

# MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES INFORMATIQUE

Pour consolider les acquis du lycée et réussir le 2<sup>e</sup> semestre

ECG  
2<sup>e</sup> semestre

Sébastien Krief-Détraz





# TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos . . . . .	1
Sommaire . . . . .	3
<b>1 Conditionnement &amp; Indépendance</b>	<b>5</b>
1 Probabilité conditionnelle . . . . .	6
1.1 Définition . . . . .	6
1.2 Formule des probabilités composées . . . . .	7
1.3 Formule des probabilités totales . . . . .	8
1.4 Arbre de probabilité . . . . .	8
1.5 Formule de Bayes . . . . .	9
2 Indépendance . . . . .	9
2.1 Indépendance de deux événements . . . . .	9
2.2 Indépendance des événements contraires . . . . .	10
2.3 Indépendance de $n$ événements . . . . .	10
Exercices . . . . .	12
Corrigé des exercices . . . . .	18
<b>2 L'espace vectoriel <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>29</b>
Introduction . . . . .	29
1 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ . . . . .	31
1.1 Définitions . . . . .	31
1.2 Combinaisons linéaires . . . . .	32
1.3 Base canonique de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	32
2 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	33
2.1 Définition . . . . .	33
2.2 Sous-espace vectoriel engendré . . . . .	34
2.3 Méthode . . . . .	37
3 Bases et familles libres . . . . .	37
3.1 Bases d'un sous-espace vectoriel . . . . .	37
3.2 Familles libres . . . . .	38
4 Rang d'une famille de vecteurs . . . . .	42
Exercices . . . . .	43
Corrigé des exercices . . . . .	48

<b>3</b>	<b>Graphes</b>	<b>61</b>
1	Graphes non orientés . . . . .	62
1.1	Définitions et premières propriétés . . . . .	62
1.2	Parcourir un graphe . . . . .	64
2	Graphes orientés . . . . .	66
3	Matrice d'adjacence d'un graphe . . . . .	67
4	Graphes pondérés . . . . .	69
5	Graphes et réseaux sociaux . . . . .	70
	Exercices . . . . .	72
	Corrigé des exercices . . . . .	77
	Travaux Pratiques : Graphes . . . . .	87
	Corrigé du T.P. : Corrigé du T.P. Graphes . . . . .	90
<b>4</b>	<b>Calcul différentiel</b>	<b>93</b>
1	Nombre dérivé . . . . .	94
1.1	Définitions . . . . .	94
1.2	Interprétation graphique . . . . .	95
1.3	Approximation affine locale . . . . .	96
2	Fonctions dérivées . . . . .	97
3	Fonctions dérivées et opérations . . . . .	98
3.1	Somme et produit . . . . .	98
3.2	Quotient . . . . .	99
3.3	Formules usuelles de dérivation . . . . .	99
3.4	Dérivée et composition . . . . .	101
3.5	Formulaire de dérivation . . . . .	103
4	Fonctions dérivées et variations . . . . .	103
5	Extremum d'une fonction . . . . .	104
5.1	Extremum local, extremum global . . . . .	104
5.2	Optimisation . . . . .	105
6	Inégalité des accroissements finis . . . . .	106
	Exercices . . . . .	107
	Corrigé des exercices . . . . .	112
	Activité : Équations fonctionnelles . . . . .	125
	Corrigé de l'activité : Équations fonctionnelles . . . . .	127
	Travaux Pratiques : Méthode de Newton . . . . .	129
	Corrigé du T.P. : Méthode de Newton . . . . .	130
<b>5</b>	<b>Séries numériques</b>	<b>133</b>
1	Séries numériques . . . . .	134
1.1	Définition . . . . .	134
1.2	Nature d'une série . . . . .	134
1.3	Série à termes positifs . . . . .	136
1.4	Séries absolument convergentes . . . . .	136
2	Séries usuelles . . . . .	138
2.1	Séries géométriques . . . . .	138
2.2	Série exponentielle . . . . .	138
2.3	Séries de Riemann . . . . .	139
	Exercices . . . . .	140
	Corrigé des exercices . . . . .	142
	Travaux Pratiques : Sommes & Séries . . . . .	150
	Corrigé du T.P. : Sommes & Séries . . . . .	151

<b>6</b>	<b>Statistiques univariées</b>	<b>153</b>
1	Vocabulaire . . . . .	154
2	Effectifs et fréquences cumulés . . . . .	155
	2.1 Effectifs et fréquences . . . . .	155
	2.2 Effectifs et fréquences cumulés . . . . .	155
3	Représentations graphiques d'une série statistique . . . . .	156
4	Indices de position . . . . .	157
	4.1 Mode d'une série statistique . . . . .	157
	4.2 Médiane d'une série statistique . . . . .	157
	4.3 Moyenne d'une série statistique . . . . .	158
5	Indices de dispersion . . . . .	159
	5.1 Étendue d'une série statistique . . . . .	159
	5.2 Écart interquartile d'une série statistique . . . . .	160
	5.3 Variance & écart-type d'une série statistique . . . . .	160
6	Bilan . . . . .	161
	6.1 Diagrammes en boîtes . . . . .	162
	6.2 Remarques générales . . . . .	162
7	Exercices . . . . .	162
	Corrigé des exercices . . . . .	165
	Travaux Pratiques : Opération Pandas . . . . .	170
<b>7</b>	<b>Convexité des fonctions numériques</b>	<b>181</b>
1	Dérivées successives . . . . .	181
	1.1 Fonction dérivée seconde . . . . .	181
	1.2 Dérivées d'ordre supérieur . . . . .	182
2	Convexité : approche graphique . . . . .	183
	2.1 Fonctions convexes et fonctions concaves . . . . .	183
	2.2 Point d'inflexion . . . . .	185
3	Convexité et dérivation . . . . .	186
	3.1 Convexité et dérivées . . . . .	186
	3.2 Point d'inflexion et dérivée seconde . . . . .	188
4	Étude et représentation d'une fonction . . . . .	188
	Exercices . . . . .	189
	Corrigé des exercices . . . . .	195
<b>8</b>	<b>Applications linéaires</b>	<b>209</b>
	Introduction . . . . .	209
1	Quelques rappels . . . . .	210
2	Définition et premières propriétés . . . . .	210
3	Applications linéaires et matrices . . . . .	213
4	Noyau et image . . . . .	215
	4.1 Noyau . . . . .	215
	4.2 Image . . . . .	216
5	Autour du rang . . . . .	218
	5.1 Rang d'une matrice, rang d'une application linéaire . . . . .	218
	5.2 Théorème du rang . . . . .	219
6	Compléments . . . . .	220
	6.1 Retour sur les systèmes linéaires . . . . .	220
	6.2 De belles figures . . . . .	221
	6.3 Restrictions et généralisations . . . . .	225
	Exercices . . . . .	226
	Corrigé des exercices . . . . .	230

<b>9</b>	<b>Primitives</b>	<b>245</b>
1	Définitions et premières propriétés . . . . .	245
2	Calculs de primitives . . . . .	247
	Exercices . . . . .	249
	Corrigé des exercices . . . . .	252
<b>10</b>	<b>Espaces probabilisés</b>	<b>257</b>
1	Événements . . . . .	257
2	Espaces probabilisés . . . . .	259
	2.1 Définitions . . . . .	259
	2.2 Théorèmes de limite monotone . . . . .	260
3	Conditionnement & Indépendance . . . . .	262
	3.1 Probabilités conditionnelles . . . . .	262
	3.2 Formules usuelles . . . . .	262
	3.3 Indépendance . . . . .	263
	Exercices . . . . .	265
	Corrigé des exercices . . . . .	269
	Travaux Pratiques : Probabilités . . . . .	278
	Corrigé du T.P. : Probabilités . . . . .	279
<b>11</b>	<b>Intégration sur un segment</b>	<b>281</b>
	Introduction . . . . .	281
	Activité . . . . .	282
1	Notion d'intégrale . . . . .	284
	1.1 Intégrale d'une fonction continue et positive . . . . .	284
	1.2 Dérivabilité de l'intégrale . . . . .	285
	1.3 Propriété fondamentale de l'intégrale . . . . .	286
2	Intégrale d'une fonction continue . . . . .	287
	2.1 Théorème d'existence de primitives . . . . .	287
	2.2 Généralisation de l'intégrale aux fonctions continues . . . . .	287
	2.3 Propriétés linéaires de l'intégration . . . . .	289
	2.4 Relation de Chasles . . . . .	289
	2.5 Intégrale et aire . . . . .	290
	2.6 Intégrale et relation d'ordre . . . . .	292
3	Intégration par parties . . . . .	293
4	Changement de variable . . . . .	294
	Pour aller plus loin . . . . .	296
	Exercices . . . . .	297
	Corrigé des exercices . . . . .	308
<b>12</b>	<b>Variables aléatoires discrètes</b>	<b>335</b>
1	Définitions et premières propriétés . . . . .	336
2	Espérance d'une variable aléatoire discrète . . . . .	340
3	Variance d'une variable aléatoire discrète . . . . .	342
	Exercices . . . . .	346
	Corrigé des exercices . . . . .	350
	Travaux Pratiques : Variables aléatoires discrètes . . . . .	360
	Corrigé du T.P. : Variables aléatoires discrètes . . . . .	361

<b>13</b>	<b>Équations différentielles</b>	<b>365</b>
1	Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants . . . . .	366
1.1	Équation différentielle linéaire homogène $y' = ay$ . . . . .	366
1.2	Équation différentielle $y' = ay + b$ . . . . .	368
1.3	Équation différentielle $y' = ay + f$ . . . . .	368
2	Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants . . . . .	370
2.1	Équation différentielle linéaire homogène $y'' + ay' + by = 0$ . . . . .	370
2.2	Équation différentielle $y'' + ay' + by = f$ . . . . .	372
3	Autres équations différentielles . . . . .	373
4	Trajectoires . . . . .	374
	Exercices . . . . .	376
	Corrigé des exercices . . . . .	384
	Activité : Libérée, dérivée : l'intégrale . . . . .	397
	Corrigé de l'activité : Libérée, dérivée : l'intégrale . . . . .	399
	Travaux Pratiques : Méthode d'Euler . . . . .	401
	Corrigé du T.P. : Méthode d'Euler . . . . .	403
<b>14</b>	<b>Lois discrètes usuelles</b>	<b>407</b>
1	Lois discrètes finies . . . . .	407
1.1	Variable aléatoire certaine . . . . .	408
1.2	Loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1 ; n \rrbracket)$ . . . . .	408
1.3	Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ . . . . .	410
1.4	Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ . . . . .	411
2	Lois discrètes infinies . . . . .	412
2.1	Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ . . . . .	412
2.2	Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ . . . . .	413
3	Fonction de répartition . . . . .	414
	Exercices . . . . .	416
	Corrigé des exercices . . . . .	420
	Travaux Pratiques : Jeu de lois . . . . .	427
	Corrigé du T.P. : Jeu de lois . . . . .	429
	<b>Objectif concours</b>	<b>433</b>
	Corrigé . . . . .	438
	<b>Commandes informatiques</b>	<b>449</b>