{P}_{X_n}(X_{n+1}) + \mathbb{P}(Y_n)\mathbb{P}_{Y_n}(X_{n+1})$.
   On a $\quad \mathbb{P}(X_{n+1}) = x_{n+1}, \quad \mathbb{P}(X_n) = x_n, \quad \mathbb{P}(Y_{n+1}) = y_{n+1}, \quad \mathbb{P}(Y_n) = y_n$, $\mathbb{P}_{X_n}(X_{n+1}) = \frac{2}{3}$ (le jeton A ne doit pas changer de case au $(n+1)^{e}$ lancer) et $\mathbb{P}_{Y_n}(X_{n+1}) = \frac{1}{3}$ (le jeton A doit changer de case au $(n+1)^{e}$ lancer).
   D'où la relation de récurrence $\quad x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n$.
   De même, on obtient $\quad y_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}y_n$.
3. Par ailleurs, les événements X_n et Y_n sont complémentaires donc $\quad y_n = 1 - x_n$.
   D'où, $\quad x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}(1 - x_n) = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{3}$: $\quad (x_n)_{\mathbb{N}}$ est donc arithmético-géométrique, de premier terme $\quad x_0 = 1 \quad$ puisque le jeton A est initialement dans la case C_1.
   Déterminons le point fixe : $\quad \lambda = \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{3} \iff \lambda = \frac{1}{2} \quad$ et posons $\quad u_n = x_n - \frac{1}{2}$.
   On a $\quad u_{n+1} = x_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}(x_n - \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}u_n$: $\quad (u_n)_{\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\quad \frac{1}{3} \quad$ et de premier terme $\quad u_0 = x_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $\quad x_n = u_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{3^n})$. $\quad$ Ainsi, $\quad y_n = 1 - x_n = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n})$.
4. Puisque $\quad \frac{1}{3} \in]-1\,; 1[$, $\quad \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{3^n} = 0 \quad$ et $\quad \lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} y_n = \frac{1}{2}(1 \pm 0) = \frac{1}{2}$.
   À long terme, le jeton A se trouve la moitié du temps dans la case C_1, l'autre moitié dans C_2.

II_ Étude des mouvements du couple de jetons.

1. Pour $n=0$, on a initialement $e_0=1$ et $f_0=g_0=h_0=0$.
Pour $n=1$, on a après le premier lancer $e_1=f_1=g_1=\frac{1}{3}$ et $h_1=0$ puisque l'on ne peut changer les deux jetons simultanément et les autres situations sont équiprobables.
Les situations suivantes se compliquent : déterminons une relation de récurrence.
Remarquons que, comme après le premier lancer, $\mathbb{P}_{E_n}(H_{n+1})=0$
et $\mathbb{P}_{E_n}(E_{n+1})=\mathbb{P}_{E_n}(F_{n+1})=\mathbb{P}_{E_n}(G_{n+1})=\frac{1}{3}$.
La formule des probabilités totales pour le s.c.e. (E_n,F_n,G_n,H_n) de probabilités non nulle (dans le cas où elles le sont, la probabilité en facteur est nulle) donne alors
$\mathbb{P}(E_{n+1})=\mathbb{P}_{E_n}(E_{n+1})\mathbb{P}(E_n)+\mathbb{P}_{F_n}(E_{n+1})\mathbb{P}(F_n)+\mathbb{P}_{G_n}(E_{n+1})\mathbb{P}(G_n)+\mathbb{P}_{H_n}(E_{n+1})\mathbb{P}(H_n)$
$=\frac{1}{3}\mathbb{P}(E_n)+\frac{1}{3}\mathbb{P}(F_n)+\frac{1}{3}\mathbb{P}(G_n)+0\mathbb{P}(H_n)$.
D'où $e_{n+1}=\frac{1}{3}(e_n+f_n+g_n)$.
De même, $\mathbb{P}_{F_n}(E_{n+1})=\mathbb{P}_{F_n}(F_{n+1})=\mathbb{P}_{F_n}(H_{n+1})=\frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}_{F_n}(G_{n+1})=0$
d'où $f_{n+1}=\frac{1}{3}(e_n+f_n+h_n)$,
$\mathbb{P}_{G_n}(E_{n+1})=\mathbb{P}_{G_n}(G_{n+1})=\mathbb{P}_{G_n}(H_{n+1})=\frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}_{G_n}(F_{n+1})=0$
d'où $g_{n+1}=\frac{1}{3}(e_n+g_n+h_n)$
et enfin, $\mathbb{P}_{H_n}(F_{n+1})=\mathbb{P}_{H_n}(G_{n+1})=\mathbb{P}_{H_n}(H_{n+1})=\frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}_{H_n}(E_{n+1})=0$
d'où $h_{n+1}=\frac{1}{3}(f_n+g_n+h_n)$.
On obtient alors, pour $n=2$, $e_2=\frac{1}{3}(e_1+f_1+g_1)=\frac{1}{3}$, $f_2=\frac{1}{3}(e_1+f_1+h_1)=\frac{2}{9}$,
$g_2=\frac{1}{3}(e_1+g_1+h_1)=\frac{2}{9}$, $h_2=\frac{1}{3}(f_1+g_1+h_1)=\frac{2}{9}$
et pour $n=3$, $e_3=\frac{1}{3}(e_2+f_2+g_2)=\frac{7}{27}$, $f_3=\frac{1}{3}(e_2+f_2+h_2)=\frac{7}{27}$,
$g_3=\frac{1}{3}(e_2+g_2+h_2)=\frac{7}{27}$, $h_3=\frac{1}{3}(f_2+g_2+h_2)=\frac{2}{9}$.

2. D'après les formules de récurrence déterminées à la question précédente, on pose
$M=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}$ et l'on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $Z_{n+1}=MZ_n$.

3. Une récurrence , avec pour hérédité $Z_{n+1}=MZ_n=M(M^nZ_0)=(MM^n)Z_0=M^{n+1}Z_0$,
prouve que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $Z_n=M^nZ_0$ où $Z_0=\begin{pmatrix}e_0\\f_0\\g_0\\h_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

4. Un calcul donne $M^2=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}3&2&2&2\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{pmatrix}$ puis $M^4=(M^2)^2=\dfrac{1}{81}\begin{pmatrix}21&20&20&20\\20&21&20&20\\20&20&21&20\\20&20&20&21\end{pmatrix}$.

5. On a, pour $p=0$, $I=M^0=M^{2\times 0}=\alpha_0J+\beta_0I$ pour $\alpha_0=0$ et $\beta_0=1$.
Pour $p=1$, $M^2=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}3&2&2&2\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{pmatrix}=\dfrac{2}{9}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}+\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\frac{2}{9}J+\frac{1}{9}I$
donc $M^{2\times 1}=\alpha_1J+\beta_1I$ pour $\alpha_1=\frac{2}{9}$ et $\beta_1=\frac{1}{9}$.
Supposons que $M^{2p}=\alpha_pJ+\beta_pI$ pour un certain $p\in\mathbb{N}$. On a
$M^{2(p+1)}=M^{2+2p}=M^2M^{2p}=(\frac{2}{9}J+\frac{1}{9}I)(\alpha_pJ+\beta_pI)=\frac{2}{9}\alpha_pJ^2+\frac{2}{9}\beta_pJ+\frac{1}{9}\alpha_pJ+\frac{1}{9}\beta_pI$.
Un simple calcul donne $J^2=4J$ et l'on obtient alors
$M^{2(p+1)}=(\frac{8}{9}\alpha_p+\frac{2}{9}\beta_p+\frac{1}{9}\alpha_p)J+\frac{1}{9}\beta_pI=(\alpha_p+\frac{2}{9}\beta_p)J+\frac{1}{9}\beta_pI$.
La propriété est donc vraie au rang $p+1$ avec les relations de récurrence
$\alpha_{p+1}=\alpha_p+\frac{2}{9}\beta_p$ et $\beta_{p+1}=\frac{1}{9}\beta_p$.

6. La suite $(\beta_p)_{\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{9}$ et de premier terme $\beta_0 = 1$ d'où, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\quad \beta_p = \frac{1}{9^p} \quad$ et $\quad \alpha_{p+1} = \alpha_p + \frac{2}{9^{p+1}}$.
   Ainsi, $\quad \alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{2}{9^{k+1}} \quad$ et en sommant ces inégalités et par téléscopage,
   $$\alpha_p = \alpha_p - \alpha_0 = \sum_{k=0}^{p-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{2}{9^{k+1}} = \frac{2}{9} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{9^k} = \frac{2}{9} . \frac{1-(\frac{1}{9})^p}{1-\frac{1}{9}} = \ldots = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{9^p}\right).$$
   Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\quad M^{2p} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{9^p}\right) J + \frac{1}{9^p} I = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{3^{2p}}\right) J + \frac{1}{3^{2p}} I$
   donc pour tout n pair, $\quad M^n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) J + \frac{1}{3^n} I$.
   Puisque $\quad \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \end{pmatrix} = Z_n = M^n Z_0 = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad$ il suffit de conserver la première colonne de M^n pour obtenir les probabilités e_n, f_n, g_n et h_n.
   Ainsi, pour n pair, $\quad \mathbb{P}(E_n) = e_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \times 1 + \frac{1}{3^n} \times 1 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3^{n-1}}\right)$
   et $\quad \mathbb{P}(F_n) = \mathbb{P}(G_n) = \mathbb{P}(H_n) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$.
   Pour $n = 1$, on a $\quad \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3^{1-1}}\right) = \frac{1}{2} \neq e_1 \quad$ et $\quad \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{3^0}\right) = 0$, différent de f_1 et g_1.
   Ces expressions ne sont donc pas valables pour n impair.

7. Puisque $\frac{1}{3} \in\,]-1\,;1[$, $\lim \frac{1}{3^n} = 0$: $\quad \lim e_n = \lim f_n = \lim g_n = \lim h_n = \frac{1}{4}(1 \pm 0) = \frac{1}{4}$.
   À long terme, on aurait donc une situation quasi-équiprobable entre les quatre positions.

8. Voici un script satisfaisant.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
# Précision de la valeur approchée :
N=3
# Initialisation globale :
e , f , g , h , i = 1 , 0 , 0 , 0 , 0
while (
(abs(e-.25)>10**(-N))
or (abs(f-.25)>10**(-N))
or (abs(g-.25)>10**(-N))
or (abs(h-.25)>10**(-N))
 ) :
    # Changement global des valeurs :
    e , f , g , h , i = (e+f+g)/3 , (e+f+h)/3 , (e+g+h)/3 , (f+g+h)/3 , i+1
print('i récursif =',i)
# Affichage des termes obtenus :
print('Termes de rang i :' , [e,f,g,h])
# Matrice M :
M=np.array([
     [1/3,1/3,1/3,0],
     [1/3,1/3,0,1/3],
     [1/3,0,1/3,1/3],
     [0,1/3,1/3,1/3]])
# Affichage de la première colone de M**i
print('Première colonne de M**i=', al.matrix_power(M,i)[:,0])
```

Chapitre n° 2

L'ESPACE VECTORIEL $\mathbb{R}^n$

Sommaire

Introduction

L'algèbre linéaire est initiée dans son principe par le mathématicien perse Al-Khwârizmî au IXᵉ s. qui s'est inspiré des textes de mathématiques indiens et qui a complété les travaux de l'école grecque. Travaux repris au XVIIᵉ s. par René Descartes qui pose des problèmes de géométrie comme la détermination de l'intersection de deux droites en termes d'équation linéaire, établissant dès lors un pont entre deux branches mathématiques jusqu'alors séparées : l'algèbre et la géométrie. Au XIXᵉ s., l'algèbre linéaire devient une branche des mathématiques à part entière avec Gauss, Jordan, Hamilton, inventeur du terme vector, Grassmann, puis Giuseppe Peano qui axiomatise entièrement la théorie en 1888. Les espaces vectoriels deviennent alors une structure générale omniprésente dans presque tous les domaines mathématiques, notamment en analyse pour les espaces de fonctions. Sous leur forme la plus simple, les applications linéaires dans les espaces vectoriels représentent intuitivement les déplacements dans les espaces géométriques élémentaires comme la droite, le plan ou notre espace physique. Les bases de cette théorie remplacent maintenant la représentation construite par Euclide au IIIe s. av. J.-C. La construction moderne permet alors de généraliser la notion d'espace à des dimensions quelconques.

L'algèbre linéaire permet de résoudre tout un ensemble d'équations dites linéaires utilisées non seulement dans une multitude de domaines mathématiques, mais aussi en mécanique, en physique et dans de nombreuses autres branches comme les sciences naturelles ou les sciences sociales.

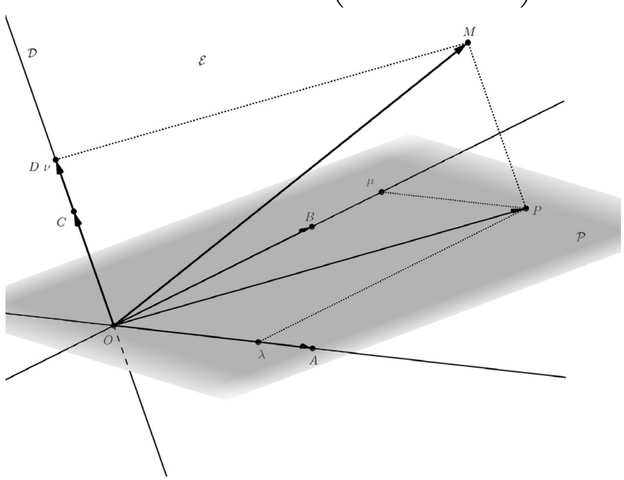
Ce chapitre est le premier opus d'une étude qui se poursuivra au moins jusqu'aux concours. Commençons donc par une activité récréative.

Activité *Soient A, B, C trois points de l'espace usuel $\mathscr{E}$ dont O est l'origine. On suppose que les points O, A, B et C ne sont pas coplanaires.*

· Puisque O et C ne sont pas confondus, il existe une unique droite $\mathscr{D}$ passant par ces deux points. On a $D \in \mathscr{D} = (OC) \iff \overrightarrow{OD}$ *et* $\overrightarrow{OC}$ *sont colinéaires* $\iff \exists! \nu \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{OD} = \nu \overrightarrow{OC}$.
Autrement dit, tout vecteur $\overrightarrow{OD}$ de la droite $\mathscr{D}$ est un multiple du vecteur $\overrightarrow{OC}$, et réciproquement. On peut dire que ν est l'abscisse du point D sur la droite $\left(\mathscr{D}, \overrightarrow{OC}\right)$, la coordonnée de D dans le repère (O, C) de $\mathscr{D}$, la coordonnée de $\overrightarrow{OD}$ dans la base $\overrightarrow{OC}$ de $\mathscr{D}$, base qui contient un seul vecteur.

· Puisque les points O, A et B ne sont pas alignés, il existe un unique plan $\mathscr{P}$ passant par ces trois points. On a alors $P \in \mathscr{P} = (OAB) \iff \exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$.
Autrement dit, tout vecteur $\overrightarrow{OP}$ du plan $\mathscr{P}$ se décompose en somme de multiples des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, et réciproquement.
On peut dire que (λ, μ) sont les coordonnées de P dans le repère (O, A, B) de $\mathscr{P}$, les coordonnées de $\overrightarrow{OP}$ dans la base $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ du plan $\mathscr{P}$, base qui contient deux vecteurs.

· Les points O, A, B et C ne sont pas coplanaires donc, pour tout point M de l'espace $\mathscr{E}$, il existe un unique triplet $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} + \nu \overrightarrow{OC}$.
Autrement dit, tout vecteur $\overrightarrow{OM}$ de l'espace $\mathscr{E}$ se décompose en somme de multiples des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$, et réciproquement.
On peut dire que (λ, μ, ν) sont les coordonnées de M dans le repère (O, A, B, C) de $\mathscr{E}$, les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ de l'espace $\mathscr{E}$, base qui contient trois vecteurs.



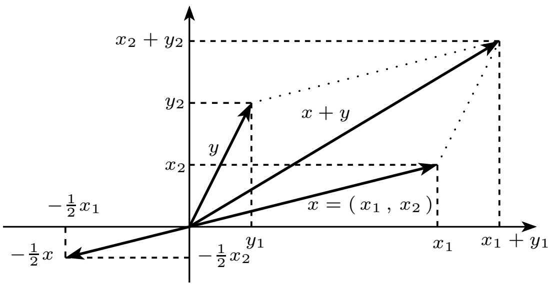
Ainsi, pour chacun des objets géométriques précédents, droite, plan ou espace, un point appartient à l'objet si, et seulement si, le vecteur d'origine O associé à ce point peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs d'une base de cet objet. Le cours qui suit généralisera ces observations et l'on se souviendra, pour une meilleure compréhension, que l'on identifie les points de l'espace et les vecteurs issus de l'origine ayant pour extrémité ce point.

Dans tout le chapitre, n désigne un entier naturel non nul, d, p et q sont des entiers naturels.

1 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

1.1 Définitions

Définition 2.1 *On désigne par $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de nombres réels. Ces n-uplets sont appelés vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (sur lesquels on ne mettra pas de flèches).*
On rappelle que $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \iff \forall i \in [\![1 ; n]\!], \quad x_i = y_i$.
On définit deux opérations, l'une interne, l'addition de deux vecteurs, et l'autre externe, le produit d'un vecteur par un scalaire, de la manière suivante.
· *L'addition de deux n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, notée $+$, est définie par* $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$.
· *Le produit d'un n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par un scalaire (un réel) $\lambda \in \mathbb{R}$, notée . , est définie par* $\lambda.(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$.
Si l'on note $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *et* $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, *alors ces opérations seront notées* $x + y$ *et* $\lambda.x$ *(ou λx) respectivement.*



Théorème 2.1
On note $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ et $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ les vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
- *L'addition des vecteurs est commutative :* $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad x + y = y + x$.
- *L'addition des vecteurs est associative :*
  $\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}^n)^3, \quad (x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$.
- *Il existe un unique élément de $\mathbb{R}^n$, noté $0_{\mathbb{R}^n}$, tel que* $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x + 0_{\mathbb{R}^n} = x$.
  $0_{\mathbb{R}^n}$ *est dit neutre pour l'addition, vaut* $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0)$ *et est appelé vecteur nul.*
- *Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que* $x + y = y + x = 0_{\mathbb{R}^n}$. *Un tel y est unique, il est appelé opposé de x, est noté $-x$ et vaut* $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.
- *La multiplication d'un vecteur par un scalaire est associative, distributive par rapport à l'addition des vecteurs et celle des réels, et possède un élément neutre :*
  · $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (\lambda\mu).x = \lambda.(\mu.x) = \lambda\mu x$
  · $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$
  · $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$
  · $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad 1.x = x$

Démonstration : Tout ceci découle immédiatement des propriétés similaires de l'addition et du produit des nombres réels que l'on applique coordonnées par coordonnées. □

Remarque : On dit que $\mathbb{R}^n$ est ainsi muni d'une structure d'espace vectoriel. De manière similaire, l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'espace des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, l'espace des suites, l'espace des suites convergentes, l'espace des matrices carrées d'ordre n,... peuvent aussi être munis d'une structure d'espace vectoriel, en définissant $\lambda f + g$ par $(\lambda f + g)(x) = \lambda f(x) + g(x)$ pour le premier espace par exemple. Les vecteurs ne sont alors plus des n-uplets de réels mais des fonctions, des suites, des matrices,... Les structures vectorielles sont d'une grande importance dans l'étude de ces ensembles. Cette année, nous nous contenterons, dans l'immense majorité des cas, d'études dans $\mathbb{R}^n$.

Propriété 2.2 *Pseudo-intégrité de la multiplication d'un vecteur par un scalaire*
$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda.x = 0_{\mathbb{R}^n} \iff \lambda = 0$ *ou* $x = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Démonstration : On a $\lambda.x = \lambda.(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.
· Il est clair que si $\lambda = 0$ ou $x = 0_{\mathbb{R}^n}$, alors $\lambda.x = (0, \ldots, 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
· Supposons que $\lambda.x = (0, \ldots, 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
On a alors $\forall i \in [\![1 ; n]\!]$, $\lambda x_i = 0$ c.-à-d. $\forall i \in [\![1 ; n]\!]$, $\lambda = 0$ ou $x_i = 0$.
Si $\lambda \neq 0$, alors $\forall i \in [\![1 ; n]\!]$, $x_i = 0$ et $x = (0, \ldots, 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$. □

1.2 Combinaisons linéaires

Définition 2.2 *Une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est un p-uplet $(e_1, e_2, \ldots, e_p) \in (\mathbb{R}^n)^p$ de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$, où $p \in \mathbb{N}$. Si p est nul, on dit que la famille est vide.*

Définition 2.3 *Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \ldots, e_p) \in (\mathbb{R}^n)^p$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est combinaison linéaire des p vecteurs de $\mathcal{F}$ s'il existe p scalaires λ_1,..., λ_p tels que* $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_p e_p$.
Les scalaires λ_i sont appelés coefficients de la combinaison linéaire.
Par convention, on dit que la famille vide admet pour seule combinaison linéaire, le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^n}$.

Exemples : ◦ Dans $\mathbb{R}^3$, $x = (1, 1, 4)$ est combinaison linéaire des vecteurs $e_1 = (3, 1, -1)$, $e_2 = (-1, 3, 1)$ et $e_3 = (0, 2, -1)$. En effet, $x = 1\, e_1 + 2\, e_2 - 3\, e_3$.
◦ Le vecteur nul est combinaison linéaire de toute famille de vecteurs :
$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall (e_1, ..., e_p) \in (\mathbb{R}^n)^p, \quad 0_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{p} 0\, e_i$.

1.3 Base canonique de $\mathbb{R}^n$

Définition & Propriété 2.3
Soient les vecteurs $c_1 = (1, 0, ..., 0)$, $c_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$,..., $c_n = (0, ..., 0, 1)$ *de* $\mathbb{R}^n$.
La famille de vecteurs $\mathcal{C}_n = (c_1, ..., c_n)$ *est appelée base canonique de* $\mathbb{R}^n$.
Tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{C}_n$:
$x = (x_1, ..., x_n)$ *si, et seulement si,* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, c_i$.
Les réels x_i sont appelés coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{C}_n$.
La matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *est la matrice des coordonnées de x dans cette base.*

Démonstration : Par construction des vecteurs c_i de la base canonique, on a l'écriture suivante.

$$x = (x_1, ..., x_n) = x_1(1, 0, ..., 0) + x_2(0, 1, 0, ..., 0) + ... + x_n(0, ..., 0, 1) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, c_i.$$

Démontrons l'unicité de la décomposition en supposant que le vecteur x s'écrit aussi $x = \sum_{i=1}^{n} y_i\, c_i$.

Alors, $(0, ..., 0) = 0_{\mathbb{R}^n} = x - x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, c_i - \sum_{i=1}^{n} y_i\, c_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)\, c_i = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n)$.

Ainsi $\forall i \in [\![1 ; n]\!]$, $x_i - y_i = 0$ et $y_i = x_i$. □

Exemple : La base canonique $\mathcal{C}_3$ de $\mathbb{R}^3$ est la famille constituée des vecteurs
$c_1 = (1, 0, 0)$, $c_2 = (0, 1, 0)$ et $c_3 = (0, 0, 1)$.
Tout vecteur $x = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit alors de manière unique $x = a\, c_1 + b\, c_2 + c\, c_3$.

2 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

2.1 Définition

Définition 2.4 *On appelle sous-espace vectoriel (s.e.v.) de $\mathbb{R}^n$, toute partie non vide de $\mathbb{R}^n$ stable pour l'addition et pour la multiplication par un scalaire.*
A s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ $\iff$ $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\varnothing\}$ et $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{R} \times A^2$, $x + y \in A$ et $\lambda x \in A$.

Théorème 2.4 *A est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si,*
- *A est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$,*
- *$\forall (x, y) \in A^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda x + \mu y \in A$.*

Démonstration : Soient $(x, y) \in A^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Si A est stable par multiplication par un scalaire, alors $\lambda x \in A$ et $\mu y \in A$.
Et si de plus, A est stable par addition, alors $\lambda x + \mu y \in A$.
Réciproquement, si A est stable par combinaisons linéaires, alors $x + y = 1x + 1y \in A$ et $\lambda x = \lambda x + 0y \in A$. □

Remarques : • Autrement dit, une partie non vide est un s.e.v. si, et seulement si, elle est stable par combinaisons linéaires.
- Ce théorème est encore vrai sous la condition $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{R} \times A^2$, $\lambda x + y \in A$.
- Si A est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$, alors $0_{\mathbb{R}^n} \in A$. En effet, pour $x \in A \neq \varnothing$, $0x = 1x + (-1)x = 0_{\mathbb{R}^n} \in A$.

Pour démontrer qu'une partie est un s.e.v., on n'oubliera pas de justifier qu'elle est non vide, généralement en montrant qu'elle contient $0_{\mathbb{R}^n}$.
Pour montrer qu'une partie n'est pas un s.e.v., on commencera par se demander si elle contient $0_{\mathbb{R}^n}$ ou non.

Exemples : ◦ $\mathbb{R}^n$ et $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.
◦ Soit $A = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a + 3b - c = 0\}$.
· On a $A \subset \mathbb{R}^3$.
· On a $2 \times 0 + 3 \times 0 - 0 = 0$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in A$ et $A \neq \varnothing$.
· Soient $x = (a, b, c)$, $y = (a', b', c') \in A$ et λ, $\mu \in \mathbb{R}$.
Posons $(a'', b'', c'') = z = \lambda x + \mu y = (\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', \lambda c + \mu c')$.

Puisque $\quad 2a''+3b''-c'' = 2(\lambda a+\mu a')+3(\lambda b+\mu b')-(\lambda c+\mu c') = \lambda(2a+3b-c)+\mu(2a'+3b'-c')$

$2a''+3b''-c'' \overset{(x\,,\,y)\in A^2}{=} 0\lambda+0\mu = 0, \quad$ on a $\quad z = \lambda x+\mu y \in A$.

· A est donc un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

◦ Soit $\quad B = \{(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha-2\beta+3\gamma-4\delta+5=0\} \subset \mathbb{R}^4$.

Puisque $\quad 0-2\times 0+3\times 0-4\times 0+5 = 5 \neq 0, \quad 0_{\mathbb{R}^4} \notin B \quad$ et B n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$.

◦ Soit $\quad C = \{(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1x_2 - x_3^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

On a bien $\quad 0\times 0-0^2=0 \quad$ donc $\quad 0_{\mathbb{R}^3} \in C \quad$ et $\quad C \neq \varnothing \quad$ mais il ne semble pas que la relation définissant C soit linéaire. Vérifions que C n'est pas stable par combinaison linéaire.

Puisque $\quad 1\times 1-1^2 = 1\times 1-(-1)^2 = 0 \quad$ et $\quad 2\times 2-0^2 \neq 0, \quad$ on a $\quad x = (1\,,1\,,1) \in C$, $y = (1\,,1\,,-1) \in C \quad$ mais $\quad x+y = (2\,,2\,,0) \notin C$. $\quad C$ n'est pas stable par addition : C n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

◦ Soient $\quad (a\,,\,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,,0)\} \quad$ et la droite $\quad \mathscr{D}_{a,b} = \{(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by=0\}$.

· On a $\quad \mathscr{D}_{a,b} \subset \mathbb{R}^2$.

· On a $\quad a\times 0+b\times 0 = 0 \quad$ donc $\quad 0_{\mathbb{R}^2} \in \mathscr{D}_{a,b} \quad$ et $\quad \mathscr{D}_{a,b} \neq \varnothing$.

· Soient $u = (x_1\,,\,y_1)$, $v = (x_2\,,\,y_2) \in \mathscr{D}_{a,b}$ et $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$.

Posons $\quad (x_3\,,\,y_3) = w = \lambda u+\mu v = \lambda\,(x_1\,,\,y_1)+\mu\,(x_2\,,\,y_2) = (\lambda x_1+\mu x_2\,,\,\lambda y_1+\mu y_2)$.

On a $\quad ax_3+by_3 = a(\lambda x_1+\mu x_2)+b(\lambda y_1+\mu y_2) = \lambda(ax_1+by_1)+\mu(ax_2+by_2) \overset{u,v\,\in\mathscr{D}_{a,b}}{=} 0\lambda+0\mu = 0$ et $\quad w = \lambda u+\mu v \in \mathscr{D}_{a,b}$.

· La droite $\mathscr{D}_{a,b}$ est donc un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.

◦ On a vu au premier semestre que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$. Par exemple,

$$(S) : \left\{\begin{array}{lcl} x+y+z & = & 0 \\ y-z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & z \\ x & = & -2z \end{array}\right. \iff (x\,,\,y\,,\,z) \in \mathcal{S} = \{(-2t\,,\,t\,,\,t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Cet ensemble solution $\mathcal{S}$ est non vide et stable par combinaisons linéaires.

En effet, $\quad 0_{\mathbb{R}^3} = (0\,,0\,,0) = (-2\times 0\,,0\,,0) \in \mathcal{S} \quad$ et pour tous $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ et $t,\ t' \in \mathbb{R}$,

$\lambda\,(-2t\,,\,t\,,\,t)+\mu\,(-2t'\,,\,t'\,,\,t') = (-2(\lambda t+\mu t')\,,\,\lambda t+\mu t'\,,\,\lambda t+\mu t') \overset{t''=\lambda t+\mu t'}{=} (-2t''\,,\,t''\,,\,t'') \in \mathcal{S}$.

2.2 Sous-espace vectoriel engendré

Définition & Propriété 2.5 *Soit $(e_1, e_2, ..., e_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.*
L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de cette famille est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, appelé sous-espace vectoriel engendré par $(e_1, e_2, ..., e_p)$.
On le note $\quad \mathrm{Vect}(e_1, e_2, ..., e_p) \quad$ *et l'on dit que $(e_1, e_2, ..., e_p)$ en est une famille génératrice et que les vecteurs e_1,..,e_p en sont des vecteurs générateurs.*

$$\mathrm{Vect}(e_1, e_2, ..., e_p) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \mid (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\} = \left\{ \lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+...+\lambda_p e_p \mid (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\}.$$

Démonstration : · Si la famille est vide, c.-à-d. si $p = 0$, alors l'ensemble de ses combinaisons linéaires est l'ensemble $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$, qui est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

· Si la famille n'est pas vide, alors par définition, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de cette famille n'est pas vide et il est stable par combinaison linéaire. Le théorème 2.4 permet alors de conclure que c'est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$. $\square$

Exemples : ◦ $\mathrm{Vect}\left((0_{\mathbb{R}^n})\right) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

• $\mathbb{R}^n = \mathrm{Vect}\left(\mathcal{C}_n\right) = \mathrm{Vect}\left(c_1, ..., c_n\right)$ où $\mathcal{C}_n = (c_1, ..., c_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

◦ $A = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a + 3b - c = 0\} = \{(a, b, 2a+3b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ est s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

On a $(a, b, 2a+3b) = a(1, 0, 2) + b(0, 1, 3)$

donc $A = \mathrm{Vect}\left(a_1 = (1, 0, 2), a_2 = (0, 1, 3)\right)$.

◦ Soit $\mathcal{F}_3 = (f_1, f_2, f_3)$ la famille des vecteurs $f_1 = (0, 1, 1)$, $f_2 = (1, 0, 1)$ et $f_3 = (1, 1, 0)$ de $\mathbb{R}^3$. Montrons que $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_3) = \mathbb{R}^3$.

Soit $x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et cherchons $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3$.

On a $(a, b, c) = \alpha(0, 1, 1) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(1, 1, 0)$

$$\iff \begin{cases} \beta + \gamma = a \\ \alpha + \gamma = b \\ \alpha + \beta = c \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = a - \beta \\ \alpha = b - \gamma = b - (a - \beta) \\ (b - a + \beta) + \beta = c \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = \frac{1}{2}(a - b + c) \\ \alpha = b - a + \beta = \frac{1}{2}(-a + b + c) \\ \gamma = a - \beta = \frac{1}{2}(a + b - c) \end{cases}$$

et $x = \frac{1}{2}(-a+b+c)f_1 + \frac{1}{2}(a-b+c)f_2 + \frac{1}{2}(a+b-c)f_3$.

La famille $\mathcal{F}_3$ est donc génératrice de $\mathbb{R}^3$.

◦ L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions du système (S) précédent est le s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ suivant :

$\mathscr{S} = \{(-2t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(-2, 1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\left((-2, 1, 1)\right)$.

◦ Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$

Nous savons que $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ et $\mathrm{Vect}\left(c_1(1, 0), c_2(0, 1)\right) = \mathbb{R}^2$ sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^2$. Montrons que les droites de $\mathbb{R}^2$ passant par l'origine sont exactement les s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ engendrés par un unique vecteur non nul (qui portera exceptionnellement une flèche par habitude ou nostalgie) :

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\mathscr{D}_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\} = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}(-b, a)\right)$.

En effet, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

· $M(x, y) \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}(-b, a)\right) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ (x, y) = \lambda \overrightarrow{u} = \lambda(-b, a) = (-\lambda b, \lambda a)$
$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ x = -\lambda b$ et $y = \lambda a \implies ax + by = a(-\lambda b) + b(\lambda a) = 0 \iff M(x, y) \in \mathscr{D}_{a,b}$.

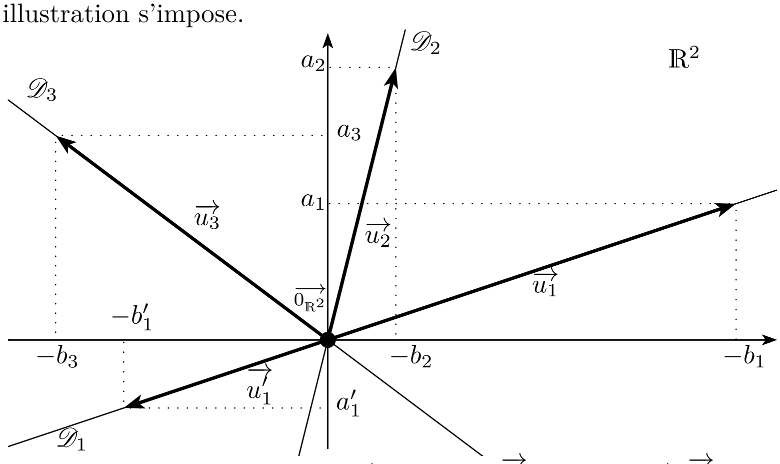
· Si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et

$M(x, y) \in \mathscr{D}_{a,0} \iff ax = 0 \iff x = 0 \implies M = (0, y) \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}(0, a)\right)$.

Si $b \neq 0$, alors $M(x, y) \in \mathscr{D}_{a,b} \iff ax + by = 0 \iff y = -\frac{a}{b}x$

$\implies M\left(x, -\frac{a}{b}x\right) = -\frac{1}{b}x.(-b, a) = -\frac{1}{b}x.\overrightarrow{u} \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}(-b, a)\right)$.

La suite de ce cours nous permettra d'affirmer que tout s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ peut être engendré par zéro, un ou deux vecteurs et qu'il est donc de l'une des trois formes $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $\mathscr{D}_{a,b} = \mathrm{Vect}\left((-b, a)\right)$ ou $\mathbb{R}^2$. Une illustration s'impose.



On a $\{0_{\mathbb{R}^2}\} = \mathrm{Vect}\left(0_{\mathbb{R}^2}\right)$, $\mathscr{D}_1 = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u'_1}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u'_1})$, $\mathscr{D}_2 = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_2})$, $\mathscr{D}_3 = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_3})$ et $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}) = \mathbb{R}^2$.

Propriété 2.6 *Soit* $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p)$ *un sous-espace vectoriel engendré par* p *vecteurs de* $\mathbb{R}^n$.
- $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p)$ *ne dépend pas de l'ordre des vecteurs* e_1,..,e_p :
  $\forall (i, j) \in [\![1 ; p]\!]^2, \quad \mathrm{Vect}(e_1, .., e_i, ..., e_j, ..., e_p) = \mathrm{Vect}(e_1, .., e_j, ..., e_i, ..., e_p).$
- *Pour tous réels* α_2,...,α_p, $\quad \mathrm{Vect}\left(e_1 + \sum\limits_{i=2}^{p} \alpha_i e_i\ ,\ e_2, ..., e_p\right) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, ..., e_p).$
- *Si* e_{p+1} *est combinaison linéaire des vecteurs* e_1,...,e_p, *alors*
  $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p, e_{p+1}) = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p).$

En particulier, $\quad \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p, 0_{\mathbb{R}^n}) = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p).$
- *Si* β_1,...,β_p *sont des réels tous non nuls, alors* $\quad \mathrm{Vect}(\beta_1 e_1, ..., \beta_p e_p) = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p).$

Autrement dit, on ne change pas le sous-espace vectoriel engendré lorsque l'on échange deux vecteurs, lorsque l'on ajoute à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres, lorsque l'on ajoute un vecteur qui est combinaison linéaire des autres et lorsque l'on multiplie les vecteurs par des scalaires non nuls. Ces opérations sont les analogues des opérations élémentaires que l'on a décrites pour les systèmes linéaires et pour les matrices.

Démonstration : • Puisque l'addition de $\mathbb{R}^n$ est commutative,
$\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_i e_i + ... + \lambda_j e_j + ... + \lambda_p e_p = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_j e_j + ... + \lambda_i e_i + ... + \lambda_p e_p.$

• Soit x une combinaison linéaire de $\left(e_1 + \sum\limits_{i=2}^{p} \alpha_i e_i\ ,\ e_2, ..., e_p\right)$.

On a $\quad x = \lambda_1 \left(e_1 + \sum\limits_{i=2}^{p} \alpha_i e_i\right) + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_p e_p = \lambda_1 e_1 + \sum\limits_{i=2}^{p} \lambda_1 \alpha_i e_i + \sum\limits_{i=2}^{p} \lambda_i e_i$

et $\quad x = \lambda_1 e_1 + \sum\limits_{i=2}^{p} (\lambda_1 \alpha_i + \lambda_i) e_i \in \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p).$

Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p)$.

On a $\quad x = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = \lambda_1 e_1 + \sum\limits_{i=2}^{p} \lambda_i e_i = \lambda_1 e_1 + \lambda_1 \sum\limits_{i=2}^{p} \alpha_i e_i - \sum\limits_{i=2}^{p} \lambda_1 \alpha_i e_i + \sum\limits_{i=2}^{p} \lambda_i e_i$

et $\quad x = \lambda_1 \left(e_1 + \sum\limits_{i=2}^{p} \alpha_i e_i\right) + \sum\limits_{i=2}^{p} (\lambda_i - \lambda_1 \alpha_i) e_i \in \mathrm{Vect}\left(e_1 + \sum\limits_{i=2}^{p} \alpha_i e_i\ ,\ e_2, ..., e_p\right).$

• Soit $\quad e_{p+1} = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \quad$ une combinaison linéaire des vecteurs e_1,..., e_p et soit $x \in \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p, e_{p+1})$. $\quad$ On a $\quad x = \sum\limits_{i=1}^{p+1} \mu_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{p} \mu_i e_i + \mu_{p+1} e_{p+1} = \sum\limits_{i=1}^{p} \mu_i e_i + \mu_{p+1} \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$

et $\quad x = \sum\limits_{i=1}^{p} (\mu_i + \mu_{p+1} \lambda_i) e_i \quad$ est combinaison linéaire des vecteurs e_1,..., e_p : $\quad x \in \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p)$.

Réciproquement, si $x \in \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p)$, alors $x \in \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p, e_{p+1})$ en posant $\mu_{p+1} = 0$.

• Soit $\quad x \in \mathrm{Vect}(\beta_1 e_1, ..., \beta_p e_p)$. $\quad$ On a $\quad x = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i (\beta_i e_i) = \sum\limits_{i=1}^{p} (\lambda_i \beta_i) e_i \in \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p).$

Réciproquement, soit $\quad x \in \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p)$.

On a $\quad x = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \overset{\beta_i \neq 0}{=} \sum\limits_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{\beta_i} \beta_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{p} \mu_i (\beta_i e_i) \in \mathrm{Vect}(\beta_1 e_1, ..., \beta_p e_p).$ $\square$

Exemples : ◦ Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On a $\quad \mathscr{D}_{a,b} = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}\,(-b, a)\right) = \mathrm{Vect}\left((-2\overrightarrow{u})\,(2b, -2a)\right) = \mathrm{Vect}\left(0_{\mathbb{R}^2}, (-2\overrightarrow{u}), \overrightarrow{u}\right).$

◦ Soient $\quad u_1 = (2, 1, 0), \quad u_2 = (0, 2, 1) \quad$ et $\quad u_3 = (2, 3, 1) \quad$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Puisque $\quad u_3 = u_1 + u_2, \quad$ on a $\quad \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2).$

2.3 Méthode

En général, pour montrer qu'un sous-ensemble d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel :

- soit on utilise la caractérisation abstraite : il est non vide et stable par combinaisons linéaires,
- soit on montre qu'il est égal à un sous-espace vectoriel engendré par un certaine famille : $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p)$.

3 Bases et familles libres

3.1 Bases d'un sous-espace vectoriel

Définition 2.5 *Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.*
Une famille $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_d)$ de vecteurs de E est une base de E si pour tout vecteur x de E, il existe un unique d-uplet $(x_1, ..., x_d)$ de réels tels que $x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$.
On dit que les réels x_1,..., x_d sont les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.

Autrement dit, une base d'un s.e.v. est une famille génératrice de ce s.e.v. dans laquelle la décomposition de tout vecteur est unique.

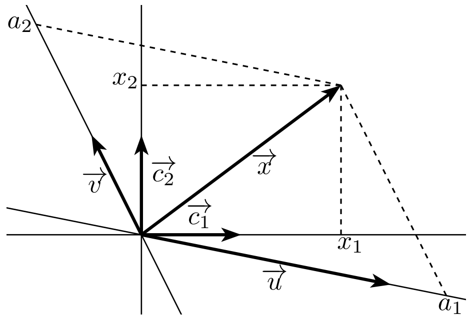
Exemples : ◦ La base canonique de $\mathbb{R}^n$ définie en page 32 est une base de $\mathbb{R}^n$.
◦ On a vu en page 35 que la famille $\mathcal{F}_3 = (f_1, f_2, f_3)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$. De plus, lors du calcul, les coefficients α, β et γ sont apparus nécessairement uniques, entièrement déterminés par les coordonnées de x dans la base canonique. La décomposition de x dans $\mathcal{F}_3$ est donc unique et $\mathcal{F}_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Nous admettrons les résultats suivants.

Théorème 2.7 *Si un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$ admet une base constituée de d vecteurs, alors toute autre base de cet espace E est également constituée de d vecteurs.*
L'entier naturel d est alors appelé dimension du sous-espace E et l'on note $d = \dim(E)$.

Autrement dit, toutes les bases d'un même s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ ont le même cardinal, le même nombre d'éléments.

Exemples : ◦ Puisque $\mathbb{R}^n = \mathrm{Vect}(c_1, ..., c_n)$, $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
◦ Puisque $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ est engendré par la famille vide, $\dim(\{0_{\mathbb{R}^n}\}) = 0$.
◦ On a vu que la famille $\mathcal{F}_3$ définie en page 35 est une base de $\mathbb{R}^3$ et l'on a bien $\mathrm{Card}(\mathcal{F}_3) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.
◦ Soient $u_1 = (2, 1, 0)$, $u_2 = (0, 2, 1)$ et $u_3 = (2, 3, 1)$ les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ précédents. Pour $v = (2, -1, -1)$, on peut écrire $v = 1(2, 1, 0) - 1(0, 2, 1) = 1u_1 - 1u_2$ et $v = 1(2, 3, 1) - 2(0, 2, 1) = 1u_3 - 2u_2$ donc la décomposition de v dans la famille (u_1, u_2, u_3) n'est pas unique et (u_1, u_2, u_3) n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$, ni même de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.
On le savait déjà car $u_3 = u_1 + u_2 = 1u_1 + 1u_2 + 0u_3 = 0u_1 + 0u_2 + 1u_3$.
◦ Dans la figure de $\mathbb{R}^2$ suivante, on a les décompositions $x = x_1 c_1 + x_2 c_2$ dans la base canonique (c_1, c_2) et $x = a_1 \overrightarrow{u} + a_2 \overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.



Théorème 2.8 *Si un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est de dimension d, alors toute famille génératrice de ce sous-espace contient au moins d vecteurs.*
Autrement dit, tout s.e.v. engendré par p vecteurs est de dimension inférieure ou égale à p.

Remarques : • Ainsi, toute base d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ est une famille génératrice minimale, au sens du plus petit cardinal possible.

• Toute famille contenant strictement moins de vecteurs que la dimension de l'espace auquel elle appartient n'est donc pas génératrice.

Exemple : La famille constituée des deux vecteurs $e_1 = (3\,,\,1\,,\,-1)$ et $e_2 = (-1\,,\,3\,,\,1)$ de $\mathbb{R}^3$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.

3.2 Familles libres

Définition 2.6 *On dit qu'une famille $\mathcal{F} = (e_1, ..., e_q)$ de q vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est libre si toute combinaison linéaire nulle de e_1,...,e_q ne peut s'écrire qu'avec des scalaires nuls :*

$$\mathcal{F} = (e_1, ..., e_q) \text{ est libre si, et seulement si, } \sum_{i=1}^{q} \lambda_i e_i = 0_{\mathbb{R}^n} \Longrightarrow \forall i \in [\![1\,;q]\!],\ \ \lambda_i = 0.$$

Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

On remarquera que si les λ_i sont tous nuls, alors la combinaison linéaire triviale $\sum_{i=1}^{q} 0e_i$ l'est aussi mais ce n'est pas le sens de cette définition : la décomposition du vecteur nul doit être unique. Ainsi, une famille est libre si toute combinaison linéaire nulle est la combinaison linéaire triviale.

Par ailleurs et par convention, la famille vide est libre.

Exemples : ◦ La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une famille libre : supposons que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i = 0_{\mathbb{R}^n}$.
On a alors $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = (0, 0, ..., 0)$ et $\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \lambda_i = 0$.

◦ Soit $\mathcal{F}_3 = (f_1, f_2, f_3)$ la famille des vecteurs $f_1 = (0\,,\,1\,,\,1)$, $f_2 = (1\,,\,0\,,\,1)$ et $f_3 = (1\,,\,1\,,\,0)$ de $\mathbb{R}^3$ introduits en page 35 et soit une combinaison linéaire nulle de ces trois vecteurs :

$\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a alors $\alpha\,(0\,,\,1\,,\,1) + \beta\,(1\,,\,0\,,\,1) + \gamma\,(1\,,\,1\,,\,0) = (0\,,\,0\,,\,0)$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \beta+\gamma & = & 0 \\ \alpha+\gamma & = & 0 \\ \alpha+\beta & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \beta & = & -\gamma \\ \gamma & = & -\alpha \\ \beta & = & -\alpha \end{array}\right. \Longleftrightarrow \beta = -\gamma = -\alpha = \alpha \Longleftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

et la famille $\mathcal{F}_3$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.
Sinon, avec l'étude p.37, on sait que $\mathcal{F}_3$ est une base, donc la décomposition dans $\mathcal{F}_3$ est unique. Il vient alors $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Longleftrightarrow \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0f_1 + 0f_2 + 0f_3 \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$.

Remarque : Par définition, la décomposition dans une base de tout vecteur est unique donc en particulier, celle du vecteur nul : toute base est une famille libre.

Propriété 2.9
Toute combinaison linéaire de vecteurs d'une famille libre s'écrit de manière unique.
Si $\mathcal{F} = (e_1, ..., e_q)$ *est une famille libre, alors* $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{q} \mu_i e_i \Longrightarrow \forall i \in [\![1\,; q]\!],\ \ \lambda_i = \mu_i.$
Si $\mathcal{F} = (e_1, ..., e_q)$ *est une famille libre, alors* $(e_1, ..., e_q)$ *est une base de* $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_q)$.

Démonstration : On a $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i e_i - \sum_{i=1}^{q} \mu_i e_i = \sum_{i=1}^{q} (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0_{\mathbb{R}^n}$ et la famille étant libre, $\lambda_i - \mu_i = 0$. Toute décomposition dans la famille $\mathcal{F}$ est donc unique. Puisqu'elle est trivialement génératrice de $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_q)$, c'en est par définition une base. □

Exemple : Soit $A = \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a + 3b - c = 0 \} = \mathrm{Vect}\big(a_1 = (1, 0, 2), a_2 = (0, 1, 3)\big)$.
Supposons que $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$. Alors, $(\lambda_1, \lambda_2, 2\lambda_1 + 3\lambda_2) = (0, 0, 0) : \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
La famille (a_1, a_2) est donc libre. C'est ainsi une base de A et $\dim(A) = 2$ (un plan de l'espace).

Ainsi, l'unicité de la décomposition du vecteur nul dans une famille impose l'unicité de la décomposition de tout vecteur dans cette famille, la réciproque étant triviale.

Théorème 2.10 *Soit* $\mathcal{B}$ *une famille d'un sous-espace vectoriel* E *de* $\mathbb{R}^n$.
$\mathcal{B}$ *est une base de* E *si, et seulement si,* $\mathcal{B}$ *est une famille libre et génératrice de* E.

Démonstration : Par définition, une base est une famille génératrice. On a vu que si une famille est une base, alors elle est libre. La propriété précédente implique que si elle est libre, alors la décomposition de tout vecteur dans cette famille est unique et c'est donc une base. □

Voici des cas particuliers de familles libres bien utiles.

Propriété 2.11 *Soit* $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$.
- *Toute famille contenant* $0_{\mathbb{R}^n}$ *est liée.*
- *La famille* (x) *est libre si, et seulement si,* $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. $\mathrm{Vect}(x)$ *est alors appelé droite vectorielle.*
- *La famille* (x, y) *est libre si, et seulement si,* x *et* y *ne sont pas colinéaires, c.-à-d. proportionnels.*

En revanche, lorsque la famille comporte au moins trois vecteurs, il faudra souvent revenir à la définition pour démontrer qu'elle est libre.

Démonstration : · On a $0e_1 + 0e_2 + ... + 0e_q + 1.0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n}$: combinaison linéaire non triviale et nulle. La famille $(e_1, ..., e_q, 0_{\mathbb{R}^n})$ est liée.
· La propriété 2.2 en page 32 donne directement le résultat : $\lambda.x = 0_{\mathbb{R}^n} \iff \lambda = 0$ ou $x = 0_{\mathbb{R}^n}$.
· Si l'un des vecteurs x ou y est nul, alors la famille (x, y) est liée.
Supposons que x et y non nuls sont proportionnels : $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*,\ y = \lambda x$.
On a $(-\lambda)x + 1y = -\lambda x + \lambda x = 0_{\mathbb{R}^n}$: combinaison linéaire non triviale et nulle, (x, y) est liée.
Réciproquement, supposons que la famille (x, y) est liée.
Il existe donc $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\lambda x + \mu y = 0_{\mathbb{R}^n}$.
Si $\lambda \neq 0$, on a alors $x = -\frac{\mu}{\lambda} y$: les vecteurs x et y sont colinéaires.
Sinon, $\mu \neq 0$ et $y = -\frac{\lambda}{\mu} x$: les vecteurs x et y sont colinéaires. □

Exemple : Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, le vecteur $\vec{u}\,(-b, a)$ constitue une famille libre et génératrice et donc une base de la droite $\mathscr{D}_{a,b}$ d'équation cartésienne $ax + by = 0$.

Propriété 2.12 *Soit $\mathcal{F} = (e_1, e_2, ..., e_q)$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$.*
- *La famille $\mathcal{F}' = (e_1, e_2, ..., e_{q-1})$ est libre.*
- *Si $f \notin \text{Vect}(\mathcal{F})$, la famille $(e_1, e_2, ..., e_q, f)$ est libre.*
- *Si α_1,...,α_q sont des réels tous non nuls, alors la famille $(\alpha_1 e_1, ..., \alpha_q e_q)$ est libre.*

Autrement dit, si l'on retire un vecteur à une famille libre ou si l'on ajoute un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire de vecteurs de la famille ou si l'on multiplie ses vecteurs par des scalaires non nuls, alors on obtient une famille qui est encore libre.

Démonstration : · Si $q = 1$, alors la famille $\mathcal{F}'$ est vide et donc libre, par convention.
Soit $q \geqslant 2$. Supposons que $\sum\limits_{i=1}^{q-1} \lambda_i e_i = 0_{\mathbb{R}^n}$. On a alors $\sum\limits_{i=1}^{q-1} \lambda_i e_i + 0.e_q = 0_{\mathbb{R}^n}$ et puisque $\mathcal{F}$ est libre, $\forall i \in [\![1 \,; q-1]\!]$, $\lambda_i = 0$: $\mathcal{F}' = (e_1, e_2, ..., e_{q-1})$ est libre.
· Soit $f \notin \text{Vect}(\mathcal{F})$. Supposons que $\sum\limits_{i=1}^{q} \lambda_i e_i + \mu f = 0_{\mathbb{R}^n}$.
Si $\mu \neq 0$, alors $f = -\frac{1}{\mu} \sum\limits_{i=1}^{q} \lambda_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{q} (-\frac{\lambda_i}{\mu}) e_i$ est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$ ce qui contredit l'hypothèse.
Ainsi, $\mu = 0$. Alors, $\sum\limits_{i=1}^{q} \lambda_i e_i = 0_{\mathbb{R}^n}$ et puisque $\mathcal{F}$ est libre, $\forall i \in [\![1 \,; q]\!]$, $\lambda_i = 0$: $(e_1, e_2, ..., e_q, f)$ est libre.
· $\sum\limits_{i=1}^{q} \lambda_i(\alpha_i e_i) = 0_{\mathbb{R}^n} \Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{q} (\lambda_i \alpha_i) e_i = 0_{\mathbb{R}^n} \overset{\mathcal{F}\,lib.}{\Longrightarrow} \forall i,\ \lambda_i \alpha_i = 0 \overset{\alpha_i \neq 0}{\Longrightarrow} \forall i,\ \lambda_i = 0$: $(\alpha_1 e_1, ..., \alpha_q e_q)$ est libre. □

Voici un critère de non liberté.

Propriété 2.13 *Une famille de cardinal $q \geqslant 2$ est liée si, et seulement si, au moins l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.*

Démonstration : Soit $\mathcal{F} = (e_1, ..., e_q)$ une famille de vecteurs.
Supposons que e_1 soit combinaison linéaire de e_2,...,e_q. On a $e_1 = \sum\limits_{i=2}^{q} \lambda_i e_i$ donc $1.e_1 - \sum\limits_{i=2}^{q} \lambda_i e_i = 0_{\mathbb{R}^n}$ est une combinaison linéaire non triviale et nulle : la famille $\mathcal{F}$ est liée.
Réciproquement, supposons que la famille $\mathcal{F}$ est liée. Il existe donc une combinaison linéaire non triviale et nulle des vecteurs de $\mathcal{F}$: $\sum\limits_{i=1}^{q} \lambda_i e_i = 0_{\mathbb{R}^n}$ où au moins l'un des λ_i est non nul, disons $\lambda_1 \neq 0$. On a alors $\lambda_1 e_1 + \sum\limits_{i=2}^{q} \lambda_i e_i = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $e_1 = -\frac{1}{\lambda_1} \sum\limits_{i=2}^{q} \lambda_i e_i = \sum\limits_{i=2}^{q} -\frac{\lambda_i}{\lambda_1} e_i$, combinaison linéaire des autres. □

Exemple : Soient les vecteurs $v_1 = (\,1\,, 0\,, -1\,)$, $v_2 = (\,-1\,, 2\,, 1\,)$ et $v_3 = (\,3\,, -4\,, -3\,)$ de $\mathbb{R}^3$ et soit une combinaison linéaire nulle de ces trois vecteurs : $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.
On a alors $\alpha\,(\,1\,, 0\,, -1\,) + \beta\,(\,-1\,, 2\,, 1\,) + \gamma\,(\,3\,, -4\,, -3\,) = (\,0\,, 0\,, 0\,)$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha - \beta + 3\gamma & = & 0 \\ 2\beta - 4\gamma & = & 0 \\ -\alpha + \beta - 3\gamma & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \ \dots \ \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & -\gamma \\ \beta & = & 2\gamma \end{array} \right. \quad \text{qui n'est pas de Cramer.}$$

Pour $\gamma = 1$, on obtient $-v_1 + 2v_2 + v_3 = 0 \Longleftrightarrow v_1 = 2v_2 + v_3$: la famille $(\,v_1\,, v_2\,, v_3\,)$ est liée.

Le résultat suivant est admis.

Théorème 2.14 *Si un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est de dimension d, alors toute famille libre de ce sous-espace contient au plus d vecteurs.*

Remarques : • Ainsi, toute base d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ est une famille libre maximale, au sens du plus grand cardinal possible.

• Toute famille contenant strictement plus de vecteurs que la dimension de l'espace auquel elle appartient est donc liée.

Exemple : La famille constituée des trois vecteurs $e = (1\,,\,2)$, $f = (1\,,\,3)$ et $g = (2\,,\,5)$ de $\mathbb{R}^2$ n'est pas libre. En effet, $1e + 1f + (-1)g = 0_{\mathbb{R}^2}$.

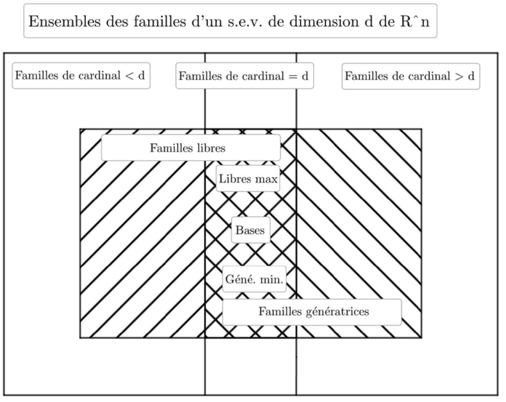
Nous avons déjà démontré la premier point du théorème suivant. Les autres sont admis.

Théorème 2.15 *Soit E un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ de dimension d.*
- *Une famille de E est une base de E si, et seulement si, elle est libre et génératrice de E.*
- *Toute famille libre de E contenant d vecteurs est une base de E (libre maximale).*
- *Toute famille génératrice de E contenant d vecteurs est une base de E (génératrice minimale).*
- *Si $\mathcal{F}_d$ est une famille de E de cardinal d, on a $\mathcal{F}_d$ libre $\iff$ $\mathcal{F}_d$ génératrice $\iff$ $\mathcal{F}_d$ base.*

Remarques : • On se souviendra de $\mathrm{Card}(libre) \leqslant \mathrm{Card}(base) \leqslant \mathrm{Card}(génératrice)$ avec égalité si, et seulement si, c'est une base.

• Attention, si $q < d < p$, toute famille de cardinal p d'un s.e.v. de dimension d n'en est pas nécessairement génératrice et toute famille de cardinal q d'un s.e.v. de dimension d n'est pas nécessairement libre.
Par exemple, si $e \in \mathbb{R}^3$ non nul, $(e, 2e, 3e, 4e)$ est de cardinal $4 > 3$ et n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$, et $(e, 2e)$ est de cardinal $2 < 3$ et n'est pas libre dans $\mathbb{R}^3$.

Ci-contre, un diagramme de Venn résumant bien la situation.



Exemple : Soit $\mathcal{F}_3 = (f_1, f_2, f_3)$ la famille des vecteurs $f_1 = (0\,,\,1\,,\,1)$, $f_2 = (1\,,\,0\,,\,1)$ et $f_3 = (1\,,\,1\,,\,0)$ de $\mathbb{R}^3$ introduits en page 35. Avec ce que l'on a vu précédemment, on a
- $\mathrm{Card}(\mathcal{F}_3) = 3$ et $\mathcal{F}_3$ libre donc $\mathcal{F}_3$ libre maximale dans $\mathbb{R}^3$: c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
- $\mathrm{Card}(\mathcal{F}_3) = 3$ et $\mathcal{F}_3$ génératrice donc $\mathcal{F}_3$ génératrice minimale dans $\mathbb{R}^3$: c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
- $\mathcal{F}_3$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$ donc $\mathcal{F}_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- $\mathcal{F}_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$ donc $\mathrm{Card}(\mathcal{F}_3) = 3$ et $\mathcal{F}_3$ libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Le théorème suivant est constitué de divers résultats très utiles, intuitifs et rassurants mais loin d'être évidents. Nous l'admettrons.

Théorème 2.16
- *Tout s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ admet une base.*
- *Si E est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ de dimension d, alors $d \leqslant n$.*
- *Soient E et F des s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.*
  - *Si $\mathcal{F}$ est une base de F de cardinal p, alors $F \subset E \iff \mathcal{F} \subset E^p$, i.e. $\forall f \in \mathcal{F},\ f \in E$.*
  - *Si $F \subset E$ et $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.*

Exemple : Soient $F = \text{Vect}\big(w_1 = (\,3\,,\,1\,,\,0\,)\,, w_2 = (\,-2\,,\,0\,,\,1\,)\big)$
et $E = \{(\,x\,,\,y\,,\,z\,) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + 2z = 0\}$ des s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. Montrons que $F = E$.

· La famille $\mathcal{F} = (w_1, w_2)$ est libre car w_1 et w_2 ne sont pas proportionnels. Génératrice de F, $\mathcal{F}$ est donc une base de F et $\dim(F) = 2$.

· On a $1 \times 3 - 3 \times 1 + 2 \times 0 = 0$ donc $w_1 \in E$ et $1 \times (-2) - 3 \times 0 + 2 \times 1 = 0$ donc $w_2 \in E$. Puisque $\mathcal{F} \subset E^2$, les s.e.v. le sont aussi : $\text{Vect}(\mathcal{F}) = F \subset E$.

· Puisque $1 \times 1 - 3 \times 0 + 2 \times 0 = 1 \neq 0$, $(\,1\,,\,0\,,\,0\,) \notin E$ et $E \neq \mathbb{R}^3$.

· On a alors $2 = \dim(F) \leqslant \dim(E) < 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Donc $\dim(E) = \dim(F) = 2$ et $F = E$.

4 Rang d'une famille de vecteurs

Cette notion sera essentielle dans le prochain chapitre d'algèbre linéaire.

Définition 2.7 *On appelle rang* (rg) *d'une famille* $(e_1, ..., e_p)$ *de* p *vecteurs de* $\mathbb{R}^n$*, la dimension du sous-espace engendré par cette famille :* $\text{rg}(e_1, ..., e_p) = \dim\big(\text{Vect}(e_1, ..., e_p)\big)$.
C'est donc le cardinal des plus grandes familles libres contenues dans $(e_1, ..., e_p)$ *et celui des plus petites familles génératrices de* $\text{Vect}(e_1, ..., e_p)$ *contenues dans* $(e_1, ..., e_p)$.

Propriété 2.17 *Toute famille libre de* p *vecteurs est de rang* p.

Démonstration : En effet, si $(e_1, ..., e_p)$ est une famille libre, alors on sait qu'elle forme une base de $\text{Vect}(e_1, ..., e_p)$, l'espace vectoriel qu'elle engendre. □

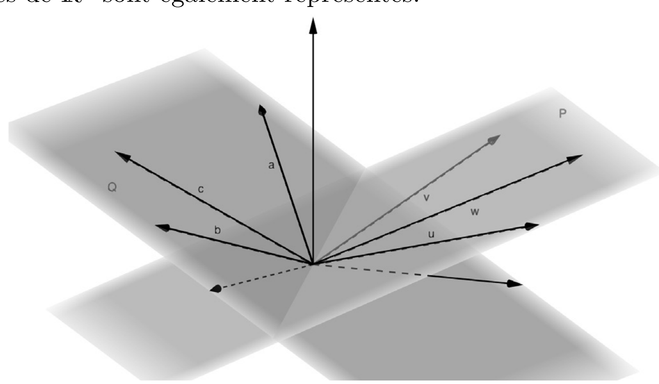
Les résultats sur les dimensions précédents mènent à l'inégalité suivante.

Propriété 2.18 *Si* $(e_1, ..., e_p) \in (\mathbb{R}^n)^p$*, alors* $\text{rg}(e_1, ..., e_p) \leqslant \min(\,n\,,\,p\,)$.

Démonstration : En effet, $\text{Card}(e_1, ..., e_p) = p$ donc $\dim\big(\text{Vect}(e_1, ..., e_p)\big) \leqslant p$
et $e_1, ..., e_p \in \mathbb{R}^n$ donc $\text{Vect}(e_1, ..., e_p) \subset \mathbb{R}^n$ et $\dim\big(\text{Vect}(e_1, ..., e_p)\big) \leqslant n$. □

Exemple : Une figure bilan
Les plans sécants $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ contiennent les vecteurs u, v, w et a, b, c respectivement, ces vecteurs n'étant pas deux à deux colinéaires. Les axes de $\mathbb{R}^3$ sont également représentés.

On a $\text{Vect}(a, b, c) = \mathcal{Q}$, $\text{Vect}(a, b) = \mathcal{Q}$,
$\text{Vect}(3a) = \text{Vect}(a)$,
$\text{Vect}(-b, 2c + 4b, 3a) = \mathcal{Q}$, $\text{Vect}(v, w) = \mathcal{P}$,
$\text{Vect}(u, 2v, 3w - u) = \mathcal{P}$,
$\text{Vect}(a, c, u) = \mathbb{R}^3$,
$\text{Vect}(b, -4c, 2v, 3w) = \mathbb{R}^3$, $\text{rg}(a) = 1$,
$\text{rg}(-4w) = 1$, $\text{rg}(0_{\mathbb{R}^3}, u, 3u) = 1$,
$\text{rg}(b, c) = 2$, $\text{rg}(u, 2v) = 2$,
$\text{rg}(a, b, c) = 2$, $\text{rg}(u, v, w, 3u) = 2$,
$\text{rg}(b, w) = 2$, $\text{rg}(b, c, v) = 3$
et $\text{rg}(u, v, -4b, c + 2a) = 3$.



L'ESPACE VECTORIEL $\mathbb{R}^n$

Sauf mention contraire, n est un entier naturel non nul.

Exercice 2.1 *(N1)* à *(N2)* Soient les vecteurs $a = (2, -2, -1)$, $b = (1, 1, 2)$, $c = (-1, 1, 1)$, $d = (-4, 4, 2)$, $e = (-2, 0, -1)$, $f = (3, -1, 1)$, $g = (5, -1, 2)$, $h = (3, -7, -6)$, $i = (3, 1)$, $j = (5, -2)$ et $k = (-3, 10)$ de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer $p = 5i - 3j + 2k$, $q = 4i - j + k - 2p$, $r = 2a - 4b - 3c$ et $s = 2b - 5k$.
2. Les vecteurs suivants sont-ils combinaison linéaire des familles stipulées ?

   (1) Vecteur k, famille (i, j).
   (2) Vecteur j, famille (i, k).
   (3) Vecteur i, famille (i, j).
   (4) Vecteur g, famille (a, b, c).
   (5) Vecteur h, famille (a, b, c).
   (6) Vecteur a, famille (i, j).
   (7) Vecteur k, famille (a, b, j).
   (8) Vecteur c, famille (a, b).
   (9) Vecteur d, famille (b, c).
   (10) Vecteur d, famille (a, b).
   (11) Vecteur e, famille (a, b).
   (12) Vecteur e, famille (a, b, c).
   (13) Vecteur a, famille (b, c, e).
   (14) Vecteur f, famille (a, b, c).
   (15) Vecteur a, famille (b, f).
   (16) Vecteur c, famille (a, b, f).
   (17) Vecteur q, famille (i, j).
   (18) Vecteur b, famille (c, d, h).
   (19) Vecteur c, famille (b, f, h).
   (20) Vecteur r, famille (f, g, h).
   (21) Vecteur $e + b - c$, famille (a).

3. On désigne par $\mathscr{P}$ et $\mathscr{E}$ le plan et l'espace géométriques associés à $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ et l'on appelle A,..., H, R et I, J, K, P, Q les points de l'espace $\mathscr{E}$ ou du plan $\mathscr{P}$ correspondants aux vecteurs précédents. Interpréter les résultats précédents en termes de géométrie classique.
4. Écrire chacun des vecteurs i, p et q comme deux combinaisons linéaires différentes de (i, j, k).
5. (a) Montrer que tout vecteur $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de la famille (i, j) puis interpréter ce résultat. Cette décomposition est-elle unique ?

   (b) Montrer que tout vecteur $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de la famille (a, b, c) puis interpréter ce résultat. Cette décomposition est-elle unique ?

Exercice 2.2 *(N1)* à *(N2)* On définit les ensemble suivants.

$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 - 4x_2 = 0\}$.
$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\}$.
$C = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u + 2v - 4w + 5 = 0\}$.
$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$.
$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}$.
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = x + y + z = 0\}$.

$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2+y^2) = 0\}$.

$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \geqslant 0\}$.

$I = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\}$.

$J = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a-5b+c = 0 \text{ et } b = -c\}$.

$K = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}_+^3 \mid a = 2b\}$.

$L = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0 \text{ et } x-2y-z+3t = 0\}$.

$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+\alpha = 0 \text{ et } x+3\alpha z = 0\}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

$N = \{(a,b,b,a) \in \mathbb{R}^4 \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

$O = \{(\lambda, \mu, \lambda+\mu) \in \mathbb{R}^3 \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y = 0 \text{ et } 2x = -3z \text{ et } 4y-z = 0\}$.

$Q = \{(a+c, b-3c, 2b-a) \in \mathbb{R}^3 \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

$R = \{(r,r,...,r) \in \mathbb{R}^n\}$.

$S = \{(x_1,x_2,...,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1-x_2 = 0\}$, $n \geqslant 2$.

$T = \{(x_1,x_2,...,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1+2x_2 = 0 \text{ et } x_2+3x_3 = 0\}$, $n \geqslant 3$.

$U = \{(x_1,x_2,...,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1-3x_2 = 0 \text{ ou } 2x_2+x_3 = 0\}$, $n \geqslant 3$.

$V = \{(x_1,x_2,...,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$.

$W = \{(x_1,x_2,...,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \neq 0\}$.

$X = \{(x_1,x_2,...,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 1\}$.

$Y = \{(x_1,x_2,...,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geqslant 0\}$.

$Z = \{(x_1,x_2,...,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1+x_2+...+x_n = 0\}$.

1. Pour chacun de ces ensembles, déterminer si possible un vecteur lui appartenant et un vecteur ne lui appartenant pas, vecteurs non nuls de préférence.
2. Parmi ces ensembles, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?
3. Le cas échéant, en déterminer une famille génératrice puis la dimension.

Exercice 2.3 *(N2)* Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E \iff F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 2.4 *(N1)* VouF ? On se place dans $\mathbb{R}^4$.

1. Si $w \in \mathrm{Vect}(u,v)$, alors $\mathrm{Vect}(u,v,w) = \mathrm{Vect}(u,v)$.
2. $\mathrm{Vect}(u,v) = \mathrm{Vect}(u,u+v)$.
3. Si u et v sont non nuls, alors $3u+4v$ est non nul.
4. $\mathbb{R}^3$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2.5 *(N1)* Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $e_1 = (1, -1, 2)$ et $e_2 = (1, 1, -1)$.

1. Montrer que les vecteurs $x = (3, 1, 0)$, $y = (1, 5, -7)$, $z = (-1, -3, 4)$ et $t = (10, -2, 8)$ sont combinaisons linéaires des vecteurs e_1 et e_2.
2. Déterminer un vecteur $e_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille $\mathcal{F} = (e_1, e_2, e_3)$ soit libre. Que dire alors de $\mathcal{F}$?

Exercice 2.6 *(N1)* Soient $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, 1, 1)$, $w = (1, 2, 1)$ et $t = (1, 1, 2)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille (u, v, w, t) est génératrice de $\mathbb{R}^3$. Est-elle libre ?

Exercice 2.7 *(N1)* Soient $e_1 = (-1, 2, 0)$, $e_2 = (3, -5, -1)$, $e_3 = (0, 1, -2)$ et $e_4 = (1, -1, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Justifier que l'un des vecteurs est combinaison linéaire des trois autres puis décomposer e_4.
2. La famille $\mathcal{F} = (e_1, e_2, e_3)$ est-elle libre ? Qu'en déduire pour $\mathcal{F}$?

Exercice 2.8 *(N1)* Soient les vecteurs $e = (1, 0, 2, 3)$, $f = (0, 1, 2, 3)$, $g = (1, 2, 0, 3)$ et $h = (0, 1, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^4$. Déterminer $\mathrm{Vect}(e, f, g, h)$.

Exercice 2.9 *(N2)* On considère $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y = 0 \text{ et } y - 2z = 0\}$ et $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z = y + t\}$.

1. Montrer que V et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une base de V, une base et W et une base de $V \cap W$.

Exercice 2.10 *(N1)* Décrire tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.11 *(N1)* Soient $a = (1, 1, 1)$, $b = (1, 2, 0)$ et $c = (1, 1, 0)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille (a, b, c) est libre dans $\mathbb{R}^3$. Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2.12 *(N2)* Soient $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (-1, 2, 1)$ et $u_3 = (3, -4, -3)$ trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$.
2. Qu'en déduire pour $\mathcal{F}$?
3. Déterminer un vecteur $u_4 \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille $\mathcal{G} = (u_1, u_2, u_4)$ soit génératrice de $\mathbb{R}^3$.
4. Que dire alors de $\mathcal{G}$?

Exercice 2.13 *(N1)* Soient $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 - (2, -2, 2)$ et $v_3 = (2, -1, 2)$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Peut-on trouver un vecteur w tel que (v_1, v_2, w) soit libre ? Si oui, en construire un.
2. Même consigne pour la famille (v_1, v_3, w).

Exercice 2.14 *(N2)* Soient $u = (1, 1, m)$, $v = (0, 1, 2)$ et $w = (1, 0, 3)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel m pour que la famille $\mathcal{F} = (u, v, w)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.15 *(N1)* On considère les vecteurs $u = (1, 2, 1)$, $v = (2, 0, 3)$ et $w = (0, 1, 1)$ formant une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de $t = (-1, 10, 1)$ dans la base (u, v, w).

Exercice 2.16 *(N2)* On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, -1, 2)$ et $w = (1, -2, 3)$ et soient $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$ des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $F = G$.

Exercice 2.17 *(N2)* Soit $\mathcal{B} = (e, f, g)$ une base de $\mathbb{R}^3$.
La famille $\mathcal{F} = (e, e + f, e + f + g)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
Et la famille $\mathcal{G} = (e + f, f + g, g + e)$?

Exercice 2.18 *(N3)* Hyperplans de $\mathbb{R}^n$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et l'on considère la partie F de $\mathbb{R}^n$ définie par $F = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + ... + x_n = 0\}$.
Pour tout $i \in [\![1 ; n-1]\!]$, on pose $u_i = e_i - e_n$.

1. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_{n-1})$.
2. Montrer que la famille $\mathcal{U} = (u_1, ..., u_{n-1})$ est une base de F. En déduire la dimension de F.
3. Soit $w = (w_1, ..., w_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $w_1 + ... + w_n \neq 0$.
   Montrer que la famille $\mathcal{W} = (u_1, ..., u_{n-1}, w)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
4. On nomme hyperplan de $\mathbb{R}^n$, tout s.e.v. de dimension $n-1$.
   En donner des exemples dans $\mathbb{R}^3$ puis dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.19 *(N2)* On note $(e_1, ..., e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et, pour tout $i \in [\![1 ; 4]\!]$, on pose $E_i = \mathrm{Vect}(e_i, e_1 + e_2 + e_3 + e_4 - e_i)$.

1. Déterminer la dimension de E_i pour tout $i \in [\![1 ; 4]\!]$.
2. On pose $E = \bigcap_{i=1}^{4} E_i$. Montrer que $E \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.
3. Justifier que E est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ puis que sa dimension vaut 1 ou 2.
4. Déterminer la dimension de E et en donner une base.

Exercice 2.20 *(N3)* Soient $m \geqslant n \geqslant 2$ et $(v_1, ..., v_n)$ une famille libre de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$.
Pour $k = 1, ..., n-1$, on pose $w_k = v_k + v_{k+1}$ et $w_n = v_n + v_1$.
La famille $(w_1, ..., w_n)$ est-elle libre ?

Exercice 2.21 *(N2)* Bijou, bijou
Ambroise achète 620 € une bague pour sa dulcinée contenant 2 g d'or, 5 g de cuivre et 4 g d'argent.
Barnabé achète 530 € une bague pour sa promise contenant 3 g d'or, 5 g de cuivre et 1 g d'argent.
Childéric achète pour sa douce et tendre une bague contenant 5 g d'or, 12 g de cuivre et 9 g d'argent.
Combien Childéric va-t-il la payer ?

Exercice 2.22 *(N3)* On désigne par $\mathcal{C} = (c_1\,,\, c_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soient les vecteurs $e_1 = (1\,,\,1)$, $e_2 = (-1\,,\,1)$, $f_1 = (3\,,\,1)$, $f_2 = (3\,,\,-2)$ associés aux familles $\mathscr{E} = (e_1\,,\,e_2)$ et $\mathscr{F} = (f_1\,,\,f_2)$.

1. Montrer que $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont libres. Qu'en déduire ?
2. (a) i. Exprimer les vecteurs de $\mathcal{C}$ en fonction des vecteurs de $\mathscr{E}$.
   ii. Soit un vecteur de $\mathbb{R}^2$ exprimé dans la base canonique $u = (x\,,\,y)_{\mathcal{C}}$.
   Déterminer ses coordonnées $u = (x'\,,\,y')_{\mathscr{E}}$ dans la base $\mathscr{E}$.
   (b) i. Exprimer les vecteurs de $\mathscr{E}$ en fonction des vecteurs de $\mathcal{C}$.
   ii. Soit un vecteur de $\mathbb{R}^2$ $u = (p\,,\,q)_{\mathscr{E}}$ exprimé dans la base $\mathscr{E}$.
   Déterminer ses coordonnées $u = (p'\,,\,q')_{\mathcal{C}}$ dans la base canonique $\mathcal{C}$.
3. (a) i. Exprimer les vecteurs de $\mathcal{C}$ en fonction des vecteurs de $\mathscr{F}$.
   ii. Soit un vecteur de $\mathbb{R}^2$ exprimé dans la base canonique $u = (x\,,\,y)_{\mathcal{C}}$.
   Déterminer ses coordonnées $u = (x''\,,\,y'')_{\mathscr{F}}$ dans la base $\mathscr{F}$.
   (b) i. Exprimer les vecteurs de $\mathscr{F}$ en fonction des vecteurs de $\mathcal{C}$.

ii. Soit un vecteur de $\mathbb{R}^2$ $\quad u = (\, a \,,\, b \,)_{\mathscr{F}}$ exprimé dans la base $\mathscr{F}$.
Déterminer ses coordonnées $\quad u = (\, a' \,,\, b' \,)_{\mathcal{C}}$ dans la base canonique $\mathcal{C}$.

4. (a) i. Exprimer les vecteurs de $\mathscr{E}$ en fonction des vecteurs de $\mathscr{F}$.
   ii. Soit un vecteur de $\mathbb{R}^2$ $\quad u = (\, p \,,\, q \,)_{\mathscr{E}}$ exprimé dans la base $\mathscr{E}$.
   Déterminer ses coordonnées $\quad u = (\, p'' \,,\, q'' \,)_{\mathscr{F}}$ dans la base $\mathscr{F}$.

   (b) i. Exprimer les vecteurs de $\mathscr{F}$ en fonction des vecteurs de $\mathscr{E}$.
   ii. Soit un vecteur de $\mathbb{R}^2$ $\quad u = (\, a \,,\, b \,)_{\mathscr{F}}$ exprimé dans la base $\mathscr{F}$.
   Déterminer ses coordonnées $\quad u = (\, a'' \,,\, b'' \,)_{\mathscr{E}}$ dans la base $\mathscr{E}$.

5. Récapituler les formules de changement de bases obtenues puis illustrer tout ceci.

6. On donne $\quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $G = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$.
   Calculer $\quad E^{-1}, \quad F^{-1}, \quad G^{-1}$ et $E^{-1}F$ puis observer et interpréter les résultats obtenus.

Corrigé des exercices

L'ESPACE VECTORIEL $\mathbb{R}^n$

Sauf mention contraire, n est un entier naturel non nul.

Exercice 2.1 Soient les vecteurs $a = (2, -2, -1)$, $b = (1, 1, 2)$, $c = (-1, 1, 1)$, $d = (-4, 4, 2)$, $e = (-2, 0, -1)$, $f = (3, -1, 1)$, $g = (5, -1, 2)$, $h = (3, -7, -6)$, $i = (3, 1)$, $j = (5, -2)$ et $k = (-3, 10)$ de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$.

1. On a $p = 5i - 3j + 2k = (-6, 31)$, $q = 4i - j + k - 2p = (16, -46)$, $r = 2a - 4b - 3c = (3, -11, -13)$ et $s = 2b - 5k$ n'a aucun sens.
2. et 3. On tente d'exprimer le vecteur en fonction de ceux de la famille à partir des équations obtenues précédemment et si l'on ne peut pas, on traduit les combinaisons linéaires en termes de coordonnées et l'on résout le système obtenu.

(1) $k = 4i - 3j$, $K \in (OIJ) = \mathscr{E}$.

(2) $j = \frac{4}{3}i - \frac{1}{3}k$, $J \in (OIK) = \mathscr{P}$.

(3) $i = 1i + 0j$, $I \in (OI) \subset (OIJ) = \mathscr{P}$.

(4) $g = a + 2b - c$, $G \in \mathscr{E}$.

(5) $h = 3a - 2b + c$, $H \in \mathscr{E}$.

(6) $a \in \mathbb{R}^3$, i, $j \in \mathbb{R}^2$: n'a aucun sens, $A \in \mathscr{E}$, I, $J \in \mathscr{P}$.

(7) j, $k \in \mathbb{R}^2$, a, $b \in \mathbb{R}^3$: n'a aucun sens, J, $K \in \mathscr{P}$, A, $B \in \mathscr{E}$.

(8) c n'est pas combili de a et b, $C \notin (OAB)$.

(9) d n'est pas combili de b et c, $D \notin (OBC)$.

(10) $d = -2a + 0b$, $D \in (OA) \subset (OAB)$.

(11) e n'est pas combili de a et b, $E \notin (OAB)$.

(12) $e = c - b$, $E \in (OBC)$.

(13) a n'est pas combili de b, c et e, $A \notin (OBCE) = (OBC)$.

(14) $f = a + b + 0c$, $F \in (OAB)$.

(15) $a = f - b$, $A \in (OBF)$.

(16) c n'est pas combili de a, b et f, $C \notin (OABF) = (OAB)$.

(17) $q = -18i + 14j$, $Q \in (OIJ) = \mathscr{P}$.

(18) $b = \frac{1}{2}c - \frac{3}{4}d - \frac{1}{2}h$, $B \in (OCDH) = \mathscr{E}$.

(19) $c = 5b - 3f + h$, $C \in (OBFH) = \mathscr{E}$.

(20) $r = -10f + \frac{21}{4}g + \frac{9}{4}h$, $R \in (OFGH) = \mathscr{E}$.

(21) $t = e + b - c = 0_{\mathbb{R}^3} = 0a$, $T = O \in (OA) \cap (OBC)$.

4. On a $k = 4i - 3j$ donc $i = \frac{1}{4}(k + 3j) = 0i + \frac{3}{4}j + \frac{1}{4}k$. Par ailleurs, $i = 1i + 0j + 0k$.
   On a $p = 5i - 3j + 2k$. Par ailleurs, on a $p = 5i - 3j + 2(4i - 3j) = 13i - 9j + 0k$.
   On a $q = 4i - j + k - 2p = 4i - j + k - 2(5i - 3j + 2k) = -6i + 5j - 3k$.
   Par ailleurs, on a $q = 4i - j + k - 2p = 4i - j + k - 2(13i - 9j) = -22i + 17j + k$.
5. (a) On traduit en termes de coordonnées l'équation $u = \alpha i + \beta j$ et l'on résout ce système d'inconnues α et β. On obtient alors $u = (x, y) = \frac{1}{11}(2x + 5y)i + \frac{1}{11}(x - 3y)j$: tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de i et j.
   De plus, le système résolu est de Cramer et cette décomposition est unique.
   On dira que la famille (i, j) est une famille génératrice minimale de $\mathbb{R}^2$ donc une base de $\mathbb{R}^2$, (O, I, J) est un repère du plan $\mathscr{P}$.

(b) Par la même méthode, on obtient

$$v = (x\,,\,y\,,\,z) = (-\tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2}y + z)a + (\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y)b + (-\tfrac{3}{2}x - \tfrac{5}{2}y + 2z)c :$$

tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de a, b et c. De plus, le système résolu est de Cramer et cette décomposition est unique. On dira que la famille $(a\,,\,b\,,\,c)$ est une famille génératrice minimale de $\mathbb{R}^3$ donc une base de $\mathbb{R}^3$, (O, A, B, C) est un repère de l'espace $\mathscr{E}$.

Exercice 2.2

1. Pour la plupart d'entre eux, il suffit de trouver un vecteur dont les coordonnées vérifient (ou ne vérifient pas) l'équation (ou les équations) définissant l'ensemble. Lorsque l'ensemble n'est pas défini par équation mais par la forme, le type, l'expression des vecteurs, il faudra trouver un vecteur pouvant ou ne pouvant pas s'écrire sous la forme demandée.

$A = \{(x_1\,,\,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 - 4x_2 = 0\}$. Puisque $3 \times 8 - 4 \times 6 = 0$, $a_1 = (8\,,\,6) \in A$. Puisque $3 \times 5 - 4 \times 7 \neq 0$, $a_2 = (5\,,\,7) \notin A$.

$B = \{(x\,,\,y\,,\,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\}$. Puisque $3 \times 5 - 7 \times 2 = 1$, $b_1 = (5\,,\,2\,,\,1) \in B$. Puisque $3 \times 1 - 7 \times 2 \neq 5$, $b_2 = (1\,,\,2\,,\,5) \notin B$.

$C = \{(u\,,\,v\,,\,w) \in \mathbb{R}^3 \mid u + 2v - 4w + 5 = 0\}$. Puisque $1 + 2 \times 3 - 4 \times 3 + 5 = 0$, $c_1 = (1\,,\,3\,,\,3) \in C$. Puisque $3 + 2 \times 1 - 4 \times 2 + 5 \neq 0$, $c_2 = (3\,,\,1\,,\,2) \notin C$.

$D = \{(x\,,\,y\,,\,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$. Puisque $3 \times 0 \times 2 = 0$, $d_1 = (3\,,\,0\,,\,2) \in D$. Puisque $1 \times 2 \times 3 \neq 0$, $d_2 = (1\,,\,2\,,\,3) \notin D$.

$E = \{(x\,,\,y\,,\,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}$. Puisque $3^2 - (-3)^2 = 0$, $e_1 = (3\,,\,4\,,\,-3) \in E$. Puisque $4^2 - 2^2 \neq 0$, $e_2 = (4\,,\,4\,,\,2) \notin E$.

$F = \{(x\,,\,y\,,\,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = x + y + z = 0\}$. Puisque $2 + (-2) + 0 = 0$ et $2 + (-2) - 0 = 0$, $f_1 = (2\,,\,-2\,,\,0) \in F$. Puisque $2 + 4 + 1 \neq 0$, $f_2 = (2\,,\,4\,,\,1) \notin F$.

$G = \{(x\,,\,y\,,\,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = 0\}$. Puisque $2(0^2 + 0^2) = 0$, $g_1 = (0\,,\,0\,,\,3) \in G$. Puisque $5(1^2 + 0^2) \neq 0$, $g_2 = (1\,,\,0\,,\,5) \notin G$.

$H = \{(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geqslant 0\}$. Puisque $3 + 4 \geqslant 0$, $h_1 = (3\,,\,4) \in H$. Puisque $2 + (-3) < 0$, $h_2 = (2\,,\,-3) \notin H$.

$I = \{(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\}$. Puisque $3 = 3 = 3$, $i_1 = (3\,,\,3\,,\,3) \in I$. Puisque $1 \neq 2$, $i_2 = (1\,,\,2\,,\,2) \notin I$.

$J = \{(a\,,\,b\,,\,c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a - 5b + c = 0$ et $b = -c\}$. Puisque $2 \times 3 - 5 \times 1 + (-1) = 0$ et $1 = -(-1)$, $j_1 = (3\,,\,1\,,\,-1) \in J$. Puisque $2 \neq -3$, $j_2 = (1\,,\,2\,,\,3) \notin J$.

$K = \{(a\,,\,b\,,\,c) \in \mathbb{R}_+^3 \mid a = 2b\}$. Puisque $6 \geqslant 0$, $3 \geqslant 0$, $7 \geqslant 0$ et $6 = 3 \times 3$, $k_1 = (3\,,\,6\,,\,7) \in K$. Puisque $-2 < 0$, $k_2 = (-2\,,\,-1\,,\,4) \notin K$.

$L = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0$ et $x-2y-z+3t = 0\}$. Puisque $1+2+(-3)+0 = 0$ et $1 - 2 \times 2 - (-3) + 3 \times 0 = 0$, $\ell_1 = (1,2,-3,0) \in L$.
Puisque $1 + 3 + 4 + 2 \neq 0$, $\ell_2 = (1,3,4,2) \notin L$.

$M = \{(x\,,\,y\,,\,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+\alpha = 0$ et $x+3\alpha z = 0\}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Puisque $0+(-\alpha)+\alpha = 0$ et $0+3\alpha\times 0 = 0$, $m_1 = (0\,,\,-\alpha\,,\,0) \in M$. Puisque $1+3\alpha\times 0 \neq 0$, $m_2 = (1\,,\,2\,,\,0) \notin M$.

$N = \{(a,b,b,a) \in \mathbb{R}^4 \mid (a\,,\,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Puisque $1 = 1$ et $3 = 3$, $n_1 = (1,3,3,1) \in N$. Puisque $2 \neq 3$, $n_2 = (1,2,3,1) \notin N$.

$O = \{(\lambda\,,\,\mu\,,\,\lambda + \mu) \in \mathbb{R}^3 \mid (\lambda\,,\,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$. Puisque $2 + 3 = 5$, $o_1 = (2\,,\,3\,,\,5) \in O$. Puisque $1 + 2 \neq 4$, $o_2 = (1\,,\,2\,,\,4) \notin O$.

$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0$ et $2x = -3z$ et $4y - z = 0\}$.
Puisque $0 + 2 \times 0 = 0$, $2 \times 0 = -3 \times 0$ et $4 \times 0 - 0 = 0$, $p_1 = (0, 0, 0) \in P$.
Puisque $1 + 2 \times 3 \neq 0$, $p_2 = (1, 3, 5) \notin P$.

$Q = \{(a + c, b - 3c, 2b - a) \in \mathbb{R}^3 \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$. Pour $a = 1$, $b = 2$ et $c = 3$, on a $a + c = 4$, $b - 3c = -7$ et $2b - a = 3$, donc $q_1 = (4, -7, 3) \in Q$.
Par ailleurs, on montrera plus loin que $Q = \mathbb{R}^3$ donc tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est vecteur de Q.

$R = \{(r, r, ..., r) \in \mathbb{R}^n\}$. Puisque $2 = 2 = ... = 2$, $r_1 = (2, 2, ..., 2) \in R$.
Puisque $1 \neq 3$, $r_2 = (1, 3, 3, ..., 3) \notin R$.

$S = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 - x_2 = 0\}$, $n \geqslant 2$. Puisque $2 - 2 = 0$, $s_1 = (2, 2, 3, 4, ..., n) \in S$. Puisque $2 - 1 \neq 0$, $s_2 = (2, 1, 3, 4, ..., n) \notin S$.

$T = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + 2x_2 = 0$ et $x_2 + 3x_3 = 0\}$, $n \geqslant 3$.
Puisque $6 + 2 \times (-3) = 0$ et $-3 + 3 \times 1 = 0$, $t_1 = (6, -3, 1) \in T$.
Puisque $3 + 2 \times 2 \neq 0$, $t_2 = (3, 2, 1) \notin T$.

$U = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 - 3x_2 = 0$ ou $2x_2 + x_3 = 0\}$, $n \geqslant 3$. Puisque $2 \times 1 - 2 = 0$, $u_1 = (4, 1, 2) \in U$. Puisque $1 + 3 \times 2 \neq 0$ et $2 \times 2 + 3 \neq 0$, $u_2 = (1, 2, 3) \notin U$.

$V = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$. Puisque $0 = 0$, $v_1 = (0, 2, 3, ..., n) \in V$.
Puisque $1 \neq 0$, $v_2 = (1, 2, 3, ..., n) \notin V$.

$W = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \neq 0\}$. Puisque $1 \neq 0$, $w_1 = (1, 2, 3, ..., n) \in W$.
Puisque $0 = 0$, $w_2 = (0, 2, 3, ..., n) \notin W$.

$X = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 1\}$. Puisque $1 = 1$, $x_1 = (1, 2, 3, ..., n) \in X$.
Puisque $0 \neq 0$, $x_2 = (0, 2, 3, ..., n) \notin X$.

$Y = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geqslant 0\}$. Puisque $1 \geqslant 0$, $y_1 = (1, 2, 3, ..., n) \in Y$.
Puisque $-1 < 0$, $y_2 = (-1, 2, 3, ..., n) \notin Y$.

$Z = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + ... + x_n = 0\}$. Puisque $1 + (-1) + 0 + ... + 0 = 0$, $z_1 = (1, -1, 0..., 0) \in Z$. Puisque $2 + 0 + ... + 0 \neq 0$, $z_2 = (2, 0, ..., 0) \notin Z$.

2. Pour démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on démontrera que c'est un sous-espace vectoriel : il est inclus dans un espace vectoriel, il est non vide (il doit nécessairement contenir l'élément nul) et il est stable par combinaisons linéaires.
Pour démontrer que ce n'est pas un s.e.v., il suffit de montrer qu'une seule de ces conditions n'est pas satisfaite et l'on procèdera dans l'ordre précédent.
On ne détaillera pas ici tous les exemples et l'on se reportera aux premiers.

$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 - 4x_2 = 0\}$: s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.
• On a $A \subset \mathbb{R}^2$.
• Puisque $3 \times 0 - 4 \times 0 = 0$, $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in A$ et $A \neq \varnothing$.
• Soient $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Posons $(z_1, z_2) = z = \lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2)$.
On a $3z_1 - 4z_2 = 3(\lambda x_1 + y_1) - 4(\lambda x_2 + y_2) = \lambda(3x_1 - 4x_2) + (3y_1 - 4y_2) \overset{x,y \in A}{=} \lambda \times 0 + 0 = 0$
donc $z \in A$ et A est stable par combinaisons linéaires.
• A est donc un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.

$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\}$: s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.
Idem A avec $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ par exemple.