

Jean-Louis Féménias

Licence
Master
Écoles
d'ingénieurs

Introduction au calcul variationnel en physique

Aperçu historique et applications :
mécanique analytique, élasticité

Cours et exercices



2^e édition



Table des matières

Table des exercices et résumés	<i>ix</i>
1 Introduction	1
1.1. Stationnarité, optimisation et principes d'extremum	1
1.1.1. Stationnarité	1
1.1.2. Exemples de règles et de principes d'extremum	3
1.1.3. Le paradigme du brachistochrone	6
1.2. Fonctionnelles	7
1.2.1. Un premier exemple de fonctionnelle	8
1.2.2. Euler et Lagrange : naissance du calcul variationnel	9
1.3. Principes variationnels	10
1.3.1. Principes de Fermat, de Maupertuis et mécanique analytique de Lagrange	10
1.3.2. Principe de moindre Action de Hamilton	11
1.3.3. Mécanique ondulatoire et mécanique quantique	12
1.4. Conclusion	14
2 Équation d'Euler-Lagrange	17
2.1. Variation d'une fonctionnelle	17
2.1.1. Le cadre de la démonstration	17
2.1.2. Variation de la fonctionnelle $J[u]$	18
2.2. Résolution dans le cadre des points extrêmes fixés	19
2.2.1. Équation d'Euler-Lagrange	19
2.2.2. Remarques et cas particuliers	19
2.2.2.1. Erreurs à éviter	19
2.2.2.2. L'équation d'Euler-Lagrange est une équation différentielle	20
2.2.2.3. Cas où F ne dépend pas de $u(x)$	21
2.2.2.4. Cas où F ne dépend pas de x	21
2.2.3. Applications	22
2.3. Cas des points extrêmes ou des limites non fixés	28
2.3.1. Résolution dans le cas des points extrêmes non fixés	28
2.3.2. Résolution dans le cas des limites non fixées	31
2.3.2.1. Problème général	31
2.3.2.2. Extrémités assujetties sur des courbes – Conditions de transversalité	33
2.3.2.3. Lignes brisées – Conditions de Weierstrass-Erdmann	35
2.4. Intégrant F contenant des dérivées d'ordre supérieur	37

2.5. Dérivée fonctionnelle	38
2.5.1. Notion	38
2.5.2. Formalisation	38
2.5.3. Applications immédiates	40
2.5.4. Dérivées fonctionnelles d'ordre supérieur	41
2.5.5. Équations différentielles de fonctionnelles	44
 3 Variations à plusieurs fonctions	 45
3.1. Fonctionnelles de plusieurs fonctions	45
3.2. Mécanique newtonienne	46
3.2.1. Les lois de Newton (<i>Philosophiae naturalis principia mathematica</i> , 1687)	46
3.2.2. Nombre de degrés de liberté – Liaisons holonomes et non holonomes	48
3.2.3. Coordonnées et vitesses généralisées	53
3.3. Mécanique lagrangienne	55
3.3.1. Approche des équations de Lagrange par le principe de d'Alembert	55
3.3.1.1. Le principe des travaux virtuels de d'Alembert en dynamique	55
3.3.1.2. Première approche : les équations de Lagrange	56
3.3.1.3. Seconde approche : le principe de moindre Action de Hamilton	57
3.3.2. Équations de Lagrange – Principe de moindre Action de Hamilton	60
3.3.2.1. Conditions d'application – Lagrangien	61
3.3.2.2. Principe de Hamilton – Équations de mouvement de Lagrange	61
3.3.2.3. Emploi de la méthode lagrangienne ; équivalence avec celle de Newton	62
3.3.3. Premières applications	65
3.3.3.1. Systèmes de coordonnées	65
3.3.3.2. Mécanique du point et du solide	66
3.3.4. Formalisation de la mécanique à partir du principe de Lagrange-Hamilton	76
3.3.5. Thèmes particuliers : similitude mécanique, pseudo-potentiels, conservations	81
3.3.6. Analyse de la méthode lagrangienne	88
3.4. Mécanique hamiltonienne	89
3.4.1. Origine du formalisme hamiltonien	89
3.4.2. Transformation de Legendre	90
3.4.3. Moments conjugués, transformation de Legendre et équations de Hamilton	91
3.4.4. Mode d'emploi de la méthode hamiltonienne – Résolution matricielle	92
3.4.4.1. Oscillateur harmonique	93
3.4.4.2. Résolution matricielle	93
3.4.4.3. Pendule simple	95
3.4.4.4. Pendules couplés	95
3.4.4.5. Pendule sphérique	97
3.4.5. Applications	98
3.4.6. Analyse de la méthode hamiltonienne	131
 4 Applications du formalisme hamiltonien	 133
4.1. Espace des phases et mécanique statistique	133
4.1.1. Espace des phases – Portrait de phase	133
4.1.2. Exemples de portraits de phase – Propriétés immédiates	133
4.1.3. Hydrodynamique dans l'espace des phases – Théorème de Liouville	138
4.1.3.1. Équation de Liouville (1 ^{ère} forme)	140
4.1.3.2. Équation de Liouville (2 ^{ème} forme) ou principe de conservation de la densité de Gibbs	141
4.1.3.3. Théorème de Liouville (principe de conservation du volume de Gibbs)	142

4.2. Symétries et conservations	144
4.2.1. Invariances géométriques et conservations dynamiques – Variables cycliques	144
4.2.1.1. Exemples : conservation de moments, de l'énergie mécanique	144
4.2.1.2. Variables cycliques et intégration	148
4.2.2. Transformations canoniques	151
4.2.2.1. Condition pour une constante du mouvement – Crochets de Poisson	151
4.2.2.2. Transformations canoniques, fonctions génératrices	153
4.2.2.3. Transformations canoniques infinitésimales	158
4.2.3. Vérification d'une invariance : Crochets de Poisson	160
4.2.3.1. Invariance des crochets de Poisson dans une transformation canonique	160
4.2.3.2. Propriétés mathématiques des crochets de Poisson. Identité de Jacobi	162
4.2.3.3. Résultats généraux des crochets de Poisson	164
4.2.3.4. Applications des crochets de Poisson	167
4.2.4. Recherche des invariants : Théorème de Noëther	172
4.2.4.1. Théorème de Noëther pour les invariances géométriques	173
4.2.4.2. Théorème de Noëther général	178
4.2.4.3. Une application fondamentale du théorème de Noëther	182
4.2.4.4. Invariants dans le mouvement képlérien – Vecteur de Runge-Lenz, symétries cachées	186
4.3. De Fermat à Feynman : vers la mécanique quantique	200
4.3.1. La fonction Action	200
4.3.2. Principe de moindre Action de Maupertuis – Principe de la <i>vis viva</i> (Leibniz)	203
4.3.3. Équation de Hamilton-Jacobi (1836)	213
4.3.4. Mécanique ondulatoire et mécanique quantique	219
4.3.4.1. La mécanique ondulatoire de Louis de Broglie	219
4.3.4.2. Les intégrales de chemin (<i>path integrals</i>) de Richard Feynman	221
4.4. Vers la théorie du chaos : Topologie de l'espace des phases	225
4.4.1. Topologie dans l'espace des phases : Poincaré et la mécanique qualitative	226
4.4.2. Ordinateurs, attracteurs, chaos : approche moderne des systèmes dynamiques	229
5 Contraintes. Problèmes isopérimétriques	231
5.1. Problèmes variationnels contraints et problèmes isopérimétriques	231
5.2. Solution du problème isopérimétrique	232
5.2.1. Méthode de résolution	232
5.2.2. Commentaires sur la méthode de résolution	232
5.2.3. Exemples dans le cadre des fonctions usuelles	233
5.2.3.1. Un exemple simple	233
5.2.3.2. Visualisation en dimension 3	234
5.3. Méthode des multiplicateurs de Lagrange pour les fonctions	235
5.3.1. Fonction de deux variables	235
5.3.2. Fonction de n variables sous une contrainte, sous p contraintes	236
5.4. Exemples de problèmes isopérimétriques	237
5.4.1. Problème de Didon (boucle de corde sur un plan)	237
5.4.2. Chaînette, voilière, lintéaire et courbe élastique	240
5.4.3. Méthode variationnelle de Ritz en mécanique quantique	254
5.4.3.1. Rappels de quelques notions de mécanique quantique	254
5.4.3.2. Formulation du problème de Ritz	255
5.5. Liaisons non holonomes en mécanique	256

6 Variations à plusieurs dimensions. Élasticité	261
6.1. Introduction : Problème à plusieurs variables	261
6.2. Équation d'Euler avec plusieurs variables	262
6.2.1. Intégration par parties à n dimensions	262
6.2.2. Équation d'Euler pour une fonctionnelle d'une fonction à 2 variables	264
6.2.3. Cas général	264
6.3. Applications	270
6.3.1. Méthode variationnelle de Ritz en mécanique quantique	270
6.3.2. Corde vibrante, densité de lagrangien, champs, transition vers l'élasticité	274
6.3.2.1. Énergie cinétique, énergie potentielle	274
6.3.2.2. Lagrangien, densité de lagrangien	275
6.3.2.3. Ouverture vers la relativité et la théorie des champs	276
6.4. Élasticité dans le cas des petites déformations	278
6.4.1. De la corde vibrante à la membrane homogène et isotrope	278
6.4.2. Membranes non isotropes et/ou non homogènes	283
6.4.3. Poutres et plaques	285
6.4.3.1. Statique des tiges et poutres sans forces localisées	288
6.4.3.2. Statique des tiges et poutres avec forces localisées	291
6.4.3.3. Dynamique des tiges et plaques	302
6.5. Élasticité dans le cas des grandes déformations	304
6.5.1. Historique de l'Elastica	304
6.5.2. Courbure et énergie potentielle d'élasticité	307
6.5.3. Tiges élastiques – L' <i>Elastica</i> de Bernoulli	308
Conclusion	319
Bibliographie	321
Index	325