

Jean-Louis Féménias

Licence
Master
Écoles
d'ingénieurs

Introduction au calcul variationnel en physique

Aperçu historique et applications :
mécanique analytique, élasticité

Cours et exercices



2^e édition



Chapitre 1

Introduction

Trois idées sont à l'origine des méthodes variationnelles : la notion de stationnarité (optimisation et règles d'extremum), celle de fonctionnelle et enfin la généralisation de l'idée de règle d'extremum à celle de principe variationnel.

1.1. Stationnarité, optimisation et principes d'extremum

1.1.1. Stationnarité

La notion d'**optimisation**² est ancrée dans notre esprit. Le but de nos actions est d'acquérir le *maximum* (de connaissances, de biens, de résultats, etc.) en le *minimum* (de temps, d'argent, d'effort, etc.). En économie, on cherche la rentabilité maximum, le minimum de pertes. Moi-même je cherche le trajet le plus court pour aller d'un endroit à un autre, sauf si le trajet est lui-même l'objet de mon déplacement, auquel cas je l'allongerais.

Notre vie quotidienne est faite de ces recherches de maximums et de minimums c'est-à-dire, en termes plus techniques, de situations **stationnaires**. Pour une fonction $f(x)$ de la variable réelle x , on appelle **point stationnaire** tout point où la dérivée de la fonction s'annule : ce peut être un maximum, un minimum, un point inflexionnel (mais de dérivée nulle), c'est-à-dire un point où la fonction ne varie pas pour une petite variation dx de x . Un tel point traduit un équilibre et donne une impression d'objectif atteint, d'œuvre achevée.

Il ne faut donc pas s'étonner que les Anciens aient associé cette propriété aux œuvres de la Nature et aient cherché chez elle tout ce qui pouvait être extremum : ils pensaient y trouver l'essentiel. Les problèmes pouvaient être concrets, comme celui de l'aire maximum circonscrite par une clôture de longueur fixée (**problème isopérimétrique de Didon**³, **Archimède**, 287-212 av. J.-C., **Zénodore** $\sim$ 200 ans av. J.-C., **Pappus**, $\sim$ 300-360 ap. J.-C.), mais aussi abstraits. Parmi ces derniers apparaît très tôt celui de la nature de la lumière (**Pythagore**, 570-480 av. J.-C., **Platon**, 427-347 av. J.-C., **Aristote**, 384-322 av. J.-C.), et la question de sa propagation. Au III^e siècle av. J.-C., la propagation rectiligne était admise et **Euclide** énonçait la loi de la réflexion. Il faudra attendre le 1^{er} siècle ap. J.-C. pour que **Héron d'Alexandrie** fasse intervenir une idée d'extremum : la lumière suit le chemin « le plus court ». C'est déjà un **principe d'extremum**⁴, parfaitement valable pour la propagation de la lumière et sa réflexion dans un milieu homogène ; mais on sait qu'il est faux pour la réfraction,

² Les mots cités dans l'index sont imprimés en **gras** dans le texte pour une recherche plus aisée.

³ Le lecteur est encouragé à consulter le Net pour se remémorer ces légendes antiques et les avancées mathématiques de cette époque.

⁴ En fait c'est même un principe variationnel dans le sens où un calcul variationnel est impliqué.

quand la lumière passe dans un milieu différent. En fait tel que je l'ai écrit il n'est pas vraiment faux car mon énoncé est intentionnellement ambigu. Quand je vais de mon domicile à mon bureau, je recherche le trajet « le plus court », mais le plus court comment ? En distance ? Ce qui va m'obliger à passer par des chemins trop fréquentés et encombrés, à être ralenti par des feux de croisement, etc. Ne serait-ce pas plutôt en temps ?

En fait, le problème d'un déplacement en un minimum de temps a très tôt attiré l'attention, mais sans rapport direct avec la propagation lumineuse. La question était académique : c'est celle d'une bille lâchée d'un point A dans le champ de pesanteur et que l'on veut faire aller en un minimum de temps au point C , d'altitude inférieure mais pas sur la verticale de A ; pour cela on l'oblige à suivre sans frottement une trajectoire déterminée, par exemple dans une gouttière déformable ; le tout est de trouver la forme de la gouttière.

Vers 1610, **Galilée**⁵, professeur à Padoue, a 46 ans ; il mentionne dans une lettre à Guidobaldo del Monte sa solution qui ne sera publiée qu'en 1638 dans les *Discours et Démonstrations Mathématiques relatives à deux nouvelles sciences* : Galilée trouve un arc de cercle (figure 1.1).

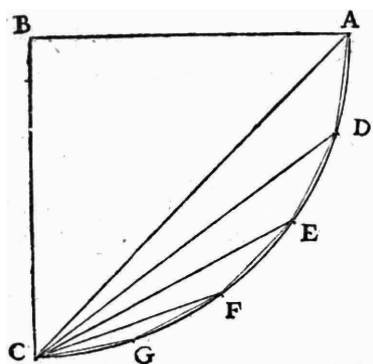


FIGURE 1.1 : Figure originale concernant le problème du Brachistochrone par Galilée
Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze (1638).

Le résultat est faux ! En fait, en utilisant ses résultats sur le mouvement d'une bille sur un plan incliné, Galilée montre qu'en suivant l'arc de cercle ($ADEFGC$) la bille mettra moins de temps qu'en suivant la corde (AC) ; ce qui ne signifie pas que l'arc de cercle soit la trajectoire optimale ! Ce ne sera pas la seule erreur de Galilée en matière de calcul variationnel, puisqu'il dira aussi que dans le champ de pesanteur une chaîne pesante suspendue par ses extrémités prend une forme parabolique : Galilée était soumis à l'influence de son temps qui ne reconnaissait comme courbes remarquables que la droite, le cercle, la parabole et autres coniques. La véritable solution de son problème de moindre temps est la **cycloïde** (ou **roulette** comme disait **Pascal**⁶ qui l'étudiera en 1658), et celle de la chaîne, le cosinus hyperbolique (ou **chaînette**).

⁵ Galileo Galilei, Pise, 1564 – Arcetri près de Florence, 1642.

⁶ Blaise Pascal, Clermont, 1623 – Paris, 1662.

Pourquoi mentionner cette anecdote ? Simplement parce qu'avec un demi-siècle d'avance, Galilée venait d'aborder le problème mathématique associé au **principe de Fermat**⁷ qui, lui, est un **principe variationnel** solide.

1.1.2. Exemples de règles et de principes d'extremum

Disons quelques mots sur les **points stationnaires** et les **principes d'extremum**. Les problèmes de statique se résolvent par la recherche du minimum d'un potentiel, ce qui constitue un exemple d'utilisation de l'optimisation en mécanique. On retrouve aussi un principe d'extremum avec le **2^d principe de la thermodynamique** sous la forme : *un système thermodynamique isolé atteint son équilibre au maximum de son entropie*. Cet aspect est illustré dans ce premier exercice⁸ :

□ Exercice 1.1 : Thermalisation

Un cylindre isolé thermiquement de l'extérieur est cloisonné par un piston (étanche mais non isolant thermiquement) en deux compartiments (1) et (2). Au temps $t = 0$ on bloque le piston pour l'empêcher de coulisser ; les compartiments (1) et (2) ont alors pour volumes respectifs V_1 et V_2 . Dans (1) on introduit n_1 moles d'un gaz parfait de chaleur molaire C_V constante à la température T_1 et sous la pression P_1 , et dans (2), n_2 moles du même gaz parfait à T_2 et P_2 . Le piston est débloqué et on laisse l'ensemble s'équilibrer. Calculer les pressions, volumes et températures à l'équilibre, en n'utilisant que des principes reconnus.

□ Solution :

Les 6 variables d'état initiales, V_1 , V_2 , P_1 , P_2 , T_1 et T_2 sont connues. Elles sont reliées entre elles par les équations d'état de chaque gaz initialement à l'équilibre :

$$P_1 V_1 = n_1 R T_1 \text{ et } P_2 V_2 = n_2 R T_2.$$

Pour déterminer les 6 variables finales, V'_1 , V'_2 , P'_1 , P'_2 , T'_1 et T'_2 , il faut donc 6 équations.

- (i) La géométrie impose $V_1 + V_2 = V'_1 + V'_2$,
- (ii) L'équilibre mécanique conduit à $P'_1 = P'_2$,
- (iii) et (iv) Les équations d'état de chaque gaz à l'équilibre final sont :

$$P'_1 V'_1 = n_1 R T'_1 \quad \text{et} \quad P'_2 V'_2 = n_2 R T'_2 \quad (1.1.1)$$

(v) 1^{er} principe : Le système des deux gaz est isolé, son énergie interne est conservée : la somme des deux variations d'énergie interne est donc nulle :

$$n_1 C_V (T'_1 - T_1) + n_2 C_V (T'_2 - T_2) = 0 \quad (1.1.2)$$

En réécrivant (1.1.1) sous la forme $P'_1 = \frac{n_1 R T'_1}{V'_1}$ et $P'_2 = \frac{n_2 R T'_2}{V'_2}$ et en utilisant $P'_1 = P'_2$, on a :

$$P' = P'_1 = P'_2 = \frac{n_1 R T'_1}{V'_1} = \frac{n_2 R T'_2}{V'_2} = \frac{n_1 R T'_1 + n_2 R T'_2}{V'_1 + V'_2} = \frac{n_1 R T_1 + n_2 R T_2}{V_1 + V_2}$$

où on a utilisé les propriétés des proportions ainsi que (1.1.2) et la géométrie.

La pression dans l'état final est facilement calculable, mais les températures et volumes non : cinq équations étant disponibles pour 6 inconnues, le problème est en fait à une seule inconnue et

⁷ Pierre Fermat (« de » Fermat à partir de 1631), Beaumont de Lomagne, 1601 – Castres, 1665.

⁸ Les exercices sont suivis de leur solution car ce sont souvent des compléments de l'exposé.

il faut une 6^e équation. Elle sera donnée par le 2^d principe sous forme de principe d'extremum. Le but est d'exprimer la variation d'entropie ΔS du système en fonction de l'inconnue résiduelle et de déterminer la valeur de cette dernière rendant ΔS maximum. On exprimera ΔS en fonction des pressions car P' est connu ; c'est pour cela qu'on écrira plutôt $dS_i = \frac{1}{T} (n_i C_P dT + h dP)$ (rappelons que pour un gaz parfait $h = -V$ et $C_P = C_V + R$), donc

$$dS_1 = n_1 C_P \frac{dT}{T} - \frac{V}{T} dP = n_1 C_P \frac{dT}{T} - n_1 R \frac{dP}{P} \quad \text{et} \quad \Delta S_1 = \int_{(1)}^{(1')} dS_1 = n_1 \left[C_P \ln \frac{T'_1}{T_1} - R \ln \frac{P'}{P_1} \right]$$

La variation totale d'entropie s'écrit ainsi : $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = n_1 C_P \ln T'_1 + n_2 C_P \ln T'_2 + C^{\text{ste}}$, où toutes les constantes additives ont été regroupées. On exprime T'_2 en fonction de T'_1 en utilisant (1.1.2) : $T'_2 = T_2 - \frac{n_1}{n_2} (T'_1 - T_1)$, et on obtient ΔS en fonction de la seule variable T'_1 :

$$\Delta S \propto n_1 \ln T'_1 + n_2 \ln [n_2 T_2 - n_1 (T'_1 - T_1)] + C^{\text{ste}}$$

D'où la dérivée $\frac{d\Delta S}{dT'_1} \propto \frac{n_1}{T'_1} - \frac{n_1 n_2}{n_2 T_2 - n_1 (T'_1 - T_1)} = n_1 \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2 - (n_1 + n_2) T'_1}{T'_1 (n_2 T_2 - n_1 (T'_1 - T_1))}$ qui s'annule pour T'_1 égal à $\frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2}$; la symétrie de l'expression montre que $T'_1 = T'_2$ (résultat attendu). Par remplacement, le lecteur montrera le partage proportionnel des volumes :

$$V'_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2} (V_1 + V_2) \quad \text{et} \quad V'_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2} (V_1 + V_2).$$

Un autre exemple est celui du **principe du maximum de vraisemblance** en statistique, conduisant à la **méthode des moindres carrés**. Il est basé sur l'idée que si l'on a obtenu les mesures $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ aux points de mesure $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – par exemple les tensions $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ aux bornes d'une résistance pour les intensités $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ – c'est parce qu'on avait le maximum de chance de les obtenir⁹. Si les mesures y_j sont des variables normales, indépendantes, centrées sur la valeur exacte $\phi(x_j)$ de Y pour $X = x_j$ et d'écart-type constant σ , la probabilité d'avoir obtenu l'échantillon $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ est :

$$P(\{y_1, y_2, \dots, y_n\}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[(y_1 - \phi(x_1))^2 + \dots + (y_n - \phi(x_n))^2 \right] \right\}$$

Selon le principe, la loi $\phi(x)$ pertinente est celle qui rend cette expression maximum, ou encore $(y_1 - \phi(x_1))^2 + \dots + (y_n - \phi(x_n))^2 = \sum_j (y_j - \phi(x_j))^2$ minimum (« moindres carrés »). Compte tenu de l'infinité des possibilités de fonctions, on se restreint en remplaçant ϕ par une fonction f d'un type que l'on pense raisonnable (le **modèle**), modulable par quelques paramètres β_k bien placés, puis on ajuste ces paramètres pour minimiser $S(\beta_k) = \sum_j (y_j - f(x_j; \beta_l))^2$. Les meilleurs paramètres ainsi obtenus conduisent à la meilleure solution « au sens des moindres carrés » de type f pour représenter les données.

□ Exercice 1.2 : Régression linéaire

Soit l'échantillon des n mesures $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ faites aux points de mesure $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. On pense que la loi théorique liant les quantités y_j et x_j est de la forme $y = ax + b$. Déterminer les meilleures valeurs des paramètres a et b « au sens des moindres carrés » que l'on peut déduire de cet échantillon.

⁹ Ce principe peut être justifié par un raisonnement bayésien (Féménias, 2003).

□ **Solution :**

La quantité à minimiser est la fonction des deux variables a et b : $S(a, b) = \sum_j (y_j - ax_j - b)^2$. On calcule ses dérivées par rapport à b et à a et on les annule pour obtenir $\sum_j (y_j - ax_j - b) = 0$ et $\sum_j x_j (y_j - ax_j - b) = 0$. En notant $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_j x_j$ et $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_j y_j$ les coordonnées de Ω , « centre de gravité des points $\{(x_j, y_j)\}$ », la première équation montre que $\bar{Y} = a\bar{X} + b$: la droite optimum passe par Ω . En éliminant b entre les deux équations, on obtient :

$$a = \frac{n \sum_j (x_j y_j) - \sum_i x_i \sum_j y_j}{n \sum_j (x_j)^2 - (\sum_j x_j)^2} = \frac{\frac{1}{n} \sum_j (x_j y_j) - \bar{X} \bar{Y}}{\frac{1}{n} \sum_j (x_j)^2 - \bar{X}^2} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{var}(X)}$$

où les notations $\text{cov}(X, Y)$ et $\text{var}(X)$ ont été utilisées à cause de la similitude du numérateur et du dénominateur avec une covariance et une variance statistiques. Ainsi, la droite d'équation

$$y = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{var}(X)} x - \frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{var}(X)} \bar{X} + \bar{Y}$$

est la meilleure droite au sens des moindres carrés passant par l'ensemble des points expérimentaux $\{(x_j, y_j)\}$.

Enfin voici un dernier exercice qui nous fait revenir au problème des trajectoires de moindre temps évoqué plus haut.

□ **Exercice 1.3 : Le chien de Fermat**

Pour récupérer un canard tué par un chasseur, un chien doit aller du point $A(a, a')$ sur la terre ferme au point $B(b, b')$ dans un marécage (figure 1.2). Sur la terre il se déplace à une vitesse V et dans le marécage à une vitesse $v < V$. En quel point M doit-il aborder le marécage pour atteindre B en un temps minimum ?

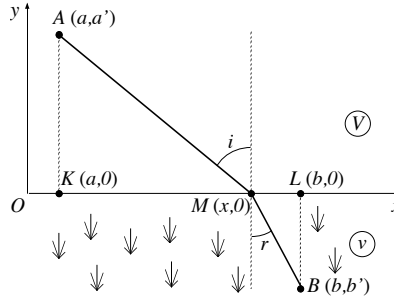


FIGURE 1.2 : Le problème du chien de chasse de Fermat.

□ **Solution :**

De A à M , le temps de parcours est $t_1 = \frac{AM}{V} = \frac{\sqrt{(x-a)^2 + a'^2}}{V}$; de même, de M à B , $t_2 = \frac{MB}{v}$ donc $t_2 = \frac{\sqrt{(x-b)^2 + b'^2}}{v}$. Le temps de parcours total est $t(x) = t_1 + t_2$; c'est cette quantité que l'on minimise en annulant sa dérivée par rapport à x :

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{V} \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + a'^2}} - \frac{1}{v} \frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2 + b'^2}} = \frac{1}{V} \frac{KM}{AM} - \frac{1}{v} \frac{ML}{MB} = 0$$

Avec $\frac{KM}{AM} = \sin i$ et $\frac{ML}{MB} = \sin r$, on obtient la loi de la réfraction : $\frac{1}{V} \sin i = \frac{1}{v} \sin r$.

Le lien avec le **principe de Fermat** est clair. Fermat a proposé son principe¹⁰ en 1662. Avec une intuition géniale, il postule que pour aller d'un point à un autre, la lumière ne choisit pas le chemin le plus court mais celui lui prenant le moins de temps. Pour toute justification, il écrit à M. Marin Cureau de la Chambre (qui penchait pour le chemin le plus court comme Héron d'Alexandrie) : *la nature opère par les moyens et les voies les plus faciles et les plus rapides*. On n'est pas loin de penser que Fermat était encore sous l'influence des idées aristotéliennes, mais pourtant il cite Galilée qui, comme on l'a vu, avait montré que le chemin de chute le plus rapide n'était en tout cas pas la ligne droite. Cet argument peut paraître assez inconsistant, car qu'y a-t-il de commun pour nous entre une bille pesante et un rayon lumineux insensible à la gravité (le pensait-on) ? Il n'en reste pas moins vrai que grâce à la seule hypothèse de moindre temps, Fermat retrouve la **loi de la réfraction** de **Snell**¹¹ avec une hypothèse correcte sur les vitesses de la lumière ; en effet, il est amené à supposer que la lumière va moins vite dans l'eau (ou le verre) que dans l'air, contrairement à **Descartes**¹² dont la démonstration bien bâtie repose sur des hypothèses que l'on sait fausses maintenant¹³. La polémique qui suivit avec Descartes n'a pas été le plus beau chapitre de l'histoire de la Physique et a laissé un souvenir peu agréable de l'auteur de *La Dioptrique*¹⁴.

1.1.3. Le paradigme du brachistochrone

La diffusion du principe de Fermat a entraîné un regain d'intérêt pour le problème de la trajectoire de moindre temps dans le champ de pesanteur étudié auparavant par Galilée. Comme de coutume dans ce genre de situation, on a donné un nom à

¹⁰ Les remarques historiques sont en grande partie inspirées du travail de Goldstine (Goldstine, 1980).

¹¹ Willebrord Snell, Leyde, 1580 – Leyde, 1626.

¹² René Descartes, La Haye en Touraine (aujourd'hui La Haye-Descartes), 1596 – Stockholm, 1650.

¹³ L'hypothèse d'une vitesse de la lumière plus grande dans des milieux denses que dans l'air était logique car on savait alors, par exemple, que le son se propage plus vite dans un solide que dans l'air. Cet argument renforçait la position de **Descartes**. **Fermat** avait noté qu'il arrivait au bon résultat avec l'hypothèse opposée : « *J'ai réitéré mes opérations algébriques diverses fois, et toujours le succès a été le même, quoique ma démonstration suppose que le passage de la lumière par les corps denses soit plus malaisé que par les corps rares, ce que je crois très vrai et indispensable, et que M. Descartes suppose le contraire* ».

¹⁴ Dans son ouvrage déjà cité dans l'Avant-Propos, *Nouvelles Perspectives en Microphysique* (Albin Michel, 1958), **Louis de Broglie** fait un commentaire assez réaliste (mais peu habituel par son côté abrupt) du créateur du Cartésianisme, commentaire peut-être dû à l'attitude finalement peu « scientifique » du grand philosophe vis-à-vis de **Fermat** : « *Esprit trop systématique, trop convaincu de la supériorité de ses principes, Descartes n'a pas apporté un grand nombre de contributions durables à la science moderne : sans doute on lui doit la constitution définitive de la géométrie analytique, les lois précises de la réflexion et de la réfraction de la lumière, d'ailleurs déjà énoncées avant lui par Snell, et sa belle théorie de l'arc-en-ciel ; mais, même en s'en tenant au domaine de la mécanique, on peut dire qu'il s'est presque constamment trompé dans ses affirmations. (...). Descartes, malgré ses erreurs nombreuses et certains aspects peu sympathiques de son caractère, reste une haute figure : bien qu'il l'ait souvent entraînée dans des voies aberrantes, il a donné à la science moderne, encore dans son enfance, une vigoureuse et ineffaçable impulsion.* »

ce problème-type. **Jean Bernoulli**¹⁵ l'a nommé « problème du chemin brachistochrone », ou « du **brachistochrone** »¹⁶, du superlatif grec $\beta\rho\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$, brachistos : « le plus court », $\chi\rho\acute{o}\nu\omicron\varsigma$, chronos : « temps »¹⁷, et dès juin 1696, alors professeur à Gröningen en Hollande, il invite la communauté internationale des « géomètres » à chercher sa solution. Il reçoit une réponse immédiate de **Leibniz**¹⁸ depuis Hanovre, datée du 16 juin. Jean Bernoulli et son frère aîné **Jacques Bernoulli**¹⁹ publient leurs solutions en mai 1697, accompagnées d'une note de **Leibniz** qui se dispense de publier la sienne qu'il considère proche de celles des Bernoulli. On apprendra par la suite que **Newton**²⁰ avait publié anonymement une solution... en janvier 1696.

Mais finalement qu'y a-t-il de nouveau ? Le point commun à tous les exemples d'optimisation abordés jusqu'ici est que l'on ne détermine pas la *fonction* optimale, mais les valeurs optimales de paramètres permettant de trouver la meilleure fonction *dans une classe prédéfinie*. Par exemple, Galilée *choisit* le cercle et définit ensuite quel cercle passant par A et C conviendra le mieux (figure 1.1). Il en est de même pour la méthode des moindres carrés où le modèle est défini et où l'optimisation se réduit au calcul des dérivées d'une simple fonction $S(\beta_k)$. Dans l'exemple du chien, les trajectoires de moindre temps en milieu homogène étant des droites (figure 1.2), la solution se réduit à la détermination du point M par une simple dérivée. Le problème du brachistochrone, lui, est plus délicat : il s'agit de trouver la trajectoire (une fonction $y(x)$) qui rendra minimum un temps t (un réel), en d'autres termes déterminer le minimum de $t[y]$: quantité numérique dépendant d'une fonction.

1.2. Fonctionnelles

Le problème du chemin suivi par la lumière, ou celui du brachistochrone, est identique au mien quand je vais à mon bureau : il me faut déterminer la fonction $y(x)$ (trajectoire) qui rendra minimum le temps de parcours t . La quantité $t[y]$ s'appelle une **fonctionnelle**, sa « variable » y est en fait une fonction ; pour distinguer une « fonctionnelle » d'une « fonction » habituelle $y(x)$, on l'écrit avec des crochets : $t[y]$. Une bonne façon de réaliser ce qu'est une fonctionnelle est de revenir au paradigme du **brachistochrone**.

¹⁵ Jean Bernoulli, Bâle, 1667 – Bâle, 1748.

¹⁶ On dit aussi « la brachistochrone » pour « courbe brachistochrone » et on écrit parfois *brachystochrone*, peu conforme au superlatif grec.

¹⁷ Leibniz voulait l'appeler « tachystoptotam », du grec $\tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\sigma\tau\alpha\tau\omicron\varsigma$, tachystatos : « le plus rapide », et $\pi\acute{\iota}\pi\tau\epsilon\iota\omega$, pitein : « tomber » ; le choix de « brachistochrone » n'est donc pas si désastreux.

¹⁸ Gottfried Wilhelm Leibniz, Leipzig, 1646 – Hanovre, 1716.

¹⁹ Jacques Bernoulli, Bâle, 1654 – Bâle, 1705.

²⁰ Isaac Newton, Woolsthorpe, 1643 – Londres, 1727.

1.2.1. Un premier exemple de fonctionnelle

Dans le plan vertical, une bille de masse m est lâchée sans vitesse initiale du point $O(0,0)$. Quelle est sa trajectoire pour atteindre le plus rapidement possible le point $A(a,b)$ (figure 1.3)?

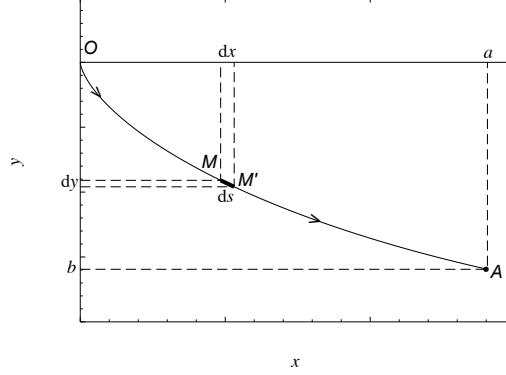


FIGURE 1.3 : Le problème du (de la) brachistochrone.

Calculons le temps infinitésimal pour que la bille aille de $M(x, y)$ au point infiniment voisin $M'(x + dx, y + dy)$: si la vitesse en M est $v(M)$, la distance parcourue étant $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, ce temps est $dt = \sqrt{dx^2 + dy^2} / v(M)$. Les frottements étant négligés, la vitesse en M se déduit de la conservation de l'énergie mécanique dans cette chute d'une hauteur $|y| = -y$: $-mgy = \frac{1}{2}mv^2$ et $v(M) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{-2gy}$.

On posera $u(x) = -y(x)$, donc $dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{dx^2 + du^2}{u}}$. Avec $du = u'dx$, il vient $dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1+u'^2}{u}} dx$; le temps total de chute de O à A est donc :

$$t[u] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1+u'^2}{u}} dx \quad (1.2.1)$$

$y(x) = -u(x)$ est la fonction décrivant la trajectoire suivie de O à A dans le plan Oxy . Le problème est de déterminer la fonction $u(x)$ qui rend minimum la quantité numérique $t[u]$.

La notation $t[u]$ est importante. Elle insiste sur le fait qu'une fonctionnelle est une quantité dépendant d'une fonction. Mais on remarque aussi que x n'y apparaît pas : en effet, une fois l'intégrale (1.2.1) effectuée, la variable muette x a disparu. La quantité t dépend donc de la fonction u et uniquement d'elle. Dans le résultat final apparaîtront les bornes d'intégration qui pourront avoir une importance selon le type de traitement (voir chapitre 2). La détermination de la trajectoire optimale est donc un problème qui sort du cadre des optimisations précédentes : il faut pouvoir calculer la dérivée de la fonctionnelle t par rapport à la fonction u , comme on le verra au chapitre 2.

Le résultat trouvé au XVII^e siècle est un arc de **cycloïde** de tangente verticale en O . Une cycloïde est la trajectoire d'un point situé à la périphérie d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite dans un mouvement plan sur plan ; la figure 1.4 montre le dessin de la cycloïde du brachistochrone publié avec sa solution en 1697 par Jean Bernoulli (attention, ici A est le point de départ).

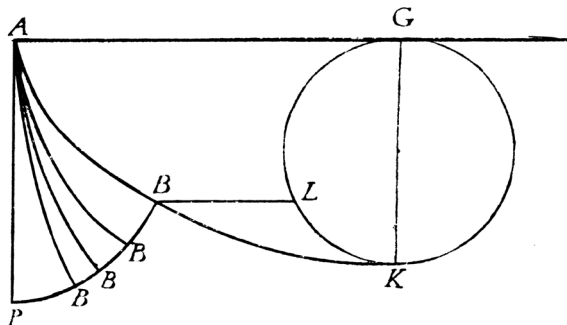


FIGURE 1.4 : Cycloïde, trajectoire (ABK) du point K sur un cercle roulant sur la droite AG. Le cercle est sous la droite pour les besoins de l'étude du brachistochrone.
(Jean Bernoulli, 1697)

Dans le cas de la figure 1.4, les équations paramétriques de la cycloïde sont :

$$\begin{cases} x = R(\theta - \sin \theta) \\ y = -R(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (1.2.2)$$

où R est le rayon du cercle et θ l'angle décrivant sa rotation autour de son centre dans le mouvement de roulement ($\theta = 0$ si K est en A) ; x est la coordonnée horizontale de K et y sa coordonnée verticale comptée positivement vers le haut²¹.

1.2.2. Euler et Lagrange : naissance du calcul variationnel

En 1744, **Euler**²² résout le problème de l'optimisation d'une fonctionnelle de la forme

$$J[u] = \int_a^b F[u(x), u'(x), x] \, dx \quad (1.2.3)$$

où $F[u(x), u'(x), x]$ est un intégrant dépendant de la fonction $u(x)$, de sa dérivée première et de la variable x . Il aboutit à ce que l'on nomme de nos jours **l'équation d'Euler-Lagrange**.

En 1755 enfin, un jeune homme de 19 ans, **Lagrange**,²³ propose sa « méthode des variations » comme alternative à celle d'Euler dans les problèmes d'optimisation de fonctionnelles. Euler, enthousiasmé par sa simplicité, baptisera cette branche des mathématiques « **Calcul Variationnel** » en hommage à Lagrange. Cette méthode de résolution analytique générale qui est enseignée de nos jours est effectivement bien plus rapide et efficace que celle d'Euler.

²¹ Il n'est pas rare de voir la notation y pour la coordonnée horizontale (qui, par ailleurs, est parfois nommée « ordonnée ») et x , souvent compté positivement vers le bas, pour la coordonnée verticale (Euler, 1770 ; Goldstine, 1980).

²² Leonhard Euler, Bâle, 1707 – Saint-Petersbourg, 1783.

²³ Giuseppe Lodovico Lagrangia, puis Joseph-Louis comte de Lagrange Tournier, Turin, 1736 – Paris, 1813. Ses œuvres complètes sont en ligne (Lagrange, *Œuvres*, 1873).

1.3. Principes variationnels

1.3.1. Principes de Fermat, de Maupertuis et mécanique analytique de Lagrange

Revenons au point de départ de cette discussion sur l'optimisation et les règles d'extremum. Avec son **principe**, **Fermat** avait montré qu'il existait une façon simple d'expliquer certains phénomènes qui, sinon, demandaient une analyse délicate et, comme on l'a vu avec la démonstration de Descartes, hasardeuse. Or à cette époque le lien entre optique et mécanique allait de soi²⁴ ; on a donc cherché un principe d'extremum relié à celui de Fermat pour interpréter les phénomènes mécaniques. C'est une des raisons qui ont poussé **Euler** à s'intéresser à l'optimisation des fonctionnelles²⁵, mais l'histoire dit que c'est **Maupertuis**²⁶ qui, le premier, a proposé son **principe de moindre Action** pour la mécanique²⁷. Il utilise une notion d'**Action**²⁸ S_0 , fonctionnelle dépendant des coordonnées des corps en mouvement : c'est une intégrale sur une variable d'espace de la *vis viva* ou « force vive »²⁹ (double de notre énergie cinétique) et non sur le temps comme l'**Action de Hamilton**.

Par la suite **Lagrange** revient sur ce principe, le clarifie, le généralise aux mouvements dans un potentiel quelconque, et publie sa **Mécanique Analytique** (1788) : c'est l'apothéose de la **mécanique lagrangienne** où les mouvements des corps sont considérés comme résultant d'un principe d'extremum, un nouveau **principe variationnel**. Une certaine unité est ainsi faite entre la mécanique et l'optique sans pour autant qu'un lien soit clairement établi entre les deux principes, malgré les efforts de Maupertuis.

²⁴ Malgré leurs divergences, Fermat et Descartes considèrent tous les deux la lumière comme un flot de particules ; il s'agit dans les deux cas d'approches corpusculaires de la lumière, et aucune idée ondulatoire n'intervient dans les démonstrations. Le fait que la méthode de Fermat conduite à des résultats exacts contrairement à celle de Descartes tient à leur nature : alors que Descartes effectue une approche mécanique détaillée qui pêche par ses hypothèses, Fermat reste dans le cadre plus général de la cinématique.

²⁵ « *Puisque tous les effets de la Nature suivent une certaine loi de maxima ou de minima, il n'y a aucun doute que, sur les trajectoires courbes que les projectiles décrivent sous l'action de certaines forces, une propriété de maximum ou de minimum devrait être la règle.* » ((Euler, 1770), 2^d Appendice « *Sur le mouvement des projectiles dans un milieu non résistant, déterminé par la méthode des maxima et minima* »). Ce texte est souvent cité comme le véritable acte de naissance du **principe de moindre Action**.

²⁶ Pierre Louis Moreau de Maupertuis, Saint-Malo, 1698 – Bâle, 1759.

²⁷ « *Ce n'est que dans ces derniers temps qu'on a découvert une loi dont on ne saurait trop vanter la beauté & l'utilité, c'est que dans tout système de corps élastiques en mouvement, qui agissent les uns sur les autres, la somme des produits de chaque masse par le carré de la vitesse, ce qu'on appelle la force vive, demeure inaltérablement la même. En méditant sur la nature de l'équilibre, j'ai cherché s'il n'y auroit pas dans la statique quelque loi de cette espèce ; s'il n'y auroit pas pour les corps tenus en repos par des forces, une loi générale, nécessaire pour leur repos ; & voici celle que j'ai trouvée que la Nature observe.* » (Maupertuis, Mémoire à l'Académie des Sciences, 20 février 1740). On a compris qu'en ce qui concerne la paternité de cette idée, un doute subsiste pour certains entre Maupertuis et Euler (Goldstine, 1980), ce dernier ayant donné, avec Lagrange, la formulation exacte de ce qui sera le **principe de moindre Action**.

²⁸ De nos jours on dit **Action raccourcie**, **Action réduite** ou **Action de Maupertuis** car ce n'est pas encore celle de **Hamilton**.

²⁹ Notion due à **Leibniz**. Le **principe de Maupertuis** s'inspire aussi de la « *Conservatio virium vivarum* » de **Jean Bernoulli**. Selon le type d'énergie potentielle, l'extrémalisation de cette fonctionnelle permet d'obtenir des trajectoires correctes.

L'idée dominante de cette fin du XVIII^e siècle est que tout ce qui est mathématisé est sûr. Les **principes variationnels** assurent donc une légitimité à la mécanique et à l'optique, et offrent de plus une unité de conception de la physique, bien que l'on ne comprenne pas très bien le sens de cette optimisation ni la signification de l'« Action ». Mais leur validité est confirmée chaque fois que les calculs qu'ils exigent peuvent être techniquement effectués.

Le XIX^e siècle débute par un événement presque inaperçu : en 1801, **Young**³⁰ revient à l'optique ondulatoire, alors mal mathématisée et ne s'appuyant sur aucun principe vraiment reconnu. En *philosophie naturelle*, les phénomènes de diffraction et d'interférence décrits par **Grimaldi**³¹ puis **Hooke**³² (*Micrographia* (1665)), sont plus ou moins mis sur le même plan que la botanique, malgré l'hypothèse ondulatoire prometteuse de **Huygens**^{33,34}. Young énonce son **principe d'interférence**³⁵ sur la superposition des ondes... Il est très mal reçu.

En 1820, sans avoir eu connaissance des travaux de Young, **Fresnel**³⁶ et **Arago**³⁷ reviennent à l'optique ondulatoire, et une querelle présentant des similitudes avec celle de Descartes-Fermat les oppose alors à **Laplace**³⁸ et **Biot**³⁹, tenants de l'hypothèse corpusculaire. Fresnel et Arago apportent la confirmation mathématique de la nature ondulatoire en calculant les images de diffraction et interprètent l'optique géométrique en l'absorbant dans leur théorie. C'est une avancée décisive pour la théorie ondulatoire : la lumière devient une onde, son aspect corpusculaire n'étant qu'un comportement particulier décrit par une équation que j'appellerai ici **équation du rayon de Fresnel**. Cette parenthèse optique est importante : le **principe variationnel de Fermat** n'explique plus toute l'optique ; ce n'est plus qu'une technique spécialisée à un domaine très particulier : l'optique géométrique.

1.3.2. Principe de moindre Action de Hamilton

Par contre le principe variationnel régissant la mécanique est approfondi. En 1834, **Hamilton**⁴⁰ reprend les travaux de Lagrange et propose une nouvelle approche : ce sera la **mécanique hamiltonienne**. L'amélioration semble technique, mais on réalise

³⁰ Thomas Young, Milverton, 1773 – Londres, 1829.

³¹ Francesco Maria Grimaldi, Bologne, 1618 – Bologne, 1663.

³² Robert Hooke, Île de Wight, 1635 – Londres, 1703.

³³ Christian Huygens, La Haye, 1629 – La Haye, 1695.

³⁴ **Principe d'Huygens**, *Traité de la lumière*, 1678. Dans son principe, **Huygens** postule que la lumière progresse comme les ondes sur l'eau, suivant des fronts d'onde ; chaque front d'onde au temps $t + \Delta t$ est l'enveloppe des fronts produits par des ondelettes issues du front d'onde précédent au temps t . Ce principe, précisé par Fresnel (principe d'Huygens-Fresnel), est toujours utilisé dans les calculs pratiques de diffraction et d'interférence ; il apparaît en filigrane dans le concept d'intégrale de chemin de Feynman. Huygens meurt en 1695, isolé et déçu de n'avoir pas vu sa théorie reconnue.

³⁵ Sous condition de cohérence, ce sont les vibrations lumineuses qui se superposent et non leur intensité.

³⁶ Augustin Jean Fresnel, Chambrais (aujourd'hui Broglie), 1788 – Ville-d'Avray, 1827.

³⁷ Dominique François Arago, Estagel, 1786 – Paris, 1853.

³⁸ Pierre-Simon Laplace, Beaumont-en-Auge, 1749 – Paris, 1827.

³⁹ Jean-Baptiste Biot, Paris, 1774 – Paris, 1862.

⁴⁰ Sir William Rowan Hamilton, Dublin, 1805 – Dunsink, 1865.

rapidement qu'elle apporte un nouveau point de vue enrichissant de la théorie variationnelle de la mécanique. En particulier les liens entre les symétries géométriques et la conservation de certaines quantités dynamiques (énergie, moments cinétiques, quantités de mouvement) y deviennent plus lumineux, et on sait l'importance que revêtent les « conservations » dans la construction d'une théorie physique ou la solution d'un problème particulier. De plus, par la simplification qu'elle apporte, cette nouvelle formulation conduit plus facilement au traitement des systèmes dynamiques à très grand nombre de particules et à la **Physique statistique**. Le principe d'optimisation est donné sous sa forme définitive : le **principe de moindre Action de Hamilton**, ou **principe variationnel de Lagrange-Hamilton**, conduit à une théorie remarquablement bien structurée mathématiquement : la **mécanique analytique**.

Cette théorie est basée sur la fonctionnelle **Action de Hamilton** S , intégrale de la fonction de Lagrange $L = T - V$ ou **lagrangien**, différence entre les énergies cinétique T et potentielle V du système dynamique ; mais curieusement c'est uniquement le lagrangien qui est utilisé dans la pratique, S n'intervenant pratiquement jamais dans les calculs, sinon par le fait qu'elle doit être optimisée. En 1836, une étude plus approfondie de S elle-même a conduit Hamilton et **Jacobi**⁴¹ à établir une équation (**l'équation de Hamilton-Jacobi**) qui a de surprenantes similitudes avec l'équation du rayon de Fresnel en optique. Hamilton l'a bien remarqué, mais la Physique de cette époque n'était pas prête pour en tirer profit. L'équation de Hamilton-Jacobi aura d'immenses conséquences un siècle plus tard.

1.3.3. Mécanique ondulatoire et mécanique quantique

À la fin du XIX^e siècle, la Physique était sensée tout expliquer ; nombreux étaient ceux qui pensaient que seuls subsistaient quelques problèmes pratiques. Pourtant des questions se posaient toujours : la divergence théorique de l'énergie rayonnée par le corps noir, l'interprétation de l'effet photoélectrique découvert par **Hertz**⁴² en 1887, celle des raies spectroscopiques étudiées dès le premier quart du XIX^e siècle par **Fraunhofer**⁴³ et incompatibles avec l'idée d'énergie continue, et enfin l'infructueuse recherche d'un *éther* sensé être le support des vibrations lumineuses comme l'eau de la mer est celui des vagues, problème lié à celui de l'invariance de la vitesse c de la lumière dans différents référentiels. On sait comment en 1900 **Planck**⁴⁴ a apporté une solution au problème du corps noir par sa théorie des quanta d'énergie et comment, en 1905, **Einstein**⁴⁵ interpréta l'effet photoélectrique en reprenant l'hypothèse de quantification de Planck, puis, la même année, proposa sa théorie de la relativité restreinte permettant d'expliquer l'invariance de c et de s'affranchir de l'*éther*⁴⁶.

⁴¹ Carl Gustav Jacob Jacobi, Potsdam, 1804 – Berlin, 1851.

⁴² Heinrich Hertz, Hambourg, 1867 – Bonn, 1894.

⁴³ Joseph de Fraunhofer, Straubing, 1787 – Munich 1826.

⁴⁴ Max Planck, Kiel, 1858 – Göttingen 1947.

⁴⁵ Albert Einstein, Ulm, 1879 – Princeton, 1955.

⁴⁶ La mécanique relativiste obéit aussi au principe variationnel de Lagrange-Hamilton : il suffit de modifier l'expression de l'Action de façon adéquate. On reste étonné devant la puissance de ce principe qui a son origine deux siècles et demi auparavant.

En 1924, la conjonction de la relativité et des hypothèses de Planck-Einstein sur les quanta de lumière (en particulier la relation $E = h\nu$ liant l'énergie d'un photon à sa fréquence par la constante de Planck h) amène **de Broglie**⁴⁷ à réexaminer les **équations de Fresnel** et de **Hamilton-Jacobi** pour réaliser que si la lumière a deux aspects, ondulatoire et corpusculaire (ce dernier étant une manifestation réductrice du premier), alors il pourrait en être de même pour la matière. Celui que nous voyons, décrit par la mécanique classique dont le formalisme de Lagrange-Hamilton est une des approches possibles⁴⁸, n'est lui aussi qu'une réduction de son aspect général, ondulatoire : c'est la théorie de la **mécanique ondulatoire**⁴⁹ qui associe à toute particule d'impulsion p une longueur d'onde $\lambda = h/p$ caractérisant son comportement ondulatoire par l'intermédiaire d'une **fonction d'onde** $\psi(\vec{r}, t)$. En 1926, **Schrödinger**⁵⁰ démontre l'équation régissant le mouvement dans cette nouvelle mécanique.

Ainsi de Broglie avait trouvé le lien que Maupertuis avait cherché entre mécanique et optique. Restait à vérifier expérimentalement le caractère ondulatoire de la matière ; c'est ce qu'ont réalisé en 1927-28 **Davisson**⁵¹ et **Germer**⁵² aux États-Unis et **Thomson**⁵³ en Grande-Bretagne, en mettant en évidence la diffraction d'un faisceau d'électrons par un cristal. Fondamentalement, ce sont donc les **principes variationnels** qui ont conduit à l'unification de la mécanique et de l'optique : il n'existait plus désormais qu'un seul principe régissant les comportements dynamiques de la matière et des ondes électromagnétiques. L'aspect à la fois ondulatoire et corpusculaire conduit à la notion de « dualité onde-corpuscule ».

La mécanique ondulatoire devient rapidement mécanique quantique et, abandonnant souvent son origine relativiste⁵⁴, a immédiatement d'intéressantes applications comme la chimie quantique. En 1948, dans un remarquable travail, **Feynman**⁵⁵ revient sur les idées fondamentales. Comme dans une rétrospective de trois siècles d'efforts, utilisant leurs idées il convie Fermat, Huygens, Maupertuis, Euler, Lagrange, Young, Fresnel, Hamilton au calcul des **d'intégrales de chemin** (*path integrals*) donnant une vision nouvelle du principe variationnel de Lagrange-Hamilton. En prenant pour illustration l'expérience d'interférences des trous d'Young, il montre comment toute fonction d'onde $\psi(\vec{r}, t)$ d'une particule au point $\vec{r}$ et au temps t peut se calculer comme la somme de termes attachés chacun à une trajectoire possible de la particule pour arriver en $\vec{r}$ au temps t , de la même façon que, selon Fresnel, une « vibration » optique en un point $\vec{r}$ est la somme de vibrations élémentaires correspondant à tous

⁴⁷ Louis Victor prince de Broglie, Dieppe, 1892 – Paris, 1987.

⁴⁸ L'approche purement Newtonienne est encore de nos jours la plus communément utilisée.

⁴⁹ « *Er hat eine Ecke des grossen Schleiers gelüftet* » (*Il a soulevé un coin du grand Voile*), écrit en 1924 Albert Einstein à Paul Langevin qui lui avait fait parvenir la thèse de Louis de Broglie sur sa « Mécanique Ondulatoire ». **Louis de Broglie** a soutenu sa thèse en Sorbonne le 25 novembre 1924.

⁵⁰ Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger, Erdberg, 1887 – Vienne, 1961.

⁵¹ Clinton Joseph Davisson, Bloomington (Illinois), 1881 – Charlottesville (Virginie), 1958.

⁵² Lester Germer, Chicago, 1896 – Millington (New Jersey), 1971.

⁵³ Sir George Paget Thomson, Cambridge, 1892 – Cambridge, 1975.

⁵⁴ Dans l'émergence de la mécanique ondulatoire, la relativité a été un élément essentiel que Louis de Broglie brandira pour contredire les tenants de l'interprétation probabiliste de l'École de Copenhague. Actuellement, pourtant, c'est cette interprétation qui prévaut, et on fait une distinction entre mécanique quantique non relativiste et mécanique quantique relativiste ou théorie quantique des champs.

⁵⁵ Richard Phillips Feynman, New York, 1918 – Los Angeles, 1988.

les chemins que la lumière a pu parcourir pour arriver là ; on reconnaît ici l'idée de **Huygens**. En fin de compte, la probabilité de trouver la particule en $\vec{r}$ au temps t est le carré du module de $\psi(\vec{r}, t) : |\psi(\vec{r}, t)|^2$. Dans cette présentation la forme des vibrations élémentaires (ou *termes de chemin*) constitutives de l'onde finale est $C^{\text{ste}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(\vec{r}, t) \right\}$, où $S(\vec{r}, t)$ est simplement l'Action classique. Ce calcul est fait dans un esprit « ondulatoire », il ne faut donc pas s'étonner de le voir correctement décrire des phénomènes typiquement quantiques comme les interférences d'électrons ; mais ce qui est remarquable, c'est que si l'on considère un phénomène classique pour lequel toute Action est très grande devant $\hbar$, alors Feynman montre que seule la trajectoire correspondant à une Action stationnaire (minimum par exemple) contribuera à $\psi(\vec{r}, t)$ de façon significative, au sens des probabilités.

L'unification de l'optique et de la mécanique, la justification des principes de Fermat et de Hamilton ont un prix : l'intervention des probabilités. Les phénomènes mécaniques classiques observés sont tels parce que la probabilité qu'ils se produisent est énorme⁵⁶. Ainsi les principes d'optimisation vieux comme la pensée humaine trouvent leur justification dans les probabilités. Du XVII^e au XIX^e siècle, on a attaché une importance fondamentale à la « méthode des variations » hissée au rang de « principe », alors que les probabilités n'avaient qu'un rôle utilitaire⁵⁷. De nos jours les conceptions sont inversées.

1.4. Conclusion

Cette introduction a pour but de permettre au lecteur de situer dans le temps les différentes notions introduites tout au long de cet ouvrage. La fin (provisoire) de cette histoire peut paraître décevante eu égard aux méthodes et **principes variationnels** ; mais il ne faut pas perdre de vue leur importance pratique et théorique. Il ne faut pas oublier que tout cours de **théorie quantique des champs** débute inmanquablement par un chapitre lagrangien et que le **principe de Fermat** est de nos jours l'unique moyen pour les industriels de calculer sur ordinateur la configuration des optiques compliquées, comme l'objectif grand angle de votre appareil photographique. Ce principe, à l'origine des idées de **Maupertuis**, **Euler**, **Lagrange** et **Hamilton** pour le **principe de moindre Action** qui, lui-même, a inspiré **Louis de Broglie** pour sa **mécanique ondulatoire**, a finalement trouvé sa place grâce à **Feynman** dans le cadre général de la **mécanique quantique**. **Galilée** a touché un coin du voile en s'intéressant au problème qui n'était pas encore le **brachistochrone**, mais il semblerait juste de dire que c'est **Fermat** qui a commencé à le soulever.

⁵⁶ La même idée existe en thermodynamique classique, mais dans ce cas à cause du très grand nombre de particules constituant un objet macroscopique (le nombre d'Avogadro) ; il n'y a alors rien de quantique : c'est la **loi des grands nombres** (Féménias, 2003).

⁵⁷ **Laplace**, qui a tant contribué à la théorie des probabilités, n'a jamais caché qu'il n'utilisait cet outil que contraint et forcé par la limitation des moyens de calcul de son époque. Il a toujours considéré cette branche des sciences comme très inférieure aux mathématiques et à la physique. Paradoxalement, à l'époque du calcul électronique les probabilités sont devenues la base même des théories physiques.

Pour conclure, je lui laisse dire ce qu'il pensait de son hypothèse de *moindre-temps*⁵⁸ :

« Je crois avoir souvent dit à Monsieur de la Chambre et à vous-même que je ne prétends pas, et n'ai jamais prétendu être dans l'intime confiance de la Nature. Elle a des voies obscures et cachées que je n'ai jamais entrepris de pénétrer. Je voudrais seulement lui avoir offert une petite aide géométrique au sujet de la réfraction, si tant est qu'elle en eût besoin. Mais puisque vous m'assurez, Monsieur, qu'elle peut mener ses affaires sans icelle, et qu'elle se satisfait de suivre la voie qui lui a été prescrite par Monsieur Descartes, je vous abandonne volontiers ma prétendue conquête de la physique ; et je serais satisfait que vous me permettiez de conserver mon problème de géométrie — pur et « in abstracto », grâce auquel l'on peut trouver le chemin d'un objet se déplaçant à travers deux milieux différents et tentant d'effectuer son mouvement le plus rapidement possible ».

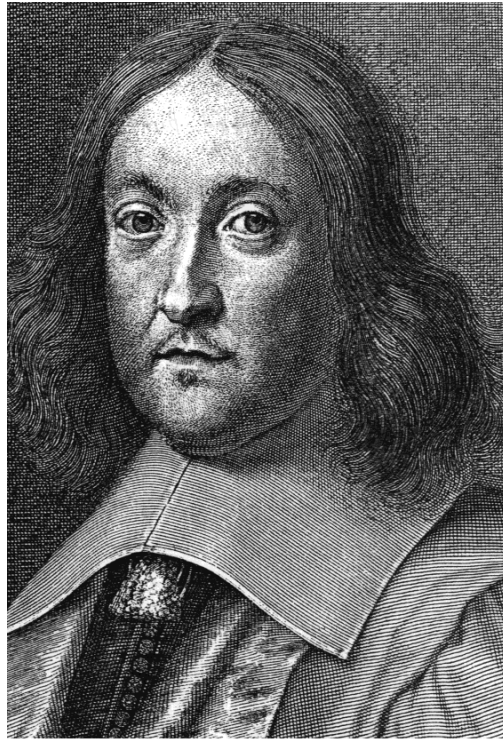


FIGURE 1.5 : Pierre de Fermat (Beaumont de Lomagne, 1601 – Castres, 1665).
Avec l'autorisation de la Mairie de Beaumont de Lomagne (Tarn et Garonne, France).

⁵⁸ Réponse du 21 mai 1662, en pleine querelle, à M. Clerselier, partisan de **Descartes**.

Chapitre 2

Équation d'Euler-Lagrange

L'essentiel est dans ce chapitre, particulièrement dans les sections 2.1 et 2.2. L'équation d'Euler-Lagrange est démontrée dans l'esprit de Lagrange, par variations (1755). Cela fait, il ne s'agira plus jusqu'au chapitre 6 que de notes, généralisations et applications. La compréhension de ces sections est donc essentielle. La notion de dérivée fonctionnelle exposée en fin de chapitre, plus puissante, n'est pas indispensable dans les chapitres suivants.

2.1. Variation d'une fonctionnelle

2.1.1. Le cadre de la démonstration

La condition que doit vérifier $u(x)$ pour rendre $J[u] = \int_{x=x_A}^{x_B} F[u(x), u'(x), x] dx$ extrémale sera déterminée par le fait qu'en un extremum une petite variation $\delta u(x)$ de $u(x)$ n'entraîne pas de variation de J au premier ordre. Raisonnons sur la figure 2.1 où sont représentés différents chemins, (γ_1) , (γ_2) , (γ_3) , (γ_4) , associés à différentes fonctions $u(x)$, permettant d'aller du point fixe A au point fixe B .

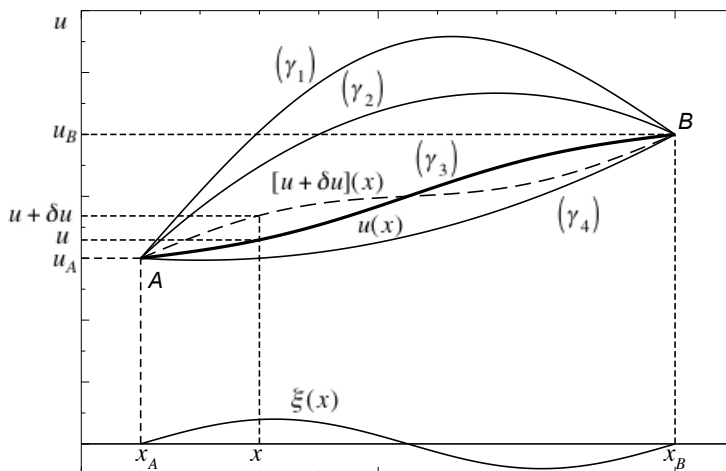


FIGURE 2.1 : Chemins (γ_1) , (γ_2) , (γ_3) , (γ_4) pour aller du point fixe A au point fixe B .

Supposons que le chemin (γ_3) tracé en gras et associé à la fonction $u(x)$, soit **stationnaire**; ceci signifie que si l'on choisit un chemin infiniment voisin associé à $[u + \delta u](x)$ (en tirets), la variation δJ de la fonctionnelle sera nulle au premier ordre. Ce raisonnement est analogue à celui fait pour une fonction $f(x)$ habituelle : en un point

stationnaire la dérivée de $f(x)$ s'annule, donc $df = 0$, df représentant la variation au premier ordre de la fonction f .

La variation δu est une variation de fonction, c'est donc aussi une fonction. On peut représenter δu par $\epsilon \xi$, le facteur ϵ étant là pour rappeler qu'il s'agit d'une petite variation et $\xi(x)$ étant une fonction *quelconque* de x (ce sera important dans la suite). Sur la figure 2.1 on a représenté au bas du graphe la fonction $\xi(x)$ (pas nécessairement petite) associée à $\delta u(x)$. Pour chaque valeur de x , il y a une variation $\delta u(x)$ (sur la figure on note une valeur de x pour laquelle il n'y a pas de variation de $u(x)$, la fonction $\xi(x)$ – donc $\delta u(x)$ – s'annulant pour cette valeur). Compte tenu de l'infinité des choix de ξ dans l'espace des fonctions, les possibilités de variation de u sont infinies ; le facteur ϵ fixe ensuite l'amplitude de la variation. La situation est donc très différente de celle de la variation d'une fonction $f(x)$ où on n'a guère que le choix du signe de dx et de son amplitude ! Notons toutefois que dans le **problème variationnel à points extrêmes fixés**, le choix de ξ est limité aux fonctions s'annulant aux extrémités du domaine ; ceci est représenté sur la figure 2.1 : quel que soit le chemin suivi, celui-ci devra passer en A et en B , d'où les conditions supplémentaires :

$$\delta u(x_A) = 0 \quad \text{et} \quad \delta u(x_B) = 0 \quad \text{ou} \quad \xi(x_A) = 0 \quad \text{et} \quad \xi(x_B) = 0 \quad (2.1.1)$$

Pour bien comprendre la suite, noter que chaque variation de $u(x)$ à $u(x) + \delta u(x)$ se fait à x fixé (*verticalement* sur la figure 2.1) : x ne varie pas, seule u , variable de J , varie.

2.1.2. Variation de la fonctionnelle $J[u]$

Calculons la fonctionnelle J lorsque u est modifiée en $u + \delta u$: c'est l'analogue du calcul de $f(x + dx) = f(x) + df$ pour les fonctions, et par analogie on notera $J[u + \delta u] = J[u] + \delta J$:

$$J[u + \delta u] = J[u] + \delta J = \int_{x=x_A}^{x_B} F[u(x) + \delta u(x), u'(x) + \delta u'(x), x] \, dx \quad (2.1.2)$$

La nouvelle dérivée est $[u(x) + \delta u(x)]' = u'(x) + [\delta u(x)]'$; la variation de la dérivée (notée $\delta u'(x)$ dans (2.1.2)) est donc $[\delta u(x)]'$, dérivée de la variation. Développons cette expression au premier ordre par rapport aux deux arguments de F qui ont varié, $u(x)$ et $u'(x)$:

$$J[u] + \delta J = \int_{x=x_A}^{x_B} \left[F(u, u', x) + \delta u \frac{\partial F}{\partial u} + \delta u' \frac{\partial F}{\partial u'} \right] dx \quad (2.1.3)$$

Le terme d'ordre zéro $F(u, u', x) \, dx$ donne $J[u]$ de la même façon qu'apparaît d'abord $f(x)$ dans $f(x + dx) = f(x) + f'(x) \, dx$; la variation δJ est donc issue des deux autres termes. On note que le 3^e terme est proportionnel à $\delta u'$ et non à δu ; par analogie avec $df = f'(x) \, dx$, il est nécessaire de se ramener à une expression de δJ proportionnelle à δu . C'est la première difficulté de la démonstration ; la solution est une intégration par parties :

$$\int_{x=x_A}^{x_B} \delta u' \frac{\partial F}{\partial u'} \, dx = \left[\delta u \frac{\partial F}{\partial u'} \right]_{x=x_A}^{x_B} - \int_{x=x_A}^{x_B} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \delta u \, dx \quad (2.1.4)$$

Il faut bien comprendre ces notations ; jusqu'à présent, nous avons traité F comme une fonction de 3 variables : u , u' et x ; F pouvait donc avoir des dérivées partielles par rapport à chacune d'elles. Mais dans l'intégration du premier membre de (2.1.4), F doit être considérée comme une fonction de x seul, en tenant compte du fait que x apparaît aussi dans $u(x)$ et dans $u'(x)$.⁵⁹ La dérivée utilisée dans l'intégration par parties doit donc être comprise comme une dérivée totale par rapport à x , c'est-à-dire une dérivée dans laquelle on doit tenir compte de tous les x , explicites ou cachés dans u et u' . Finalement la variation δJ s'écrit :

$$\delta J = \left[\delta u \frac{\partial F}{\partial u'} \right]_{x=x_A}^{x=x_B} + \int_{x=x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] \delta u \, dx \quad (2.1.5)$$

2.2. Résolution dans le cas des points extrêmes fixés

2.2.1. Équation d'Euler-Lagrange

Dans le **problème à points extrêmes fixés**, δu s'annule en x_A et en x_B ; le terme tout intégré de (2.1.5) ne contenant que deux termes $\delta u \frac{\partial F}{\partial u'}$ calculés justement en ces points est donc nul. En ce qui concerne l'intégrale, elle doit s'annuler *quelque soit la variation* δu parmi l'infinité des possibilités dont on dispose ; la seule solution possible est donc l'annulation du terme entre crochets de l'intégrant. Bien comprendre ce raisonnement est la seconde difficulté de la démonstration.⁶⁰ Finalement, l'équation que doit vérifier $u(x)$ entre x_A et x_B est :

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0 \quad (2.2.1)$$

C'est l'**équation d'Euler-Lagrange**. Dans le cas des points extrêmes $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ fixés, elle est complétée par les **conditions aux limites** :

$$\delta u(x_A) = \delta u(x_B) = 0 \quad \text{ou} \quad u(x_A) = y_A \quad \text{et} \quad u(x_B) = y_B \quad (2.2.2)$$

2.2.2. Remarques et cas particuliers

2.2.2.1. Erreurs à éviter

Si l'on n'a pas bien assimilé l'équation d'Euler, on peut hésiter sur certains détails. Un argument dimensionnel évite de faire des erreurs inexcusables pour un physicien : la dimension du premier terme $\frac{\partial F}{\partial u}$ est $[F][u]^{-1}$; celle du second doit être la même :

⁵⁹ En toute rigueur, il faudrait donner un autre nom à cette fonction. On écrirait les choses ainsi : pour l'intégration par parties, poser $\frac{\partial F(u, u', x)}{\partial u'} = G(x)$ puis $dU = \delta u' \, dx$ (d'où $U = \delta u$) et $V = G(x)$ (d'où $dV = G'(x) \, dx$). Dans $G'(x)$ on reconnaît $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right)$.

⁶⁰ Raisonnons par l'absurde : si le terme entre crochets de l'intégrant n'est pas nul dans un intervalle $[\alpha, \beta] \subset [x_A, x_B]$, il suffit de choisir une variation δu non nulle dans $[\alpha, \beta]$ et de signe adapté à celui du crochet (ce qui est loisible compte tenu de l'arbitraire sur δu) pour que l'intégrale de (2.1.5) ne s'annule pas. La seule possibilité d'annulation pour tout δu est donc l'annulation du crochet lui-même.

$$[u'] = \left[\frac{du}{dx} \right] = [u][x]^{-1}, \text{ donc } \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] = [x]^{-1} \times [F] \times \left(\frac{[u]}{[x]} \right)^{-1} = [F][u]^{-1}.$$

Ceci permet d'éviter des non-sens comme $\frac{\partial F}{\partial u'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial u'} = 0$ ou $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{dF}{dx} = 0$. Ce moyen mnémotechnique ne met évidemment pas à l'abri d'erreurs comme $\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0$ ou $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0$.

2.2.2.2. L'équation d'Euler-Lagrange est une équation différentielle

Toutefois son caractère différentiel ne provient pas de la présence des dérivées $\frac{\partial F}{\partial u}$ et $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right)$, mais de celle de $u'(x)$ dans F ; en effet :

• Cas particulier n°1

Si F ne dépend que de $u(x)$ et de x et non des dérivées de $u(x)$, la dérivée partielle de $F(u(x), x)$ par rapport à u sera une fonction $\Phi(u(x), x)$ et le terme $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right)$ sera nul puisque $\frac{\partial F}{\partial u'} = 0$. L'équation d'Euler-Lagrange devient donc $\Phi(u(x), x) = 0$, simple équation.

PROBLÈME VARIATIONNEL À POINTS EXTRÊMES FIXÉS

- Pour une fonctionnelle de la forme

$$J[u] = \int_{x=x_A}^{x_B} F[u(x), u'(x), x] dx$$

- Conditions aux limites en A et B :

$$u(x_A) = y_A \quad \text{et} \quad u(x_B) = y_B$$

- Conditions dans l'intervalle $[x_A, x_B]$:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0$$

« Équation d'Euler-Lagrange »

□ Exercice 2.1 : Caractère différentiel de l'équation d'Euler

Montrer que si l'intégrand F de la fonctionnelle ne dépend que de $u(x)$, $u'(x)$ et x , l'équation d'Euler est une équation différentielle du second ordre en $u(x)$.

□ **Solution :**

Si F ne dépend que de $u(x)$, $u'(x)$ et x , $\frac{\partial F}{\partial u'}$ ne dépend aussi que de $u(x)$, $u'(x)$ et x . Posons $\frac{\partial F}{\partial u'} = B(u, u', x)$; la structure de l'équation différentielle d'Euler est donc :

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial B}{\partial x} - u' \frac{\partial B}{\partial u} - u'' \frac{\partial B}{\partial u'} = 0 \quad \text{ou} \quad a(u, u', x) - b(u, u', x) \times u'' = 0 \quad (2.2.3)$$

(en posant $a(u, u', x) = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial B}{\partial x} - u' \frac{\partial B}{\partial u}$ et $b(u, u', x) = \frac{\partial B}{\partial u'}$) équation contenant x , $u(x)$, $u'(x)$ et $u''(x)$. Les contributions en x , u et u' ne sont pas forcément simples, mais celle en u'' est bien individualisée.

2.2.2.3. Cas où F ne dépend pas de $u(x)$

• Cas particulier n°2

Si F est de la forme $F[u'(x), x]$, l'équation d'Euler-Lagrange devient $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0$. La dérivée par rapport à x étant totale, l'intégration immédiate conduit à :

$$\frac{\partial F}{\partial u'} = K_1 \quad (2.2.4)$$

où K_1 est une constante d'intégration : on a intégré une fois l'équation du second ordre. La fonction constante $\frac{\partial F[u'(x), x]}{\partial u'}$ s'appelle **intégrale première** du problème considéré.

2.2.2.4. Cas où F ne dépend pas de x

• Cas particulier n°3

Le cas où F est de la forme $F[u(x), u'(x)]$ est plus intéressant que les précédents. Nous le retrouverons plus loin en mécanique analytique sous une autre forme. Il conduit lui aussi à une **intégrale première** du problème :

$$F - u' \times \frac{\partial F}{\partial u'} = K_2 \quad (K_2 \text{ constante d'intégration}) \quad (2.2.5)$$

□ Exercice 2.2 : Intégrale première

Montrer que si l'intégrand F est de la forme $F[u(x), u'(x)]$ (*i.e.* ne dépend pas explicitement de x), une intégrale première du problème est $F - u' \times \frac{\partial F}{\partial u'} = C^{\text{ste}}$.

□ **Solution :**

On peut vérifier le résultat en dérivant $F - u' \times \frac{\partial F}{\partial u'}$ par rapport à x avec, ici,

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial u} u' + \frac{\partial F}{\partial u'} u''.$$

Il vient $\frac{\partial F}{\partial u} u' + \frac{\partial F}{\partial u'} u'' - u'' \frac{\partial F}{\partial u'} - u' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0$, qui conduit à $u' \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] = 0$. La solution parasite triviale $u(x) = C^{\text{ste}}$ mise à part, on retrouve l'équation d'Euler.

□ Exercice 2.3 : Identité

L'intégrand de la fonctionnelle ne dépendant que de u , u' et x , quelle est sa forme pour que l'équation d'Euler soit une identité (*i.e.* que la fonctionnelle ne dépende pas de u) ?

□ **Solution :**

Si F ne dépend que de $u(x)$, $u'(x)$ et x , l'équation d'Euler est une équation différentielle de la forme $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial B}{\partial x} - u' \frac{\partial B}{\partial u} - u'' \frac{\partial B}{\partial u'} = 0$, avec $B(u, u', x) = \frac{\partial F}{\partial u'}$ (2.2.3). En général les contributions en u et en u' ne peuvent pas être individualisées. Par contre celle en u'' est claire : pour que cette équation soit une identité (c'est-à-dire soit vérifiée pour toute fonction $u(x)$), on doit annuler la contribution de u'' par la condition $\frac{\partial B}{\partial u'} = 0$ imposant que $B = \frac{\partial F}{\partial u'}$ ne dépende pas de u' : $\frac{\partial F}{\partial u'} = B(u, x)$. Cette équation s'intègre en $F(u, u', x) = u'B(u, x) + A(u, x)$, où $A(u, x)$ est pour l'instant une fonction arbitraire de x et de u .

Cette condition n'est pas suffisante et il faut revenir à l'équation d'Euler d'origine. La forme de F entraîne $\frac{\partial F}{\partial u} = u' \frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial A}{\partial u}$ et $\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u'} = \frac{dB}{dx} = \frac{\partial B}{\partial x} + u' \frac{\partial B}{\partial u}$. En réécrivant l'équation d'Euler, on obtient : $u' \frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial A}{\partial u} - \frac{\partial B}{\partial x} - u' \frac{\partial B}{\partial u} = 0$ ou $\frac{\partial A}{\partial u} = \frac{\partial B}{\partial x}$, seconde condition.

La fonctionnelle $J[u] = \int_{x_1}^{x_2} F(u, u', x) dx$ aura donc la forme : $\int_{x_1}^{x_2} [A(u, x) + u'B(u, x)] dx$ avec la condition $\frac{\partial A}{\partial u} = \frac{\partial B}{\partial x}$. En explicitant $u' = \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$, on peut mettre $J[u]$ sous la forme $\int_{M_1}^{M_2} [A(u, x) dx + B(u, x) dy]$: c'est la circulation du vecteur $\vec{V}(A, B)$ du point $M_1(x_1, y_1)$ au point $M_2(x_2, y_2)$. Comme de plus $\frac{\partial A}{\partial u} - \frac{\partial B}{\partial x} = 0$, ce champ vectoriel est à rotationnel nul : sa circulation ne dépend pas du chemin suivi, c'est-à-dire que l'intégrale fonctionnelle ne dépend pas de $u(x)$. C'est bien la propriété cherchée.

Une autre façon de voir les choses est de noter que la condition $\frac{\partial A}{\partial u} = \frac{\partial B}{\partial x}$ assure que la forme $A(y, x) dx + B(u, x) dy$ est une différentielle exacte dG et que l'intégrale $J[u] = \int_{M_1}^{M_2} dG$ est toujours égale à $G(M_1) - G(M_2)$: la valeur de $J[u]$ ne dépend pas du chemin suivi. La forme de $J[u]$ et la condition $\frac{\partial A}{\partial u} = \frac{\partial B}{\partial x}$ constituent une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation d'Euler soit une identité.

Ceci est à rapprocher de la notion de **potentiel** : en mécanique, énergie potentielle pour les **forces dérivant d'un potentiel**, en thermodynamique, **fonctions d'état**. Dans la transformation d'un système, le travail d'une force dérivant d'un potentiel ou la variation d'une fonction d'état thermodynamique ne dépendent que des états initial et final du système et non du chemin suivi.

2.2.3. Applications

□ **Exercice 2.4 : Le brachistochrone historique**

Résoudre le problème historique du **brachistochrone** : une bille ponctuelle de masse m est lâchée sans vitesse initiale du point O dans le champ de pesanteur ; elle est guidée dans sa chute par une glissière située dans un plan vertical xOy jusqu'en un point $A(a, b)$ (figure 2.2) ; les frottements sont négligés. Déterminer la fonction $y = u(x)$ décrivant la forme que doit avoir la glissière pour que le temps de parcours de O à A soit minimum.

□ **Solution :**

La fonctionnelle se ramène à $J[u] = \int_0^a \sqrt{\frac{1+u'^2}{u}} dx$ (1.2.1). L'intégrant F ne dépendant pas explicitement de x , l'équation d'Euler s'intègre une fois en $F - u' \frac{\partial F}{\partial u'} = C$, d'où $u' = \sqrt{\frac{k-u}{u}}$, C et k étant des constantes. La séparation des variables conduit à $dx = \sqrt{\frac{u/k}{1-u/k}} du$ et les changements $u = k \sin^2 \psi$ puis $\theta = 2\psi$ à

$$x = \frac{k}{2} (\theta - \sin \theta) \quad \text{et} \quad y = -u = -\frac{k}{2} (1 - \cos \theta)$$

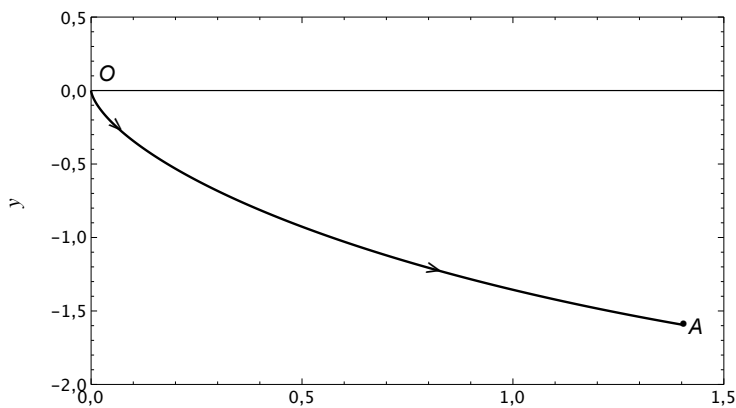


FIGURE 2.2 : Brachistochrone : chute guidée d'une bille dans le champ de pesanteur.

C'est une **cycloïde** ou **roulette**⁶¹ de rayon $k/2$ où la condition limite $y = 0$ pour $x = 0$ a été imposée ; l'autre condition, $y = b$ pour $x = a$ fixe la constante k .

REMARQUES : Noter le cas intéressant où O et A sont sur la même horizontale à une distance L l'un de l'autre (figure 2.3) : la trajectoire est alors la cycloïde

$$x = \frac{L}{2\pi} (\theta - \sin \theta) , \quad y = -\frac{L}{2\pi} (1 - \cos \theta)$$

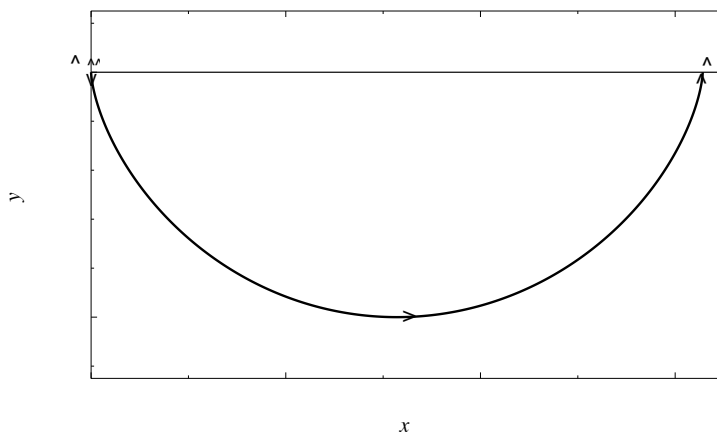


FIGURE 2.3 : Brachistochrone : cas d'un départ et d'une arrivée à la même altitude.

⁶¹ Voir paragraphe 1.2.1. J'appelle *rayon* r de la cycloïde celui de la roue qui l'engendre. Au point le plus haut de la cycloïde on a donc $2r = k$; mais pour le brachistochrone, la cycloïde est située sous l'axe Ox .

À vitesse initiale nulle, la bille *ne peut pas* aller de O à A en ligne directe (le temps de parcours est infini) ; à partir de O , elle doit d'abord tomber pour acquérir la vitesse qui la mènera en A .

La constante d'intégration k est donnée par

$$a = \frac{k}{2} (\theta_A - \sin \theta_A) \text{ et } -b = \frac{k}{2} (1 - \cos \theta_A) \text{ (} b \text{ est négatif),}$$

θ_A étant la valeur du paramètre au point d'arrivée A ; comme θ_A n'est pas imposé, on a en fait deux équations à deux inconnues pour déterminer le couple $\{\theta_A, k\}$ qui ne s'avèrera pas forcément unique.

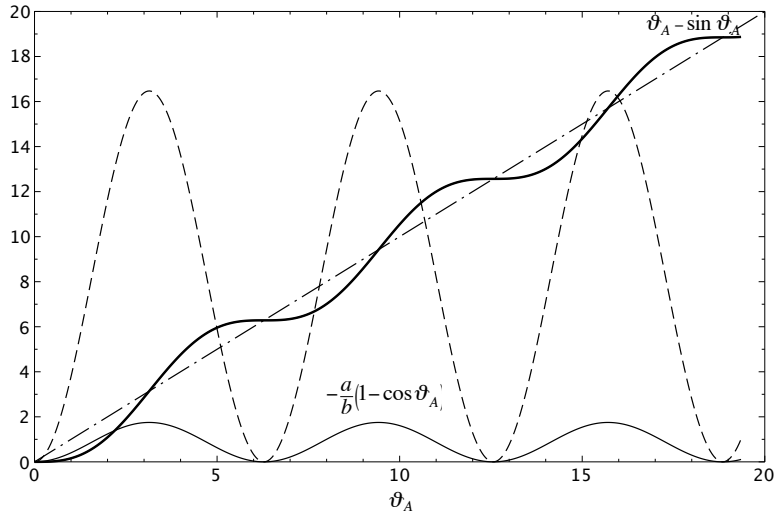


FIGURE 2.4 : Détermination graphique du paramètre θ_A au point A .

La courbe représentant $\theta_A - \sin \theta_A$ est en gras. Deux courbes $-\frac{a}{b}(1 - \cos \theta_A)$ sont montrées : en trait fin $a = 1,4$, $b = -1,6$, en tirets $a = 1,4$, $b = -0,17$.

Pour visualiser la situation, divisons les deux équations précédentes membre à membre pour obtenir une équation donnant θ_A : $\theta_A - \sin \theta_A = -\frac{a}{b}(1 - \cos \theta_A)$. En traçant les courbes représentatives de chaque membre (figure 2.4), on voit qu'aux oscillations près $\theta_A - \sin \theta_A$ suit la première diagonale en restant croissante au sens large, alors que $-\frac{a}{b}(1 - \cos \theta_A)$ oscille entre 0 et $-\frac{2a}{b}$. Les caractéristiques des courbes au voisinage de l'origine montrent qu'il y a toujours au moins une intersection autre que l'origine, donc une solution $\theta_A \neq 0$ en plus de la solution triviale $\theta = 0$. Ensuite, on voit que l'existence d'autres solutions est possible si, pour θ_A proche d'un multiple impair $(2n+1)\pi$, la courbe représentative de $-\frac{a}{b}(1 - \cos \theta_A)$ passe au-dessus de la courbe de $\theta_A - \sin \theta_A$, c'est-à-dire, en gros, si $-2\frac{a}{b} \gtrsim (2n+1)\pi$; alors des solutions supplémentaires apparaissent par paires. Sur la figure 2.2, par exemple, le point d'arrivée A a pour coordonnées $(a = 1,4, b = -1,6)$; comme $-2\frac{a}{b} = 1,75 < \pi$, il n'y a qu'une solution au problème : elle est donnée par $\theta_A \approx 2,208$ rd et $k \approx 2$. Cette situation est représentée par la courbe en trait fin sur la figure 2.4. Si maintenant les coordonnées du point A sont $(a = 1,4, b = -0,17)$, alors $-2\frac{a}{b} \approx 16,47 \gtrsim 5\pi$, situation représentée par la courbe en tirets sur la figure 2.4. On voit apparaître deux couples d'intersections supplémentaires : autour de $\theta_A = 3\pi$ et de 5π . Plus précisément, les solutions dans ce cas sont $(\theta_A \approx 4,993, k \approx 0,470)$ (solution « naturelle »), puis

$(\theta_A \approx 7,664, k \approx 0,419)$ et $(\theta_A \approx 10,587, k \approx 0,243)$ (premier couple), $(\theta_A \approx 14,962, k \approx 0,196)$ et $(\theta_A \approx 15,960, k \approx 0,173)$ (second couple). Les trajectoires-solutions correspondantes sont représentées sur la figure 2.5

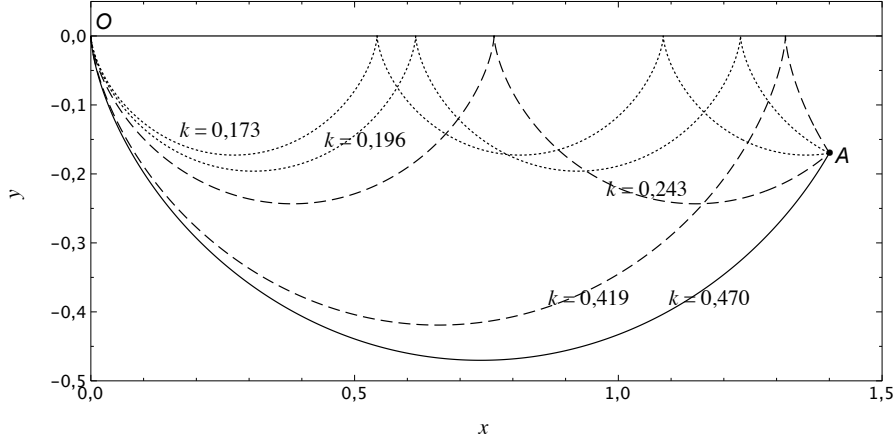


FIGURE 2.5 : Trajectoires-solutions pour $A(1, 4 ; -0, 17)$:

- Trait continu : solution « naturelle » ($k \approx 0, 470$).
- Tirets : les deux solutions du 1^{er} couple ($k \approx 0, 419, k \approx 0, 243$).
- Pointillés : les deux solutions du 2^d couple ($k \approx 0, 196, k \approx 0, 173$).

À quoi correspondent toutes ces solutions ? Une fonctionnelle, comme une fonction, peut avoir plusieurs extremums ; dans le cas présent, il y a un minimum « naturel » suivi d'un maximum local, d'un autre minimum, puis un nouveau maximum local et un minimum ; c'est pourquoi les extremums supplémentaires apparaissent par paires. Pour choisir entre les différents minimums obtenus, il faut calculer chaque temps de parcours Δt puis déterminer le *minimum minimorum* ; je laisse ce travail au lecteur, mais le résultat est intuitif.

En ce qui concerne les maximums en $\theta_A \approx 7,664$ et $\theta_A \approx 14,962$, ce sont eux aussi des extremums ; ils ne conviennent pas pour le brachistochrone qui exige un minimum ; mais il est intéressant de noter en passant que le **principe de Fermat**, lui, n'exige pas que le **chemin optique** soit minimum mais seulement **stationnaire** (Provost et Vallée, 2004).

L'exercice suivant illustre un point historique : le traitement de la chute libre par la minimisation de l'**Action réduite de Maupertuis**. Il est adapté du travail publié par **Euler** (Euler, 1770) où l'*illustre géomètre* (*sic* Maupertuis, 1744) présente une centaine d'exemples illustrant sa méthode de calcul des extremums de fonctionnelles⁶². Dans cette étude, Euler utilise le **principe de moindre Action**, attribué par la suite à **Maupertuis**.

⁶² Les premiers travaux d'Euler sur ce sujet datent de la fin 1728 ou du début 1729 (Goldstine, 1980).

□ **Exercice 2.5 : Principe de moindre Action selon Euler**

Une bille ponctuelle de masse μ est lancée du point A avec une vitesse initiale $\vec{v}_A$ (v_{Ax}, v_{Ay}) dans le champ de pesanteur (figure 2.6). On néglige la résistance de l'air et on admet que le mouvement est dans le plan vertical xOy contenant $\vec{v}_A$; comme Euler, on choisira Oy horizontal, Ox vertical dirigé vers le bas, et A à l'origine.

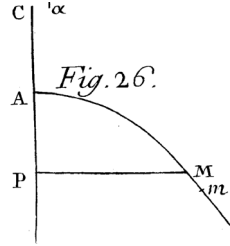


FIGURE 2.6 : Figure originale de l'ouvrage d'Euler (Euler, 1770).

Euler connaissait la conservation de l'énergie mécanique $\frac{1}{2}\mu v^2 - \mu gx$. Le **principe de moindre Action** qu'il utilise consiste à dire que la trajectoire de la bille est celle qui minimise l'**Action réduite**⁶³ $S_0 = \int \mu v ds$, où ds est l'élément d'arc Mm parcouru par la bille pendant un intervalle de temps dt . Avec ce principe, déterminer la trajectoire de chute $y(x)$ de la bille.

□ **Solution :**

Avec A en O , en tout point M de la trajectoire on a $\frac{1}{2}\mu v^2 - \mu gx = \frac{1}{2}\mu v_A^2$, donc la vitesse v est égale à $\sqrt{2gx + v_A^2}$. Avec $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$, l'Action devient :

$$S_0 = \int \mu \sqrt{2gx + v_A^2} ds = \int \mu \sqrt{(2gx + v_A^2)(1 + y'^2)} dx \quad \text{où} \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

L'intégrant $F = \sqrt{(2gx + v_A^2)(1 + y'^2)}$ de cette fonctionnelle ne contient pas $y(x)$; l'équation d'Euler se réduit donc à $\frac{\partial F}{\partial y'} = C^{\text{ste}}$, c'est-à-dire ici à $\frac{y' \sqrt{2gx + v_A^2}}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$ ou $y'^2 = \frac{C^2}{2gx + v_A^2 - C^2}$.

On note que pour $x = 0$, $y' = \frac{dy}{dx}$ vaut $\frac{v_{Ay}}{v_{Ax}}$, donc $C^2 = v_{Ay}^2$. En utilisant $y' = \frac{dy}{dx}$ pour séparer les variables, on est amené à $dy = \sqrt{\frac{v_{Ay}^2}{2gx + v_{Ax}^2} - 1} dx$, donc, en intégrant de $(0, 0)$ à (x, y) et avec des conventions de signes adéquates, on retrouve le résultat bien connu :

$$y = \frac{v_{Ay}}{g} \sqrt{2gx + v_{Ax}^2} - \frac{1}{g} v_{Ay} v_{Ax} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{2g} \frac{y^2}{v_{Ay}^2} + y \frac{v_{Ax}}{v_{Ay}} \quad (2.2.6)$$

Le même genre de calcul dans un potentiel constant donne évidemment la trajectoire rectiligne (le vérifier). Connaissant l'expression exacte de l'**Action de Hamilton**, ce dernier résultat n'est pas étonnant. Par contre le précédent est particulièrement déroutant puisqu'avec une Action incomplète, on obtient la bonne trajectoire dans un potentiel non constant. Il sera expliqué plus loin (chapitre 4, section 4.3.2).

⁶³ Avec $ds = v dt$, $S_0 = \int \mu v^2 dt$, intégrale sur le temps de la *vis viva*, double de l'énergie cinétique.

□ **Exercice 2.6 : Surface de révolution minimum**

Soit dans le plan xOy une courbe (Γ) reliant deux points fixes $A(a, a')$ et $B(b, b')$, et (Σ) la surface engendrée en faisant tourner (Γ) autour de Ox (figure 2.7). Quelle doit être la forme de (Γ) pour que l'aire de (Σ) soit minimum ?

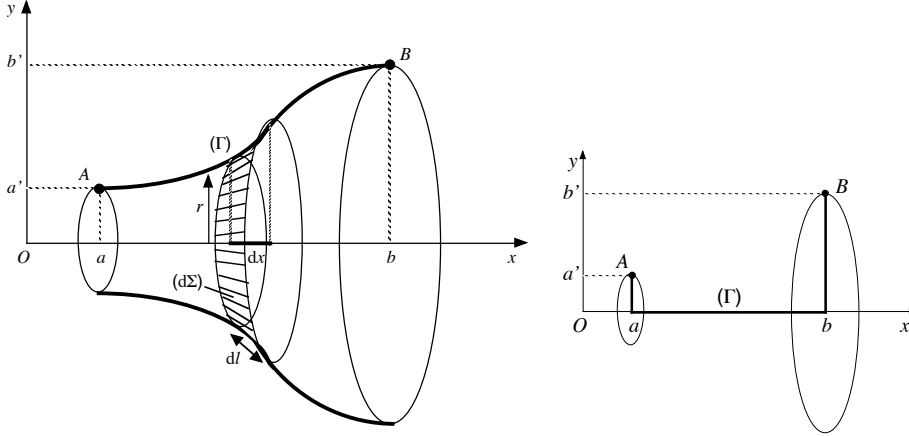


FIGURE 2.7 : Surface de révolution engendrée par une courbe (Γ) du plan Oxy passant par deux points fixes A et B de ce plan, en tournant autour de Ox :
À gauche, courbe régulière, à droite, ligne brisée.

□ **Solution :**

On décompose la surface engendrée en éléments de cônes circulaires infinitésimaux de hauteur dx et d'aire $2\pi r \, dl$ (figure 2.7 à gauche), avec $r = y$ et $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} \, dx$; l'aire totale est :

$$S = 2\pi \int_A^B r(x) \, dl = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} \, dx \quad (2.2.7)$$

L'intégrand $F = y \sqrt{1 + y'^2}$ ne contenant pas explicitement x , on obtient donc l'intégrale première $K = F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}$ qui donne $y'^2 = \frac{y^2}{K^2} - 1$. En supposant $b' > a'$ pour $b > a$ (ce qui est loisible) et en notant que l'aire minimum est sûrement obtenue pour une fonction $y(x)$ monotone, on obtient $dx = \frac{dy}{\sqrt{\frac{y^2}{K^2} - 1}}$ qui s'intègre en argch . D'où

$$y = K \operatorname{Ch} \left\{ \frac{x - a}{K} + \operatorname{argch} \frac{a'}{K} \right\}$$

K étant déterminé par la condition $b' = K \operatorname{Ch} \left\{ \frac{b-a}{K} + \operatorname{argch} \frac{a'}{K} \right\}$. (Γ) est donc une **chaînette**.

REMARQUE : Notons que l'on n'obtient pas la solution intuitive de la figure 2.7 à droite donnant une aire latérale nulle. Ceci tient au fait que les solutions des équations différentielles de la méthode variationnelle ont de bonnes propriétés analytiques. Les solutions de type ligne brisée (dérivée discontinue) sont donc exclues. Pour les trouver, il faudra utiliser d'autres moyens (voir paragraphe 2.3.2.3, Exercices 2.8 et 2.10).

2.3. Cas des points extrêmes ou des limites non fixés

2.3.1. Résolution dans le cas des points extrêmes non fixés

Dans le **problème variationnel à points extrêmes non fixés**, les limites x_A et x_B du domaine d'intégration sont fixées mais u_A et u_B peuvent varier⁶⁴. Revenons à la variation générale de J pour un intégrant $F(u, u', x)$ (2.1.5) : les variations extrêmes $\delta u(x_A)$ et $\delta u(x_B)$ ne s'annulent plus ; elles sont quelconques. Compte tenu de l'arbitraire du choix de δu , il faut donc forcer l'annulation du terme tout intégré *indépendamment* de celle de l'intégrale. L'annulation de l'intégrale conduit encore à l'équation d'Euler-Lagrange ; celle du terme tout intégré s'obtient en annulant les coefficients de $\delta u(x_A)$ et $\delta u(x_B)$, $\left[\frac{\partial F}{\partial u'}\right]_{x=x_A}$ et $\left[\frac{\partial F}{\partial u'}\right]_{x=x_B}$:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u'}\right]_{x=x_A} = 0 \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial F}{\partial u'}\right]_{x=x_B} = 0 \quad (2.3.1)$$

Ces deux **conditions aux limites** se substituent aux annulations de δu aux bornes dans le problème à points extrêmes fixés et fournissent l'information déterminant la solution $u(x)$.

□ Exercice 2.7 : Brachistochrone à arrivée variable

Une bille ponctuelle de masse m est lâchée sans vitesse initiale du point O dans le champ de pesanteur ; elle est guidée par une glissière située dans un plan vertical xOy et les frottements sont négligés. Déterminer la fonction $y = -u(x)$ décrivant la forme de la glissière pour que le temps mis par la bille pour traverser une ligne d'abscisse a (figure 2.8) soit minimum.

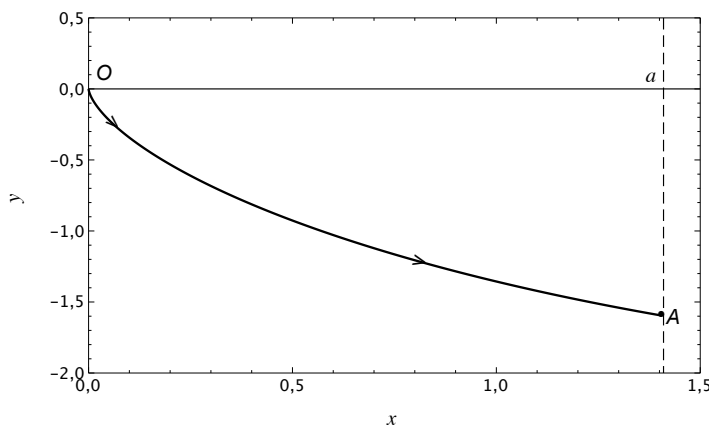


FIGURE 2.8 : Chute guidée dans le champ de pesanteur pour atteindre l'abscisse a .

⁶⁴ Plus loin, on examinera le cas où les limites x_A et x_B sont elles-mêmes variables.

□ **Solution :**

Problème analogue à celui du **brachistochrone** historique à la différence qu'ici le point d'arrivée $A(a, b)$ n'est pas fixé : son ordonnée $b = y(a)$ est adaptable. Le départ se faisant du point O , la condition initiale $y = 0$ pour $x = 0$ est toujours satisfaite et la forme de la solution est encore

$$x = \frac{k}{2} (\theta - \sin \theta) , \quad y = -u = -\frac{k}{2} (1 - \cos \theta) \quad (2.3.2)$$

mais la détermination de k se fait maintenant par la condition finale $\left[\frac{\partial F}{\partial u'} \right]_{x=a} = 0$. Avec un intégrant $F = \sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}$, ceci se traduit par $\left[\frac{u'}{\sqrt{u(1+u'^2)}} \right]_{x=a} = 0$ ou $[u']_{x=a} = \left[\frac{-dy/d\theta}{dx/d\theta} \right]_{x=a} = 0$.

On obtient ainsi :

$$\frac{\sin \theta_A}{1 - \cos \theta_A} = 0, \quad \text{d'où} \quad \theta_A = (2n+1)\pi \quad \text{puis} \quad k = \frac{2a}{(2n+1)\pi}$$

La figure 2.9 montre quelques solutions.

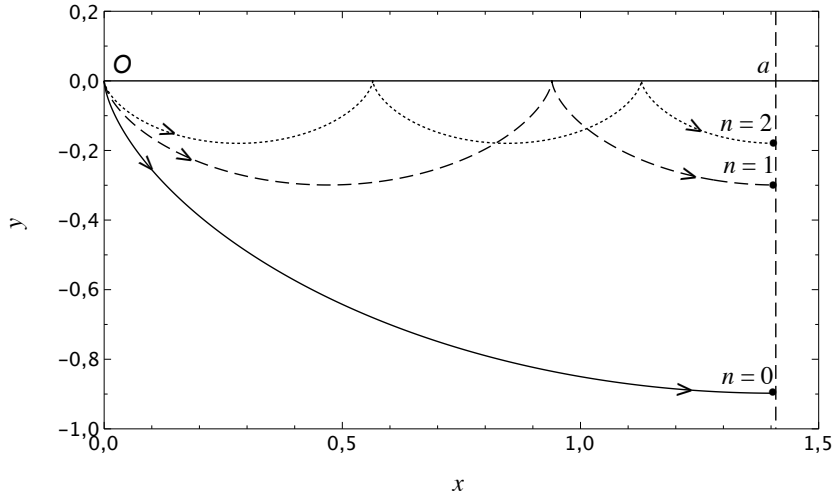


FIGURE 2.9 : Solutions du brachistochrone à arrivée variable pour $n = 0$ (trait continu), $n = 1$ (tirets), $n = 2$ (pointillés).

Pour n , le temps de parcours est $\Delta t_n = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1+u'^2}{u}} dx$; en remplaçant $u = -y$ et x en fonction de θ (2.3.2), on obtient $\Delta t_n = \sqrt{\frac{k}{4g}} \int_0^{\theta_A} d\theta = \sqrt{\frac{\pi a}{g}} \sqrt{2n+1}$. La trajectoire optimale correspond donc à $n = 0$: le *minimum minimorum* des temps de parcours est $\Delta t_0 = \sqrt{\pi a/g}$.

□ Exercice 2.8 : Surface de révolution engendrée par une ligne brisée (1)

Dans le plan xOy une ligne (Γ) reliant deux points fixes $A(a, a')$ et $B(b, b')$ engendre la surface (Σ) en tournant autour de Ox (figure 2.7 à gauche). En admettant que (Γ) puisse être une ligne brisée (c'est-à-dire que la fonction continue $y(x)$ qui la décrit puisse avoir une dérivée discontinue comme sur la figure précédente 2.7 à droite), la déterminer pour que l'aire de (Σ) soit minimum.

PROBLÈME VARIATIONNEL À POINTS EXTRÊMES NON FIXÉS

- Pour une fonctionnelle de la forme

$$J[u] = \int_{x=x_A}^{x_B} F(u(x), u'(x), x) dx$$

- Conditions aux limites en A et B :

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u'} \right]_{x=x_A} = 0 \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial F}{\partial u'} \right]_{x=x_B} = 0$$

- Conditions dans l'intervalle $[x_A, x_B]$:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0$$

« Équation d'Euler-Lagrange »

□ *Solution* :

La fonctionnelle est $J[y] = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx$ (2.2.7). S'il y a un point anguleux C en $x = c$ (c inconnu mais fixé dans $[a, b]$), la fonction $u(x)$ y est continue ($u(c^+) = u(c^-) = u(c)$) mais a des dérivées à droite et à gauche différentes ($u'(c^+) \neq u'(c^-)$). Remplaçons donc $J[y]$ par

$$J[u] = \int_a^{c^-} F(u(x), u'(x), x) dx + \int_{c^+}^b F(u(x), u'(x), x) dx$$

et effectuons une variation en notant que l'ordonnée $c' = u(c)$ de $C(c, c')$ est inconnue mais adaptable, comme $u(x)$. La variation se fait comme d'habitude, avec une intégration par parties dans chaque intervalle :

$$\delta J = \left[\frac{\partial F}{\partial u'} \delta u \right]_a^{c^-} + \left[\frac{\partial F}{\partial u'} \delta u \right]_{c^+}^b + \int_a^{c^-} \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u'} \right] \delta u dx + \int_{c^+}^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u'} \right] \delta u dx$$

La stationnarité des intégrales conduit à l'équation d'Euler dans $[a, c^-]$ et $[c^+, b]$. Comme A et B sont fixés $\delta u_A = \delta u_B = 0$; par contre $\delta u_C \neq 0$. D'où les conditions issues des termes intégrés : $\left[\frac{\partial F}{\partial u'} \right]_{c^-} = \left[\frac{\partial F}{\partial u'} \right]_{c^+} = 0$. Avec ici $F = y \sqrt{1+y'^2}$ cette condition implique $\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$ pour $x \rightarrow c^-$ et pour $x \rightarrow c^+$. Comme $y(c^-) = y(c^+)$ et $y'(c^-) \neq y'(c^+)$, on a forcément $y(c^-) = y(c^+) = 0$: C est sur Ox .

On peut intercaler un second point $D(d, d')$ entre C et B et vérifier que la stationnarité de l'aire S impose qu'il soit sur Ox . Puisqu'entre C et D l'équation d'Euler doit être vérifiée, la forme optimum de (Γ) entre ces points est la chaînette dégénérée en le segment CD sur Ox (figure 2.10).

Enfin, les abscisses des points C et D étant arbitraires, en faisant tendre c vers a et d vers b on obtiendra la solution optimum parmi celles données par une ligne brisée : elle est représentée sur la figure précédente 2.7 à droite.

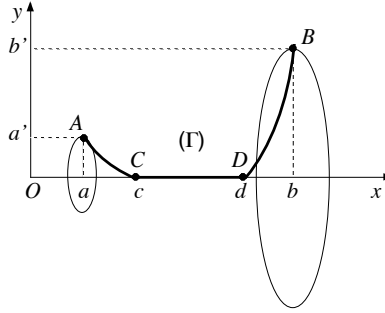


FIGURE 2.10 : Surface de révolution engendrée par une ligne brisée du plan Oxy passant par quatre points fixes A , C (sur Ox), D (sur Ox), et B , en tournant autour de Ox .

TRANSITION : La dernière phase de cet exercice a montré l'intérêt de considérer le cas où les limites du domaine d'intégration pouvaient elle-mêmes varier.

2.3.2. Résolution dans le cas des limites non fixées

2.3.2.1. Problème général

Établissons les conditions à imposer dans le cas général où non seulement la fonction-variable $u(x)$ peut varier mais aussi les limites x_A et x_B du domaine d'intégration et les valeurs u_A et u_B de $u(x)$ aux limites (figure 2.11) : c'est le **problème variationnel à limites non fixées**. Nous nous restreindrons encore aux fonctionnelles $J[u] = \int_{x_A}^{x_B} F(u, u', x) dx$ dont l'intégrand F ne dépend que de u , u' et x . Effectuons une variation, u devenant $u + \delta u$, x_A , $x_A + \delta x_A$ et x_B , $x_B + \delta x_B$. Pour cela, on écrira (Gelfand et Fomin, 1963)

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{x_A + \delta x_A}^{x_B + \delta x_B} F[(u(x) + \delta u, u'(x) + \delta u', x)] dx - \int_{x_A}^{x_B} F[u(x), u'(x), x] dx \\ &= \int_{x_A}^{x_B} [F(u + \delta u, u' + \delta u', x) - F(u, u', x)] dx \\ &\quad + \int_{x_B}^{x_B + \delta x_B} F(u + \delta u, u' + \delta u', x) dx - \int_{x_A}^{x_A + \delta x_A} F(u + \delta u, u' + \delta u', x) dx \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Le premier terme, connu, conduit à $[\frac{\partial F}{\partial u'} \delta u]_{x_A}^{x_B} + \int_{x_A}^{x_B} [\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u'}] \delta u dx$; pour les suivants, si on en reste aux contributions du premier ordre en variations on obtiendra approximativement $[F(u, u', x)]_{x_B} \delta x_B - [F(u, u', x)]_{x_A} \delta x_A$. Donc :

$$\begin{aligned} \delta J &= \left[\frac{\partial F}{\partial u'} \delta u \right]_{x_A}^{x_B} + \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u'} \right] \delta u dx \\ &\quad + [F(u, u', x)]_{x_B} \delta x_B - [F(u, u', x)]_{x_A} \delta x_A \end{aligned}$$

Pour le premier terme, il faut prendre garde à un détail important dans les notations (voir au point B sur la figure 2.11) : par définition, δu_B représente la variation de la fonction au point d'abscisse x_B , donc $[u + \delta u](x_B) - u(x_B)$ (différence d'ordonnées

entre B'' et B) mais pas la variation d'ordonnée de B , $[u + \delta u](x_B + \delta x_B) - u(x_B)$ (différence d'ordonnées entre B' et B), expression correcte de la variation en B qui sera notée δy_B ; on voit sur la figure 2.11 qu'au premier ordre $\delta u_B \approx \delta y_B - u'_B \delta x_B$; de la même façon $\delta u_A \approx \delta y_A - u'_A \delta x_A$.

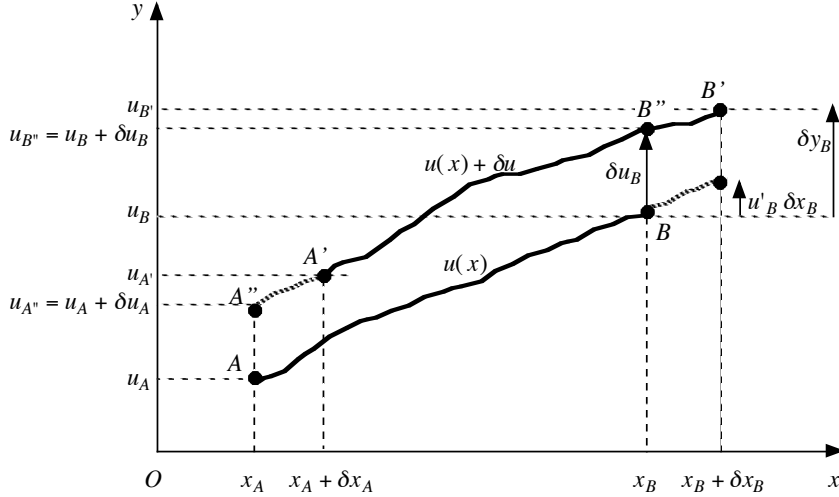


FIGURE 2.11 : Effet d'une variation des limites d'intégration.

Compte tenu de cette remarque, en remplaçant $u(x)$ par $y(x)$ et en regroupant les termes, on obtient finalement la **variation générale** :

$$\delta J = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \delta y \, dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_{x_A}^{x_B} + \left[\left(F - y'(x) \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta x \right]_{x_A}^{x_B} \quad (2.3.4)$$

La stationnarité de J est assurée par l'annulation de δJ pour toute variation $\delta y(x)$ de $y(x)$ dans l'intervalle $[x_A, x_B]$ (c'est l'**équation d'Euler-Lagrange**), ainsi que pour toute variation $(\delta x_A, \delta y_A)$ des coordonnées du point initial A et $(\delta x_B, \delta y_B)$ du point final B . Si les bornes x_A et x_B sont fixes ($\delta x_A = \delta x_B = 0$), on retrouve les conditions aux limites déjà vues, $[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y]_{x_A}^{x_B} = 0$, se résumant à $\delta y_A = \delta y_B = 0$ si A et B sont fixés, à $[\frac{\partial F}{\partial y'}]_{x_A} = [\frac{\partial F}{\partial y'}]_{x_B} = 0$ sinon, ou à une combinaison des deux. Si les limites d'intégration varient (δx_A et/ou $\delta x_B \neq 0$), parmi les conditions on aura $[(F - y'(x) \frac{\partial F}{\partial y'})]_{x_A} = 0$ et/ou $[(F - y'(x) \frac{\partial F}{\partial y'})]_{x_B} = 0$, **conditions aux limites** non vues jusqu'ici, faisant intervenir l'expression $F - y'(x) \frac{\partial F}{\partial y'}$ dont l'importance apparaîtra dans le chapitre 3. Les seules conditions aux limites sont donc :

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_{x_A} + \left[\left(F - y'(x) \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta x \right]_{x_A} = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_{x_B} + \left[\left(F - y'(x) \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta x \right]_{x_B} \quad (2.3.5)$$

2.3.2.2. Extrémités assujetties sur des courbes – Conditions de transversalité

Considérons le cas où les extrémités $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ sont libres de se mouvoir mais en restant sur des courbes, (γ_A) d'équation $y = \phi(x)$ pour A et (γ_B) ($y = \psi(x)$) pour B : ceci constitue une **contrainte**⁶⁵. On reprend le problème aux limites non fixées à partir de (2.3.4) en notant qu'ici le déplacement de A sur (γ_A) et de B sur (γ_B) impose (figure 2.12)

$$\delta y_A = \phi'(x_A)\delta x_A \quad \text{et} \quad \delta y_B = \psi'(x_B)\delta x_B$$

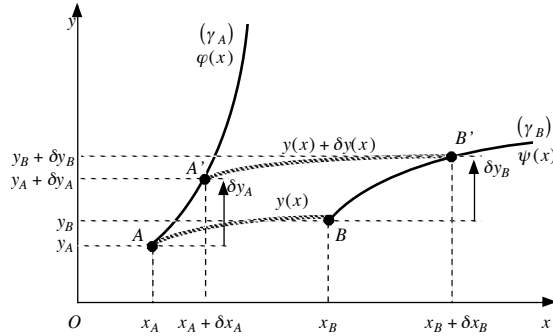


FIGURE 2.12 : Cas des extrémités contraintes sur des courbes.

En supposant l'équation d'Euler satisfaite, les conditions aux limites sont :

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'} \phi'(x) + F - y'(x) \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x_B} \delta x_{x_B} - \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \psi'(x) + F - y'(x) \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x_A} \delta x_{x_A} = 0$$

Comme δx_{x_A} et δx_{x_B} sont arbitraires, après réarrangement elles deviennent :

$$\left[F + (\phi'(x) - y'(x)) \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x_A} = 0 \quad \text{et} \quad \left[F + (\psi'(x) - y'(x)) \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x_B} = 0 \quad (2.3.6)$$

Ces conditions sont appelées **conditions de transversalité**.

Une application importante des **conditions de transversalité** est celle où l'intégrand $F(y, y', x)$ est de la forme $f(x, y)\sqrt{1 + y'^2}$. C'est par exemple ce qui se passe lorsqu'on applique le **principe de Fermat** : le chemin optique entre A et B (ou, à un coefficient près, le temps que met la lumière pour aller de A à B) est $\int_A^B n(x, y) ds = \int_{x_A}^{x_B} n(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx$.

⁶⁵ Il y a plusieurs façons de contraindre un problème variationnel. La plus simple consiste à imposer entre A et B le passage par un point fixe C ; on en a vu un exemple (Exercice 2.8). Une autre façon est d'imposer comme ici que les extrémités A et B restent sur des courbes ; un problème proche, examiné plus loin, est que le chemin passe par un point intermédiaire C non fixe mais assujéti à rester sur une courbe. Enfin, parmi d'autres possibilités, il y a les contraintes isopérimétriques qui seront examinées au chapitre 5.

PROBLÈME VARIATIONNEL AUX LIMITES NON FIXÉES (CAS GÉNÉRAL)

- Pour une fonctionnelle de la forme

$$J[y] = \int_{x=x_A}^{x_B} F[y(x), y'(x), x] dx$$

- Conditions aux limites en A et B :

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_{x=x_A} = 0 \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_{x=x_B} = 0$$

$$\left[\left(F - y'(x) \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta x \right]_{x=x_A} = 0 \quad \text{et} \quad \left[\left(F - y'(x) \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta x \right]_{x=x_B} = 0$$

- Conditions dans l'intervalle $[x_A, x_B]$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

« Équation d'Euler-Lagrange »

□ **Exercice 2.9 : Conditions de transversalité si $F(y, y', x) = f(x, y) \sqrt{1+y'^2}$.**

On veut rendre la fonctionnelle $\int_{x_A}^{x_B} F(y, y', x) dx$ extrémale, A se déplaçant librement sur la courbe (γ_A) ($y = \phi(x)$) et B sur (γ_B) ($y = \psi(x)$). Montrer que si l'intégrand est de la forme $F(y, y', x) = f(x, y) \sqrt{1+y'^2}$, les conditions de transversalité deviennent des conditions d'orthogonalité.

□ **Solution :**

Si $F(y, y', x) = f(x, y) \sqrt{1+y'^2}$, on vérifie que $\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y' f}{1+y'^2}$. Par remplacement dans (2.3.6), on obtient :

$$\left[\frac{(1+y'\phi')F}{1+y'^2} \right]_{x_A} = 0 \quad \text{et} \quad \left[\frac{(1+y'\psi')F}{1+y'^2} \right]_{x_B} = 0 \quad \text{donc} \quad y' = -\frac{1}{\phi'} \quad \text{en } A \quad \text{et} \quad y' = -\frac{1}{\psi'} \quad \text{en } B$$

montrant l'orthogonalité en A et B de la trajectoire optimale avec les courbes sur lesquelles se déplacent A et B .