

Luc Chevalier

Exercices corrigés de mécanique des systèmes et des milieux déformables



Licence
Master
Agrégation
Écoles d'ingénieurs



Chapitre 1- Statique et cinématique des systèmes de solides

Bien que véritables problèmes de mécanique soient rarement uniquement focalisés sur ces aspects élémentaires de cinématique ou d'actions mécaniques, c'est un passage obligé pour tous les développements ultérieurs... et qui doit être maîtrisé. Aussi bien en résistance des matériaux (RdM) il est nécessaire de maîtriser la détermination d'effort ; en dynamique les calculs de vitesse sont inévitables. Ce chapitre, relativement court, se propose de faire le point sur ces deux domaines de base et de les illustrer sur un petit nombre d'exemples.

Résumé de cours : statique et cinématique

Éléments de cours de cinématique

Position, vitesse et accélération

On appelle vecteur position du point mobile M , le vecteur qui lie M à l'origine O du repère R . Si la position de M est repérée par ses coordonnées cartésiennes x , y et z , ce vecteur s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Le vecteur position n'étant pas directement caractéristique du mouvement de M , nous considérons plutôt sa vitesse, c'est-à-dire la variation de position de M au cours du temps dans ce repère. La variation de position de M dans R entre deux instants est caractérisée par la vitesse. On note celle-ci $\vec{V}(M/R)$, c'est un vecteur tangent à la trajectoire du point M dans R . Son expression est :

$$\vec{V}(M/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_R$$

La variation, au cours du temps, de la vitesse d'un point M est caractérisée par un vecteur :

$$\vec{a}(M/R) = \left(\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \right)_R$$

Ce vecteur est appelé vecteur accélération du point M dans le repère R .

Vitesse et accélération des points d'un solide

Un solide indéformable est un ensemble de points dont les distances restent invariables au cours du temps. On peut privilégier un point O_S et définir une base orthonormée liée au solide. On fabrique ainsi un repère lié au solide S en mouvement par rapport à un repère R . On montre que la vitesse d'un point P du solide et la vitesse d'un point M appartenant au même solide sont reliées par la relation :

$$\vec{V}(P/R) = \vec{V}(M/R) + \overrightarrow{PM} \wedge \vec{\Omega}(S/R)$$

$\vec{\Omega}(S/R)$ est le taux de rotation de S par rapport à R . Le couple formé par l'union du vecteur taux de rotation et du champ de vecteurs vitesses $\vec{\Omega}$ et $\vec{V}$ qui constituent ce que l'on nomme un torseur cinématique.

$$\{V(P/R)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(M/R) \end{array} \right\}_M$$

Éléments de cours de statique

Actions mécaniques de surface et de volume

On définit une action mécanique (ou effort) comme la cause susceptible de déplacer ou déformer une pièce mécanique, un système rigide ou flexible ou un ensemble fluide. Les actions mécaniques peuvent s'appliquer soit par contact direct sur la frontière $\partial\Sigma$ du système isolé, soit à distance au sein du système Σ . On considère donc deux modèles d'efforts :

- les densités volumiques de force $\vec{f}_v(P)$
- les densités surfaciques de force $\vec{F}_s(P)$

Lorsque la surface de contact est faible on peut considérer la force $\vec{F}(P)$ comme ponctuelle en P . En mécanique du solide rigide on utilise les résultantes de ces forces qui s'obtiennent par intégration volumique ou surfacique ou somme des forces ponctuelles :

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}(P_i) + \iint_{\partial\Sigma} \vec{F}_s(P) dS + \iiint_{\Sigma} \vec{f}_v(P) dV$$

On considère aussi le moment résultant de ces actions mécaniques. Ce dernier est tributaire d'un point de référence et se calcule par :

$$\vec{M}_O = \sum_i \overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{F}(P_i) + \iint_{\partial\Sigma} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}_s(P) dS + \iiint_{\Sigma} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{f}_v(P) dV$$

Torseur résultant : force, moment de force et couple

On définit le torseur résultant des actions mécaniques comme l'association des deux quantités : la résultante des actions mécaniques et le moment résultant par rapport à un point O. La force $\vec{F}$ et le moment $\vec{M}_O$ sont appelés les éléments de réduction au point O du torseur des actions mécaniques. Ce torseur se note :

$$\{F\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{M}_O \end{array} \right\}_O$$

Lorsque la résultante est nulle, le moment ne dépend pas de la position du point O. Dans ce cas, le moment est appelé un couple et le torseur qui lui correspond est un torseur couple. S'il existe un point pour lequel le moment est nul, le torseur est appelé glisseur.

Principe fondamental de la statique (PFS)

Soit un système matériel Σ , constitué de N solides indéformables. On appelle torseur des forces extérieures à Σ , le torseur résultant de toutes les actions mécaniques qui s'exercent de l'extérieur de Σ (noté $\bar{\Sigma}$) sur Σ . Les efforts qui agissent entre deux solides de Σ sont des efforts intérieurs au système. Le torseur des efforts extérieurs à Σ se note :

$$\{F(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \\ \vec{M}_O(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \end{array} \right\}_O$$

PFS : pour qu'un système de solides indéformables Σ initialement au repos dans un référentiel galiléen, soumis à des actions mécaniques, reste en équilibre, il faut que le torseur des efforts extérieurs à Σ soit nul.

$$\{F(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)\} = \{0\}$$

On en déduit les deux théorèmes suivants :

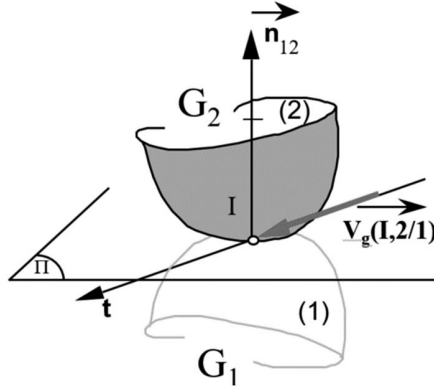
$$\vec{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \vec{0} \quad \text{théorème de la résultante}$$

$$\vec{M}_O(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \vec{0} \quad \text{théorème du moment résultant}$$

Statique et cinématique du contact

a. Glissement, roulement et pivotement

Lors du contact ponctuel en I de deux surfaces régulières appartenant respectivement aux solides S1 et S2, la vitesse de glissement est définie par la différence entre la vitesse du point géométrique par rapport à S2 et la vitesse du point géométrique de contact par rapport au solide S1 :



Cette vitesse est dans le plan tangent commun à S1 et S2, et est égale à la vitesse du point coïncident I dans le mouvement du repère lié à S1 par rapport à S2.

$$V_g\left(I; S_1/S_2\right) = V\left(I \in S_1/S_2\right)$$

Le mouvement relatif de S1 par rapport à S2 est défini par le torseur des vitesses relatives :

$$\left\{V\left(S_2/S_1\right)\right\} = \left\{\begin{array}{l} \overline{\Omega}\left(S_2/S_1\right) \\ \vec{V}\left(I \in S_2/S_1\right) \end{array}\right\}_I$$

Le vecteur $\vec{\Omega}$ taux de rotation se décompose en deux parties. La projection sur la normale $\vec{n}_{12}$ au plan tangent commun se nomme le pivotement et la composante dans le plan tangent est le roulement.

$$\overline{\Omega}_p\left(S_2/S_1\right) = \left[\overline{\Omega}\left(S_2/S_1\right) \cdot \vec{n}_{12}\right] \vec{n}_{12} \quad \text{et} \quad \overline{\Omega}_r\left(S_2/S_1\right) = \left[\vec{n}_{12} \wedge \overline{\Omega}\left(S_2/S_1\right)\right] \wedge \vec{n}_{12}$$

b. Frottement de glissement : Lois de Coulomb

Si le contact est ponctuel et si on néglige le frottement de roulement et de pivotement, le torseur des efforts de S2 sur S1 est un glisseur $\vec{F}_{21}$. On pose :

$$\begin{aligned} N_{21} &= \vec{F}_{21} \cdot \vec{n}_{21} \\ \vec{T}_{21} &= \vec{F}_{21} - N_{21} \vec{n}_{21} \end{aligned}$$

N_{21} est la composante normale de l'effort s'il y a contact cette action est systématiquement positive ou nulle. Le module $\|\vec{T}_{21}\|$ est noté T_{21} et s'appelle la composante tangentielle de l'effort. S'il existe un mouvement de glissement entre S1 et S2, alors l'action tangentielle de contact sera opposée au sens de la vitesse de glissement de S1 par rapport à S2.

T_{21} est proportionnel au module de N_{21} , le rapport est noté f : c'est le coefficient de frottement. On traduit ceci par les équations vectorielles suivantes, ce sont les lois de Coulomb :

S'il y a glissement au contact $\vec{V}_g(I,1/2) \neq \vec{0}$

$$\text{alors : } \begin{cases} T_{21} = fN_{21} \\ \vec{V}_g(I,1/2) \wedge \vec{t} = \vec{0} \\ \vec{V}_g(I,1/2) \cdot \vec{t} < 0 \end{cases}$$

La première équation nous donne le module de l'effort tangentiel, la seconde équation nous donne sa direction et la troisième équation son sens.

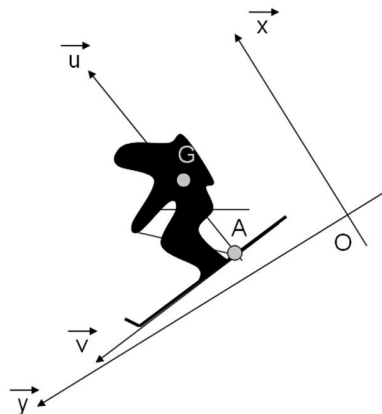
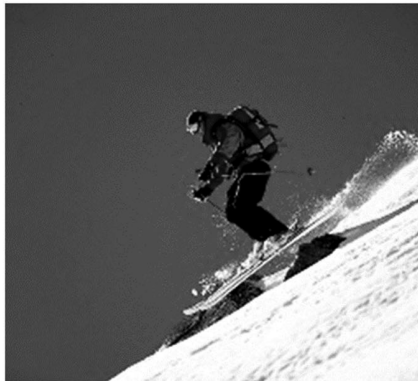
S'il n'y a pas de glissement au contact $\vec{V}_g(I,1/2) = \vec{0}$

alors : $T_{21} = fN_{21}$

Exercices de statique et cinématique

Exercice 1 : Tout schuss !

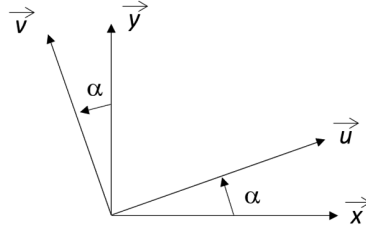
On considère un skieur en descente le long d'une pente enneigée rectiligne et qui décolle un instant au passage d'une bosse. Concentré et en plein schuss, il ne fait qu'un avec ses skis et ses bâtons : tout l'ensemble est assimilé à un solide rigide S.



On choisit de paramétrer la position du skieur S, au moment du saut (voir photo) par la position de A (coordonnées x et y dans le repère fixe $R(O, \vec{x}, \vec{y})$) et l'orientation α du repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ lié au skieur avec le repère R. Le centre d'inertie du skieur se trouve en G tel que : $\vec{AG} = a \vec{u}$.

Q1 Tracer la « figure de calcul » qui représente la rotation α et exprimer le taux de rotation $\vec{\Omega}(S/R)$ de S par rapport à R .

Petite question d'échauffement :



$$\vec{\Omega}_{(S/R)} = \dot{\alpha} \vec{z}$$

Q2 Exprimer la vitesse $\vec{V}(A/R)$ du point A par rapport à R en fonction de x , y et de leur dérivées par rapport au temps et écrire le torseur cinématique de S par rapport à R .

$$\vec{OA} = x\vec{x} + y\vec{y} \Rightarrow \vec{V}_{(A/R)} = \dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y}$$

On déduit des deux questions les éléments de réduction du torseur cinématique !

$$\{V(S/R)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{(S/R)} = \dot{\alpha} \vec{z} \\ \vec{V}_{(A/R)} = \dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} \end{array} \right\}_A$$

Q4 Que devient ce torseur au point G ?

On change de point avec la formule de Varignon !

$$\begin{aligned} \vec{V}_{(G/R)} &= \vec{V}_{(A/R)} + \vec{\Omega}_{(S/R)} \wedge \vec{AG} \\ &= \dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} + \dot{\alpha} \vec{z} \wedge a\vec{u} \\ &= \dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} + a\dot{\alpha} \vec{v} \end{aligned}$$

$$\text{Ce qui donne : } \{V(S/R)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{(S/R)} = \dot{\alpha} \vec{z} \\ \vec{V}_{(A/R)} = \dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} + a\dot{\alpha} \vec{v} \end{array} \right\}_G$$

Q5 En déduire l'expression de l'accélération $\vec{a}(G/R)$ de G par rapport à R .

Pour calculer l'accélération de G on dérive le vecteur vitesse précédemment calculé :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{(G/R)} &= \ddot{x}\vec{x} + \ddot{y}\vec{y} + a\left(\ddot{\alpha}\vec{v} + \dot{\alpha}(\dot{\alpha}\vec{z} \wedge \vec{v})\right) \\ &= \ddot{x}\vec{x} + \ddot{y}\vec{y} + a\left(\ddot{\alpha}\vec{v} - \dot{\alpha}^2 \vec{u}\right) \end{aligned}$$

En perspective d'un calcul de dynamique à venir on cherche la projection de l'accélération de G sur l'axe de la pente $\vec{y}$.

Q6 Proposer deux méthodes différentes, l'une à partir de la réponse à la question 5 et l'autre de la réponse à la question 4, pour obtenir cette grandeur... et effectuer ce calcul.

Méthode 1 : la basique un peu « lourde », on a calculé l'accélération et on projette sur l'axe demandé. Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\vec{y} \cdot \vec{a}_{(G/R)} &= \ddot{y} + a(\ddot{\alpha} \vec{y} \cdot \vec{v} - \dot{\alpha}^2 \vec{y} \cdot \vec{u}) \\ &= \ddot{y} + a(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha)\end{aligned}$$

Méthode 2 : la plus « fine », l'accélération est la dérivée de la vitesse, alors on projette la vitesse et on dérive ensuite. Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\vec{y} \cdot \vec{V}_{(G/R)} &= \dot{y} + a\dot{\alpha} \vec{y} \cdot \vec{v} \\ &= \dot{y} + a\dot{\alpha} \cos \alpha\end{aligned}$$

Puis on dérive par rapport au temps : $\frac{d(\vec{y} \cdot \vec{V}_{(G/R)})}{dt} = \ddot{y} + a(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha)$.

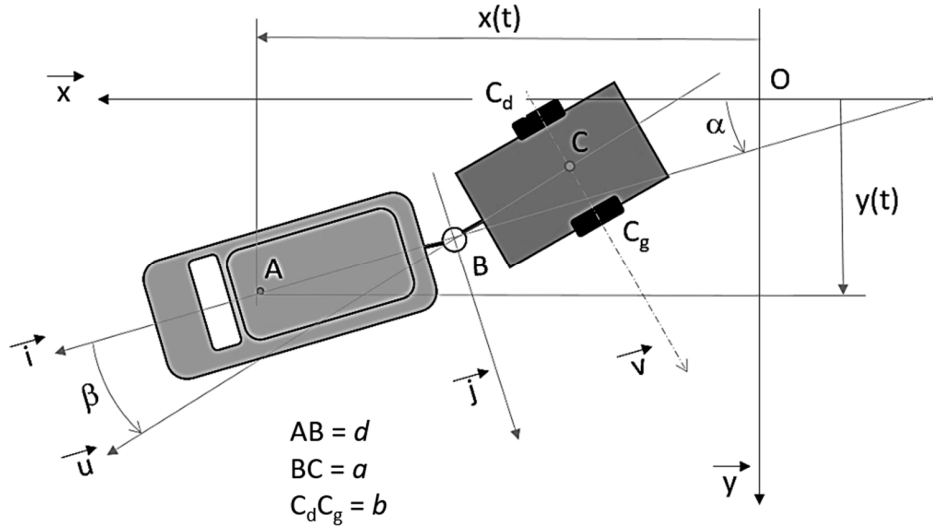
C'est possible ici car l'axe de projection est un axe « fixe » de R .

Exercice 2 : Étude cinématique d'un ensemble véhicule-remorque

Dans l'optique d'une étude dynamique du comportement d'une remorque, l'exercice propose quelques questions préliminaires sur des calculs de cinématique. Le véhicule (V) qui tire la remorque et se déplace le long d'une route plane. Sa position est définie dans le plan (O, x, y) par 3 paramètres : les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ d'un point A du véhicule et un angle $\alpha(t)$ qui donne la direction du véhicule. Le repère (A, i, j) est lié au véhicule. Les lois horaires de ces 3 trois paramètres sont imposées par la forme de la route et l'action du conducteur sur la pédale d'accélérateur.



La remorque (R) est considérée comme un 2nd solide articulé en B à l'arrière du véhicule. La rotation possible de la remorque est paramétrée par un angle $\beta(t)$ qui évolue en fonction du mouvement du véhicule et des sollicitations externes, coup de vent, effets de défauts de la route... le repère (B, u, v) est lié à la remorque. Suivant les conditions géométriques (distances a , b), du chargement de la remorque (répartition des masses des bagages) et de la suspension (raideur des ressorts-amortisseur), une petite oscillation $\alpha(t)$ du véhicule peut dégénérer en une instabilité $\beta(t)$ dangereuse pour les véhicules voisins. Une étude de ce mouvement est donc nécessaire.



Q1 Tracer une figure de calcul où figurent les deux angles de rotation α et β . Exprimer les deux taux de rotation $\vec{\Omega}(V / R_0)$ et $\vec{\Omega}(R / R_0)$ par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}, \vec{y})$ en fonction de ces angles et de leur dérivée.

Les deux angles sont autour du même axe de rotation. Les deux taux s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}\vec{\Omega}(V / R_0) &= \dot{\alpha} \vec{z} \\ \vec{\Omega}(R / R_0) &= (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}\end{aligned}$$

Q2 Exprimer la vitesse de A par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}, \vec{y})$. En déduire la vitesse de B par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}, \vec{y})$

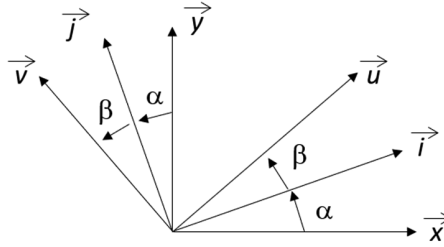
La vitesse de A s'obtient directement à partir des paramètres x et y qui définissent sa position :

$$\vec{OA} = x \vec{x} + y \vec{y} \Rightarrow \vec{V}(A / R_0) = \dot{x} \vec{x} + \dot{y} \vec{y}$$

A et B appartiennent au véhicule, aussi la vitesse de B peut être obtenue par la formule de Varignon :

$$\begin{aligned}
\vec{V}(B / R_0) &= \vec{V}(A / R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(V / R_0) \\
\Rightarrow \vec{V}(B / R_0) &= \dot{x} \cdot \vec{x} + \dot{y} \cdot \vec{y} + d \cdot \vec{i} \wedge \dot{\alpha} \cdot \vec{z} \\
\Rightarrow \vec{V}(B / R_0) &= \dot{x} \cdot \vec{x} + \dot{y} \cdot \vec{y} - d \dot{\alpha} \vec{j}
\end{aligned}$$

Il est inutile de projeter sur les axes de R_0 : ça ne rapporte pas de point et ça complique inutilement l'écriture.



Q3 Exprimer la vitesse de C par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}, \vec{y})$. En déduire les vitesses des points C_d et C_g , centre des roues droite et gauche de la remorque.

La vitesse de C s'obtient à partir de la vitesse de B par la formule de Varignon car B et C appartiennent à la remorque :

$$\begin{aligned}
\vec{V}(C / R_0) &= \vec{V}(B / R_0) + \overrightarrow{CB} \wedge \vec{\Omega}(R / R_0) \\
\Rightarrow \vec{V}(C / R_0) &= \dot{x} \cdot \vec{x} + \dot{y} \cdot \vec{y} - d \dot{\alpha} \vec{j} + a \cdot \vec{u} \wedge (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cdot \vec{z} \\
\Rightarrow \vec{V}(C / R_0) &= \dot{x} \cdot \vec{x} + \dot{y} \cdot \vec{y} - d \dot{\alpha} \vec{j} - a (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cdot \vec{v}
\end{aligned}$$

Pour les centres des roues C_d et C_g , c'est encore la formule de Varignon qui permet le calcul sachant que les deux ne vont se distinguer que par le signe + ou - devant la longueur $b/2$:

$$\begin{aligned}
\vec{V}(C_d / R_0) &= \vec{V}(C / R_0) + \underbrace{\overrightarrow{C_d C}}_{\substack{b \\ +v}} \wedge \vec{\Omega}(R / R_0) \text{ et } \vec{V}(C_g / R_0) = \vec{V}(C / R_0) + \underbrace{\overrightarrow{C_g C}}_{\substack{b \\ -v}} \wedge \vec{\Omega}(R / R_0) \\
\Rightarrow \begin{cases} \vec{V}(C_d / R_0) = \dot{x} \cdot \vec{x} + \dot{y} \cdot \vec{y} - d \dot{\alpha} \vec{j} - (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \left(a \cdot \vec{v} - \frac{b}{2} \vec{u} \right) \\ \vec{V}(C_g / R_0) = \dot{x} \cdot \vec{x} + \dot{y} \cdot \vec{y} - d \dot{\alpha} \vec{j} - (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \left(a \cdot \vec{v} + \frac{b}{2} \vec{u} \right) \end{cases}
\end{aligned}$$

Encore une fois, il est inutile de projeter sur les axes de R_0 : ça ne rapporte pas de point et ça complique inutilement l'écriture.

Q4 En supposant qu'il y a roulement sans glissement au contact « roue/route », déterminer la vitesse de rotation ω_d et ω_g de chacune des roues de rayon R. Ces vitesses sont-elles égales ?

On peut répondre à cette question en utilisant une méthode analytique. Pour cela, il faut écrire les vitesses des points de contact I_d et I_g entre les roues droite et gauche et le sol en utilisant une fois la formule de Varignon. Par exemple, pour la roue droite :

$$\begin{aligned}\vec{V}(I_d / R_0) &= \vec{V}(C_d / R_0) + \underbrace{\vec{I_d C_d}}_{R\vec{z}} \wedge \underbrace{\vec{\Omega}(R / R_0)}_{(\dot{\alpha} + \dot{\beta})\vec{z} + \omega_d \vec{v}} \\ \Rightarrow \vec{V}(I_d / R_0) &= \dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} - d\dot{\alpha}\vec{j} - (\dot{\alpha} + \dot{\beta})\left(a\vec{v} - \frac{b}{2}\vec{u}\right) - R\omega_d \vec{u}\end{aligned}$$

Si la vitesse de glissement en I_d est nulle, alors la relation vectorielle obtenue donne deux relations scalaires en projetant sur les axes U et V :

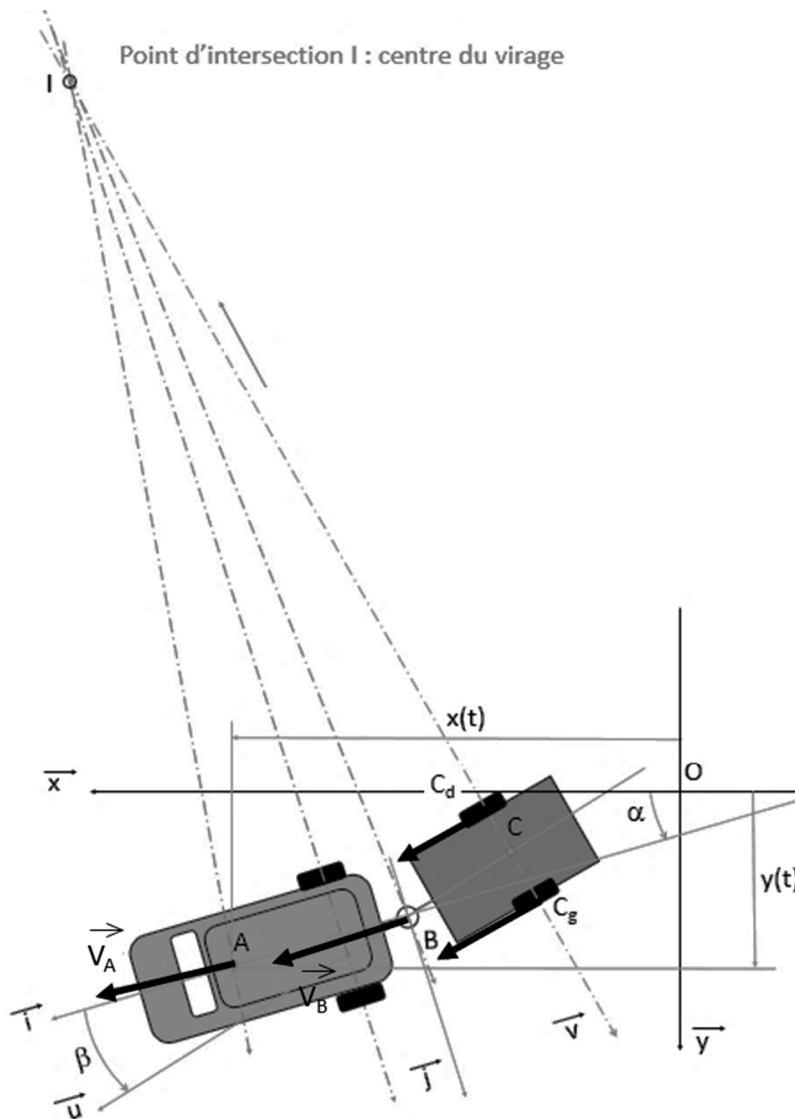
$$\begin{aligned}\vec{V}(I_d / R_0) = \vec{0} &\Rightarrow \dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} - d\dot{\alpha}\vec{j} - (\dot{\alpha} + \dot{\beta})\left(a\vec{v} - \frac{b}{2}\vec{u}\right) = R\omega_d \vec{u} \\ \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}\cos(\alpha + \beta) + \dot{y}\sin(\alpha + \beta) - d\dot{\alpha}\sin\beta + \frac{b}{2}(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) = R\omega_d \\ -\dot{x}\sin(\alpha + \beta) + \dot{y}\cos(\alpha + \beta) - d\dot{\alpha}\cos\beta - a(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

De la 1^{ère} relation on tire l'expression de ω_d . Si on procède de même pour la roue gauche, l'expression de ω_g sera identique hormis le signe devant $b/2 \rightarrow$ les deux vitesses sont donc différentes.

$$\begin{cases} \omega_d = \frac{\dot{x}\cos(\alpha + \beta) + \dot{y}\sin(\alpha + \beta) - d\dot{\alpha}\sin\beta + \frac{b}{2}(\dot{\alpha} + \dot{\beta})}{R} \\ \omega_g = \frac{\dot{x}\cos(\alpha + \beta) + \dot{y}\sin(\alpha + \beta) - d\dot{\alpha}\sin\beta - \frac{b}{2}(\dot{\alpha} + \dot{\beta})}{R} \end{cases}$$

À noter que la 2^{nde} expression scalaire donne des relations identiques à respecter pour la roue droite et la roue gauche entre x , y , α et β qui ne sont pas indépendants si les deux roues roulent sans glisser : soit une relation de plus par paire de roues. Écrire ces mêmes relations pour les roues avant et arrière du véhicule ajouterait encore deux relations entre les paramètres $\rightarrow$ soient 3 relations pour 4 paramètres ce qui permettrait, en théorie, de tout connaître en fonction d'un seul paramètre imposé par l'action du conducteur sur la pédale d'accélérateur.

On peut aussi répondre graphiquement à cette question. La vitesse du centre de la roue est parallèle à la direction du plan moyen de la roue s'il n'y a pas de glissement au contact « roue/route ».



Cette propriété donne les directions des vitesses de C_g et C_d ainsi qu'une information sur le centre de rotation de la remorque. Puisque la remorque est fixée au véhicule en B , le centre de rotation est le même que celui de la voiture. L'axe de l'essieu arrière permet de trouver le centre de rotation I : ainsi (i) toutes les vitesses sont perpendiculaires aux rayons issus de I et (ii) plus on est loin de I et plus la vitesse est grande car $V = R\Omega$ et Ω est le même pour tous les points du solide.

Ainsi la figure montre que les vitesses de C_d et C_g ne sont pas égales (ici C_d est plus petite que C_g car le point C_g est plus éloigné de I) ; que la vitesse de A n'est pas portée par la direction i (elle est portée par la normale à IA) et que celle de B n'est pas portée par la direction u (respectivement portée par la normale à IB). Sur la

même figure on pourrait montrer que les roues avant ne sont pas parallèles puisque leurs axes de rotation propre convergent vers I (cf. épure de Jeanteau) !

Exercice 3 : Cinématique de la marche

La marche humaine est un phénomène cyclique. Le cycle de marche de chaque jambe se divise en deux phases : une phase d'appui qui commence au moment où le talon prend contact avec le sol et se termine quand les orteils décollent du sol ; une phase pendulaire pendant laquelle le pied n'est pas en contact avec le sol.



Les prothèses de jambe portées par les amputés fémoraux (amputation au-dessus du genou) doivent non seulement imiter l'aspect d'une jambe valide mais permettre une marche quasi normale dans les situations de la vie quotidienne.

Le sujet proposé s'inspire d'une partie de l'étude d'un prototype de prothèse de jambe. Le but de la réalisation est de mettre au point un système automatique de régulation de la phase pendulaire (frein piloté par microprocesseur, approximation d'un système musculaire et nerveux) pour aligner le mouvement de la prothèse sur le mouvement d'une jambe valide.

Les mouvements étudiés sont des mouvements plans, le plan sagittal du marcheur étant confondu avec le plan vertical $(O, \vec{x}, \vec{y})$. Le repère $R_g (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié au sol : c'est le repère de référence. Le membre inférieur muni de la prothèse est schématisé par deux solides :

(P) : premier élément du membre prothétique (cuisse et emboîture, liées rigidement). Le repère $(H, \vec{i}, \vec{j}, \vec{z})$ est lié à (P), la position de (P) par rapport à R_g est repérée par x, y et α tels que :

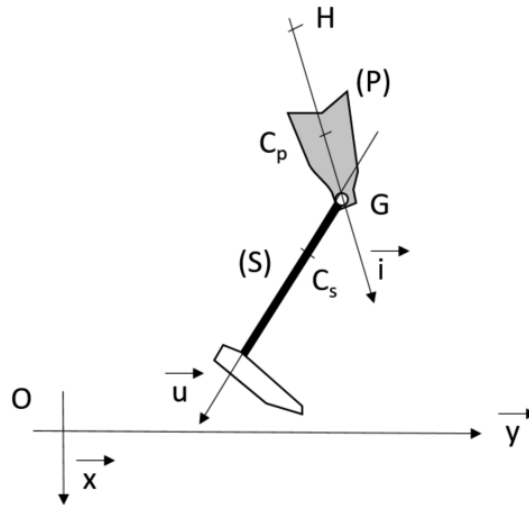
$$\overrightarrow{OH} = x\vec{x} + y\vec{y} \quad \text{et} \quad \alpha = (\vec{x}, \vec{i}) = (\vec{y}, \vec{j})$$

Le centre d'inertie de (P) est noté C_p tel que : $\overrightarrow{HC_p} = L\vec{i}$. On désigne par a la distance entre les axes d'articulation de la hanche et du genou :

$$\overrightarrow{HG} = a\vec{i}$$

(S) : second élément du membre prothétique (partie de la jambe artificielle allant du genou au pied). Le repère $(G, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ est lié à (S), le mouvement de (S) par rapport à (P) est une rotation autour de l'axe $(G, \vec{z})$. Le centre d'inertie de (S) est noté C_s tel que : $\overrightarrow{GC_s} = b\vec{u}$. L'angle β est défini par :

$$\beta = (\vec{x}, \vec{u}) = (\vec{y}, \vec{v})$$



Q1 Calculer la vitesse du point H par rapport à R_g en fonction de x et y et de leurs dérivées.

Le vecteur position est donné, le calcul de la vitesse est une simple dérivation par rapport au temps avec les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ qui sont fixes :

$$\overrightarrow{OH} = x\vec{x} + y\vec{y} \Rightarrow \vec{V}_{(H/R_g)} = \dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y}$$

Q2 Exprimer les vecteurs taux de rotation de $(P)/R_g$ et de $(S)/R_g$

Le premier élément est paramétré angulairement par rapport à la base fixe, par un angle α . Son taux de rotation s'exprime :

$$\vec{\Omega}_{(P/R_g)} = \dot{\alpha}\vec{z}$$

Le second élément est paramétré angulairement aussi par rapport à la base fixe par un angle β . Son taux de rotation s'exprime :

$$\vec{\Omega}_{(S/R_g)} = \dot{\beta}\vec{z}$$

Q3 Calculer la vitesse de G par rapport à R_g en fonction de x , y et α et de leurs dérivées.

Pour calculer la vitesse de G on dérive le vecteur position : $\overrightarrow{OG} = x\vec{x} + y\vec{y} + a\vec{i}$ et cette fois le vecteur $\vec{i}$ n'est pas fixe dans R_g aussi il faut utiliser la formule de la base mobile. En revanche a est une constante :

$$\begin{aligned}
 \vec{V}_{(G/R_g)} &= \dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} + a\left(\vec{\Omega}_{(P/R_g)} \wedge \vec{i}\right) \\
 &= \dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} + a\left(\dot{\alpha}\vec{z} \wedge \vec{i}\right) \\
 &= \dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} + a\dot{\alpha}\vec{j}
 \end{aligned}$$

Q4 En déduire l'expression de l'accélération de G par rapport à R_g en fonction de x, y et α et de leurs dérivées.

Pour calculer l'accélération de G on dérive le vecteur vitesse précédemment calculé :

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_{(G/R_g)} &= \ddot{x}\vec{x} + \ddot{y}\vec{y} + a\left(\ddot{\alpha}\vec{j} + \dot{\alpha}\left(\dot{\alpha}\vec{z} \wedge \vec{j}\right)\right) \\
 &= \ddot{x}\vec{x} + \ddot{y}\vec{y} + a\left(\ddot{\alpha}\vec{j} - \dot{\alpha}^2\vec{i}\right)
 \end{aligned}$$

Q5 Calculer la vitesse du point C_s par rapport à R_g.

Pour calculer la vitesse de C_s on dérive le vecteur position : $\vec{OC}_s = x\vec{x} + y\vec{y} + a\vec{i}$ et cette fois le vecteur i n'est pas fixe dans R_g aussi il faut utiliser la formule de la base mobile. En revanche a est une constante :

$$\begin{aligned}
 \vec{V}_{(C_s/R_g)} &= \dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} + a\dot{\alpha}\vec{j} + b\left(\vec{\Omega}_{(S/R_g)} \wedge \vec{u}\right) \\
 &= \dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} + a\dot{\alpha}\vec{j} + b\left(\dot{\beta}\vec{z} \wedge \vec{u}\right) \\
 &= \dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} + a\dot{\alpha}\vec{j} + b\dot{\beta}\vec{v}
 \end{aligned}$$



Les lois de mouvement $x(t)$, $y(t)$ et $\alpha(t)$ sont imposées par le marcheur. Elles sont obtenues grâce au suivi de points caractéristiques sur une vidéo (voir figure ci-dessus) : le suivi des déplacements du point H et du point G permet de calculer

l'angle $\alpha(t)$. Les lois sont donc connues et peuvent s'écrire sous la forme suivante avec V , δ et ω ainsi que x_0 et y_0 identifiées :

$$y(t) = y_0 + Vt \quad x(t) = x_0 + \delta \cos \omega t \quad \text{et} \quad \alpha(t) = \alpha_0 + \Delta \cos \omega t$$

Q6 Donner une signification aux différentes grandeurs V , δ , Δ , ω , α_0 , x_0 et y_0 .

V est la vitesse d'avancée du marcheur et la pente de la droite du graphique du haut, y_0 est la position horizontale initiale qu'on peut prendre égale à 0. δ est l'amplitude des oscillations du mouvement haut-bas de la hanche et x_0 est la hauteur moyenne du point H (a priori négative avec le repère choisi). Pour obtenir α , il convient de suivre deux points (ici H et G) afin de calculer l'angle à chaque instant en fonction des positions. Δ est l'amplitude des oscillations et α_0 l'angle moyen qui n'est pas nécessaire nul suivant le marcheur. ω est la pulsation du marcheur. Dans une étude dynamique ces mesures seraient les entrées d'une détermination des oscillations de (S) en fonction du comportement du système amortisseur installé entre (P) et (S).

Exercice 4 : Système de désenfumage

Le support proposé rentre dans le cadre d'une collaboration avec l'entreprise Souchier-Boullet qui produit des dispositifs d'évacuation naturelle de fumées et de chaleur (D.E.N.F.C.) complets, équipés de leurs propres mécanismes et alimentés en énergies. Le système peut être installé en façade de bâtiment ou sur la toiture et doit s'ouvrir en cas d'incendie en respectant la réglementation en vigueur sur le temps d'ouverture et sur les cas de charge proposés par les normes. La résistance à l'ouverture provient soit du vent lorsque le système est situé en façade, soit aux effets conjugués du vent et de la neige lorsqu'il est situé en toiture.



Figure 1 : Vue d'ensemble du système D.E.N.F.C. du côté cinématique

Ces D.E.N.F.C. sont constitués de lames en aluminium extrudé, polycarbonate ou verre armé, trempé ou feuilleté. Ces lames pivotent sur un cadre en aluminium de

section variable en fonction de l'implantation du D.E.N.F.C. sur le support. L'appareil est défini par la dimension de ce cadre :

- ℓ = largeur trémie, c'est la dimension mesurée parallèlement aux lames.
- L = longueur trémie, c'est la dimension mesurée perpendiculairement aux lames.

$L \times \ell = A_v$ est surface géométrique du dispositif et l'entreprise prévoit la mise en place de D.E.N.F.C. dont la surface des lames peut aller jusqu'à 7 m^2 et qui doivent supporter des contraintes pouvant être 14 fois supérieures à celles évaluées sur le système de la figure 1 qui ne fait que $0,54 \text{ m}^2$. L'objectif de cette étude est de valider ou de proposer des solutions d'amélioration afin de permettre une surface A_v pouvant atteindre 7 m^2 en fonction des motorisations avec :

$$\ell = 2\,300 \text{ mm et } L = 3\,000 \text{ mm.}$$

Le pas entre deux lames est de 125 mm, ce qui donne un maximum de 24 lames à commander à partir d'un seul système cinématique.

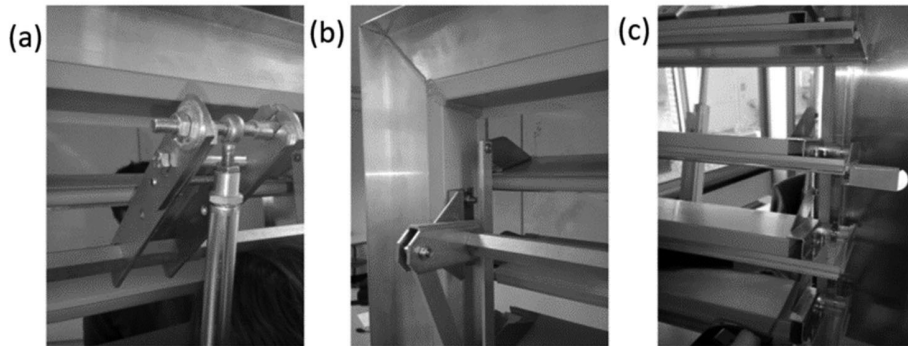


Figure 2 : Autres vues du système D.E.N.F.C. : (a) liaison entre le vérin et le levier (3) ; (b) liaison entre le levier et la bielle (4) (notons qu'il y a deux biellettes de part et d'autre du système ; (c) liaison entre les lames et le bâti.

Paramétrage et cinématique du D.E.N.F.C.

L'objectif de cette partie est de modéliser le système d'ouverture d'une lame de D.E.N.F.C. afin (i) d'établir les relations permettant de déterminer l'évolution de l'angle d'ouverture des lames en fonction du déplacement du vérin et (ii) de déterminer les efforts dans les différents composants et notamment l'effort F_v demandé au niveau du vérin. Les outils classiques de la cinématique et de la statique sont mobilisés.

Sur la figure 3, on peut noter que chaque axe $\vec{x}_i$ est paramétré par rapport à l'axe x_0 via un angle θ_i . Les longueurs dans les directions x_i sont notées ℓ_i . Lorsqu'il y a deux directions privilégiées comme pour les pièces (3) et (5) alors la seconde direction est notée u_i et l'angle fixe entre x_i et u_i est noté α_i (c'est une constante éventuellement réglable mais fixe durant le mouvement du système).

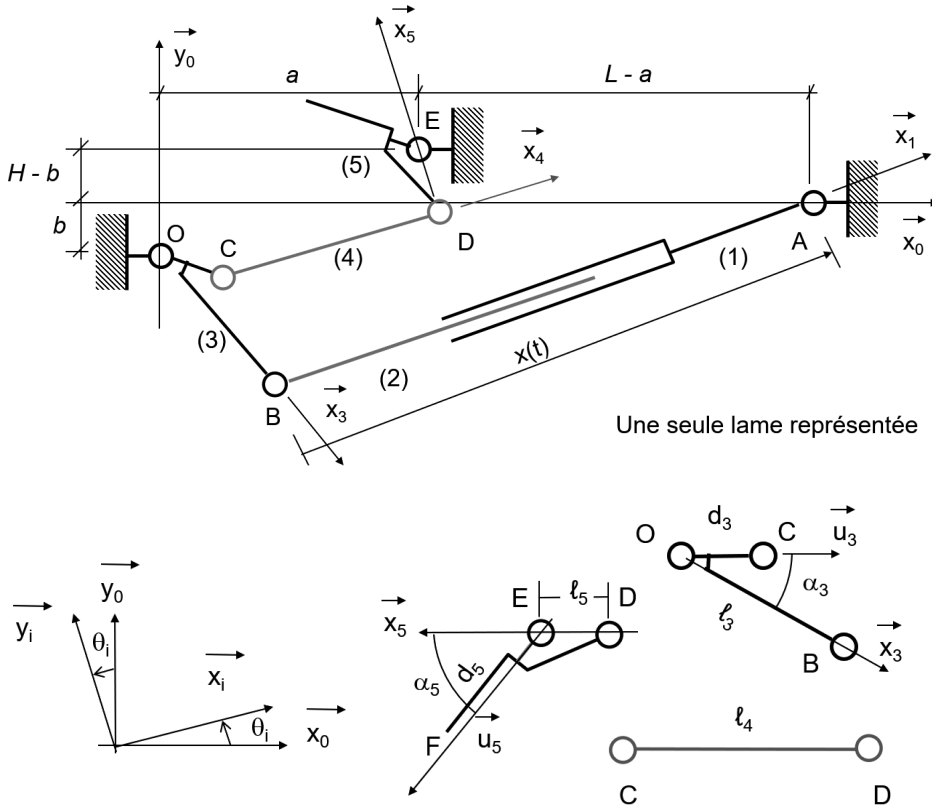


Figure 3 : Schématisation du système D.E.N.F.C. en haut
et définition des axes et des longueurs en bas.

L'étude de la position du système se fait en développant les relations géométriques dans les deux boucles OAB et OCDE. Les calculs et la résolution classique mais intéressante d'un système 4 barres sont reportés en annexe. La 1^{ère} fermeture géométrique s'écrit :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} \Rightarrow L\overrightarrow{x_0} + b\overrightarrow{y_0} = \ell_3\overrightarrow{x_3} + x(t)\overrightarrow{x_1}$$

Ce qui donne deux relations scalaires :

$$L = \ell_3 \cos \theta_3 + x(t) \cos \theta_1$$

$$b = \ell_3 \sin \theta_3 + x(t) \sin \theta_1$$

Ici l'entrée est le déplacement de la tige du vérin par rapport au corps qui peut s'écrire : $x(t) = x_0 + V.t$ où V est la vitesse de la tige et t le temps. On cherche l'évolution des rotations θ_3 et θ_1 : une petite manipulation mathématique est nécessaire qui consiste à isoler θ_1 ou θ_3 en exploitant que « $\sin^2 + \cos^2 = 1$ », puis de remplacer les sinus et cosinus restant par les formules connues en posant $\tau = \tan(\theta/2)$. Le problème devient alors une équation du 2nd degré à résoudre.

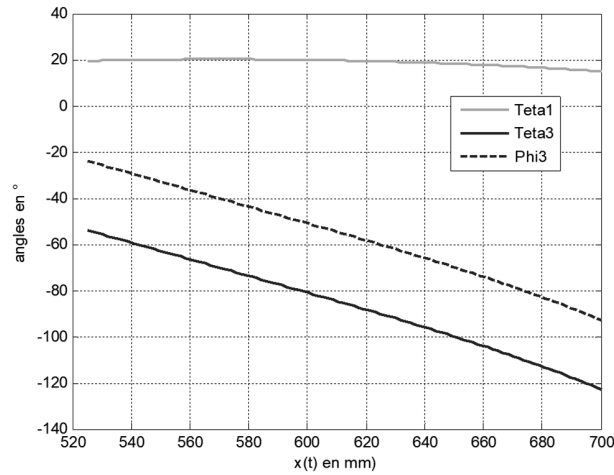


Figure 4 : Évolution des rotations θ_1 et θ_3 du système D.E.N.F.C. Compte tenu du décalage de 30 degrés (l'angle α_3 est nécessairement un multiple de 30° puisque les deux parties du levier (3) sont fixées sur un axe à section hexagonale).

En guise d'illustration, le graphe de la figure 4 représente l'évolution des deux angles θ_1 et θ_3 en fonction de la longueur $x(t)$ du vérin. Les valeurs numériques retenues pour les dimensions du système correspondent au système de démonstration vu sur les photos de la figure 1 :

$$L = 590 \text{ mm} ; b = 45 \text{ mm} ; \ell_3 = 160 \text{ mm} ; x \text{ varie de } 525 \text{ à } 700 \text{ mm en } 20 \text{ s}$$

On peut noter que le vérin oscille très peu mais qu'en revanche l'amplitude de θ_3 est conséquente : environ 70° . L'angle $\varphi_3 = \theta_3 + \alpha_3$ est désormais connu à chaque instant et la 2nde fermeture géométrique de la boucle OCDE va permettre de déterminer l'évolution de l'angle θ_5 d'ouverture des lames :

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} \Rightarrow a\overrightarrow{x_0} + H\overrightarrow{y_0} = d_3\overrightarrow{u_3} + \ell_4\overrightarrow{x_4} + \ell_5\overrightarrow{x_5}$$

On procède de la même manière que précédemment :

$$a = d_3 \cos \varphi_3 + \ell_4 \cos \theta_4 + \ell_5 \cos \theta_5$$

$$H = d_3 \sin \varphi_3 + \ell_4 \sin \theta_4 + \ell_5 \sin \theta_5$$

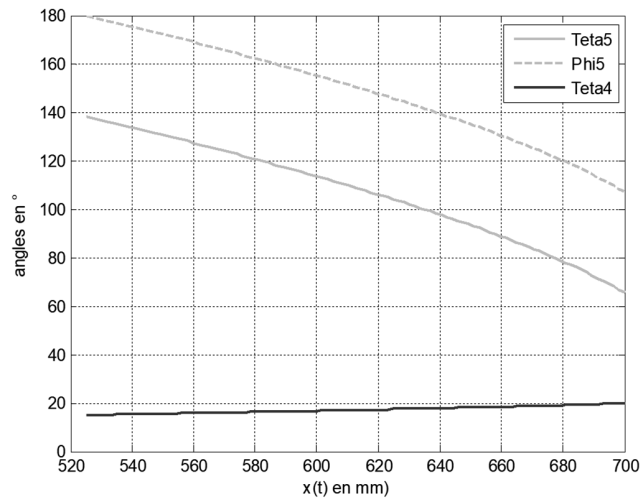


Figure 5 : Évolution des rotations θ_4 et θ_5 du système D.E.N.F.C. On détermine le décalage α_5 de telle façon que la lame (dirigée suivant u_5) soit fermée pour $t = 0$.

La courbe pointillée donne alors l'évolution de $\varphi_5 = \theta_5 + \alpha_5$. Cet angle est bien égal à 180° (position fermée) pour $x = x_0$

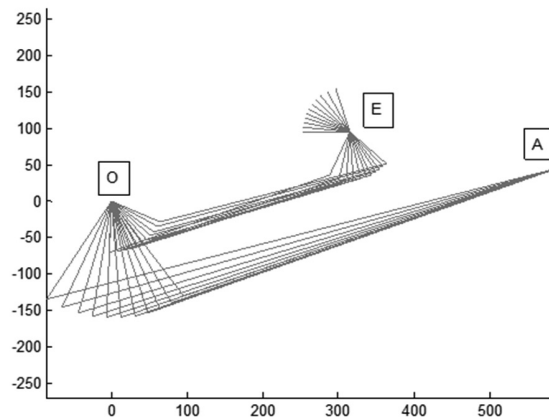


Figure 6 : Visualisation de l'évolution du système D.E.N.F.C.

Pour illustrer les relations obtenues on trace les courbes pour les dimensions du système :

$$H = 95 \text{ mm} ; a = 315 \text{ mm} ; d_3 = 70 \text{ mm} ; \ell_4 = 310 \text{ mm} ; \ell_5 = 65 \text{ mm}$$

Le graphe de la figure 5 montre que (i) la bielle (4) oscille peu et que (ii) l'amplitude de la lame est de 73° , ce qui correspond au cahier des charges du système pour lequel les lames doivent s'ouvrir de 75° avec une tolérance de $\pm 5^\circ$. La figure 6 montre l'évolution du système.

Équilibre et statique du D.E.N.F.C.

Intéressons-nous maintenant aux actions mécaniques dues au vent ou à la neige et qui agissent sur les lames du D.E.N.F.C. Par une étude statique (les vitesses et accélérations sont faibles ici : la vitesse V de sortie de tige du vérin n'est que de 8 mm/s) nous déterminerons les efforts sur chacune des pièces, dans les articulations et l'effort que doit délivrer le vérin. Dans un 1^{er} temps, nous ferons deux hypothèses que nous validerons ultérieurement :

- Le poids propre des pièces du système est faible devant les forces dues aux charges extérieures.
- Les liaisons et articulations sont sans frottement.

Deux solides ou ensembles sont rapidement identifiés comme uniquement soumis à deux forces, ce qui permet de déterminer la direction de ces efforts. Ainsi les forces F_b agissant sur la bielle sont dirigées suivant l'axe x_4 et de même la poussée F_v du vérin est portée par l'axe x_1 .

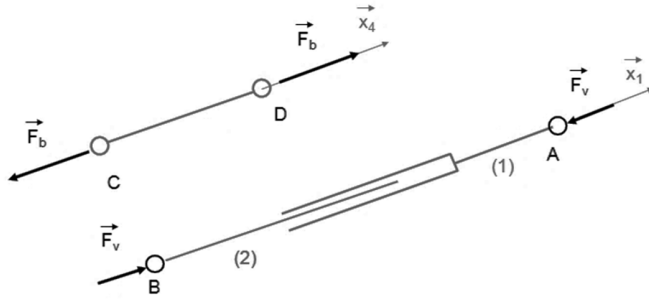


Figure 7 : Modélisation des efforts F_b et F_v dans le système D.E.N.F.C.

Connaissant ces directions, il est possible de déterminer la relation entre F_v et F_b en développant l'équilibre des moments en O sur le levier (3) :

$$\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{F_b} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_v} = \vec{0} \Rightarrow F_v = \frac{d_3 \sin(\theta_4 - \varphi_3)}{\ell_3 \sin(\theta_1 - \theta_3)} F_b$$

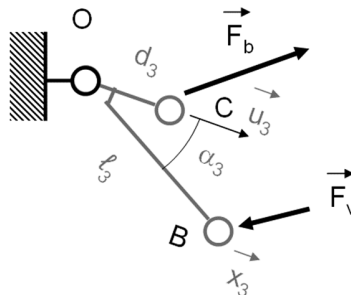


Figure 8 : Équilibre du levier (3)

Avec l'équilibre des forces, on obtient l'action dans l'articulation en O :

$$\vec{F}_v + \vec{F}_b + \vec{F}_O = \vec{0} \Rightarrow F_O = \sqrt{F_v^2 + F_b^2 - 2F_v F_b \cos(\theta_4 - \theta_1)}$$

On peut noter que toutes ces relations font intervenir les différents angles et que l'analyse géométrique préalable sera utile pour obtenir l'évolution des diverses forces durant la phase d'ouverture des lames.

Compte tenu du système de parallélogramme déformable, le PFS serait d'un usage complexe aussi nous utilisons le théorème de conservation de la puissance pour déterminer la relation entre F_b et les forces surfaciques f_{ext} exercées par la neige ou le vent sur les lames :

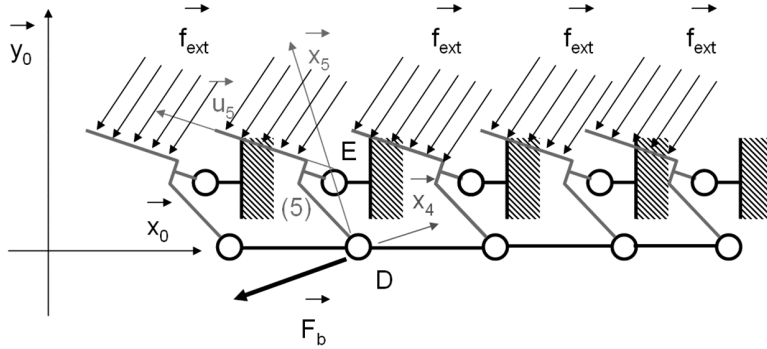


Figure 9 : Prise en compte des actions sur les N lames du système D.E.N.F.C.

On calcule la puissance de la répartition de charge f_{ext} et celle de l'effort F_b et puisque toutes les articulations sont supposées parfaites et que nous sommes en quasi-statique, la somme de ces deux puissances est nulle. Ce qui donne :

$$\vec{F}_b \cdot \underbrace{\vec{V}_D}_{\Omega_5 \wedge \overrightarrow{ED}} + \sum_{i=1}^N A_{lame} \vec{f}_{ext} \cdot \underbrace{\vec{V}_G}_{\Omega_5 \wedge \overrightarrow{EG}} = 0$$

G est le barycentre de la lame confondu avec le centre de poussée de la répartition de forces surfaciques f_{ext} si cette dernière est uniforme. Notons d_5 la distance EG et A_{lame} l'aire d'une lame qui peut aussi s'écrire : $A_5 = 2d_5L_5$ avec L_5 la longueur de la lame ou la largeur du système. Pour un système de N lames, la somme revient à multiplier par N le calcul de la puissance puisque toutes les lames tournent à la même vitesse et sont soumises à la même distribution de force.

$$F_b = -\frac{A_{totale} d_5 p_{ext}}{\ell_5 \sin(\theta_4 - \theta_5)}$$

Grâce à cette relation où p_{ext} est la pression normale à la lame et A_{totale} l'aire totale de la trémie, on peut déterminer F_b puis, grâce à la relation précédente on obtient F_O et F_v la force de poussée du vérin.

Pour illustrer les résultats, nous avons le cas d'un système disposé en toiture et d'une épaisseur de neige qui génère une charge surfacique de 50 kg/m^2 (ou 500 Pa). L'aire totale de la trémie du système de démonstration vaut : $A_{totale} = 0,54 \text{ m}^2$. Lorsque le système s'ouvre, la lame est horizontale et le poids de la neige donne une pression $p_{ext} = p_{neige}$. Mais cette pression évolue au fur et à mesure que la lame se soulève. Bien sûr, la neige peut glisser et l'épaisseur est susceptible de diminuer au cours de l'ouverture néanmoins, pour se mettre dans les conditions les plus défavorables, on considère que le poids reste constant tout au long de la phase d'ouverture. Compte tenu du changement d'orientation, la pression évolue donc sous la forme :

$$p_{ext} = -\cos\phi_5 p_{neige}$$

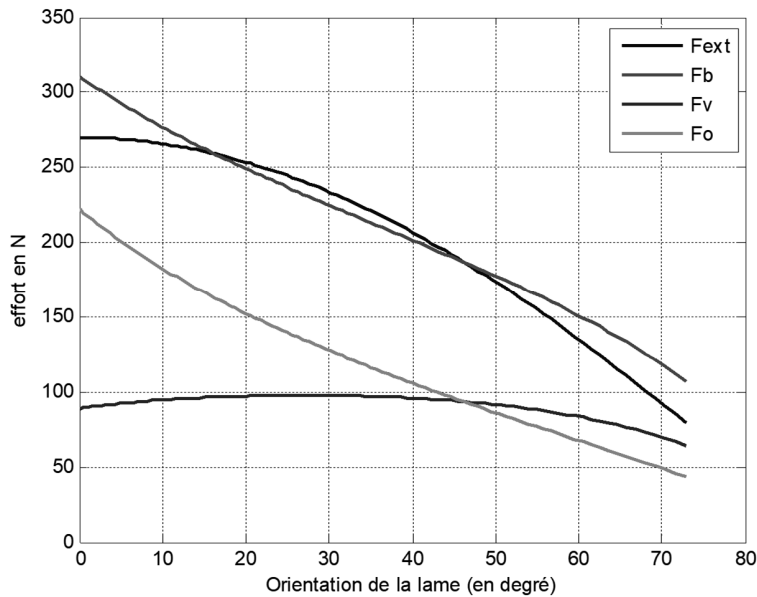


Figure 10 : Évolution des efforts durant la phase d'ouverture du DENFC

La figure 10 montre l'évolution des charges dans ce cas. La force F_{ext} est la résultante des forces de pression sur l'ensemble des lames : $F_{ext} = A_{tot} p_{ext}$. Elle vaut 270 N (soit l'équivalent d'une masse de 27 kg) au démarrage et décroît ensuite. F_b et F_v sont positifs ce qui, compte tenu des orientations choisies a priori dans l'étude des efforts, représente une force de traction dans la bielle et une compression sur le vérin.

L'effort maximal de traction sur la bielle est de 310 N ; rappelons qu'il y a 2 bielles, une de chaque côté de la trémie, soit donc une traction de 155 N sur chacune. Le vérin, actionneur unique, doit fournir une poussée qui peut atteindre 100 N sur ce modèle. Sachant que le vérin électrique est affiché pour générer jusqu'à 650 N de poussée, ce dernier est donc capable d'assurer l'ouverture des lames dans ces

conditions et éventuellement pour une surface de trémie jusqu'à 6,5 fois plus grande, soit une trémie de 3,5 m².

Lorsque le système est fermé, il doit rester fermé même en cas de dépression à l'extérieur du bâtiment. La norme prévoit que le système doit résister à une dépression de 1500 Pa. Seule la valeur au démarrage est utile car une fois les lames ouvertes les pressions s'égalisent de chaque côté et l'effort disparaît. En position fermée, donc, la pression est égale à la dépression du vent :

$$p_{ext} = -p_{vent}$$

Le signe négatif de F_{ext} inverse l'ensemble des signes et, par ailleurs, l'intensité des forces est multipliée par 3 par rapport au cas « neige ». Les bielles sont sollicitées en compression et encaissent une charge de $F_b = -930$ N. Dans ce cas il y a un risque de flambage d'autant plus grand que la surface de la trémie sera grande. Nous reviendrons sur la tenue des composants dans la partie suivante.

Le vérin ne pousse pas les lames, il doit retenir le système car la dépression du vent tend à ouvrir la lame tout seul. Il est donc nécessaire que l'actionneur ne soit pas réversible pour que le maintien en position fermée soit efficace.

Conclusion

Pour conclure, reconsidérons l'hypothèse faite sur le frottement. Le frottement dans les articulations génère un couple résistant qui s'oppose au mouvement.

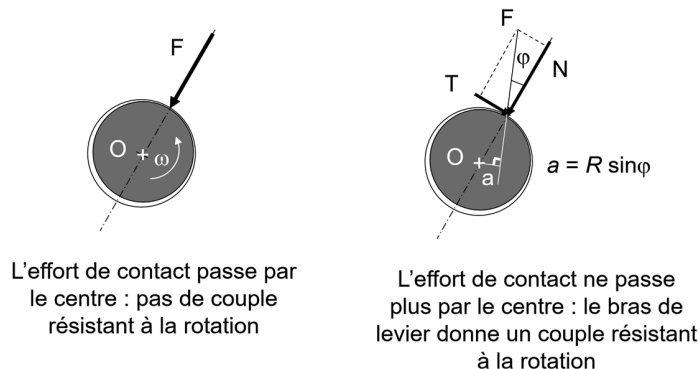


Figure 11 : Articulation avec ou sans frottement : évaluation du couple résistant.

Sur la figure 11 à gauche on voit que si le contact entre l'axe et l'alésage de rayon R se fait sans frottement, la force de contact F passe par le centre O de la liaison et ne génère aucun couple résistant par rapport au centre de la liaison : c'est une liaison pivot parfaite ! En revanche, figure de droite, s'il y a du frottement au contact alors la force F s'incline de φ par rapport à la normale au contact et un bras de levier « a » apparaît : ce bras de levier vaut « $R \sin \varphi$ » où φ est l'angle de frottement.

Comparons le couple généré par le frottement dans le guidage en rotation du levier (3) avec ceux de F_v et F_b qui entraînent ou résistent au mouvement du levier. Les moments de F_v et F_b sont égaux bien sûr et valent :

$$M = d_3 F_b \sin(\theta_4 - \varphi_3) = \ell_3 F_v \sin(\theta_1 - \theta_3)$$

Le couple de frottement quant à lui est proportionnel à l'effort F_O et vaut :

$$C = R \sin \varphi F_O = R \sin \varphi \sqrt{F_v^2 + F_b^2 - 2 F_v F_b \cos(\theta_4 - \theta_1)}$$

L'application numérique avec un coefficient de frottement $\tan \varphi = 0,1$ et un rayon $R = 10$ mm pour le guidage en rotation montre que ce couple ne dépasse pas 1,6 % du moment M . On peut donc largement négliger cette influence. Même dans le cas plus critique d'un frottement de 0,2 avec un arbre de 30 mm de diamètre ($R = 15$ mm), le couple de frottement ne dépasse pas 5 % de celui transmis. En conséquence les évaluations faites plus haut pour une trémie de 0,54 m² sont légitimes.

	Trémie 0,54 m ² P _{neige} = 500 Pa	Trémie 7 m ² P _{neige} = 250 Pa
Force bielle – neige	155 N	1010 N
Force bielle – dépression	–470 N	–6060 N
Force vérin	98 N	630 N

Le tableau ci-dessus récapitule les efforts F_v maxi estimés dans le vérin et sur chaque bielle (l'effort F_b est divisé par 2 car il y a une bielle de chaque côté des lames à soulever) pour les deux cas suivants : trémie de 0,54 m² du matériel de démonstration et trémie de 7 m² qui est l'objectif recherché par l'entreprise Souchier-Boullet. Il faut noter que dans le cas de grandes surfaces, la norme prévoit une performance moindre en termes de hauteur de neige à soulever et réduit la pression à 250 Pa au lieu de 500. Ainsi, le vérin utilisé pourra effectivement fonctionner jusqu'à 7 m² de surface de trémie mais nous serons alors à la limite de la capacité du vérin sans marge de sécurité. Il faut aussi noter la charge élevée dans la bielle et tout particulièrement pour le cas de la dépression du vent de 1500 Pa où une compression de plus de 6000 N peut conduire à du flambage.

Exercice 5 : Un peu de statique issue de la bande dessinée

Dans une bande dessinée de Ceppi parue en 1983 chez Casterman, *La malédiction de Surya*, les 3 protagonistes Stéphane, Cynthia et Richard arrivent devant un palais abandonné au cœur de la jungle dans la réserve de Mudumalai en Inde. Mais le palais est fermé par une lourde porte aussi Richard imagine-t-il un ingénieux système de bélier réalisé avec un tronc d'arbre fixé sur un portique opportunément situé en face de la lourde porte. On peut imaginer qu'à 3 personnes, ils auront eu la force de fixer ce système. La figure 1 schématise cette installation.

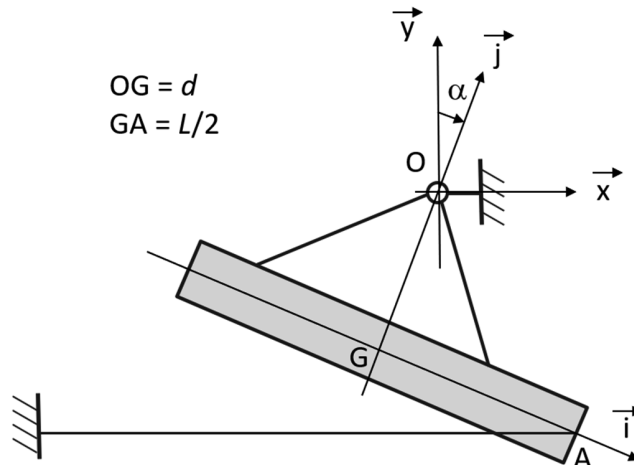


Figure 1 : schématisation du système

Dans un 1^{er} temps, le bélief est maintenu en équilibre par deux cordes fixées sur le tronc cet ensemble (tronc + cordes) est considéré comme un solide S unique de masse M et de centre de gravité G . Il se trouve articulé par rapport au portique au point O (voir schématisation ci-dessus). L'action mécanique du portique sur l'ensemble « bélief » est modélisé par un glisseur en O :

$$\{F_{\text{portique} \rightarrow \text{bélief}}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_O = X_O \cdot \vec{x} + Y_O \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O$$

Le bélief est retenu en position inclinée d'un angle $\alpha = -30^\circ$ (α est l'angle entre les axes x et i ou y et j) par une corde que nous supposons horizontale et qui est accrochée en A sur le bélief. Cette force est représentée par un glisseur en A :

$$\{F_{\text{corde} \rightarrow \text{bélief}}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_A = -X_A \cdot \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

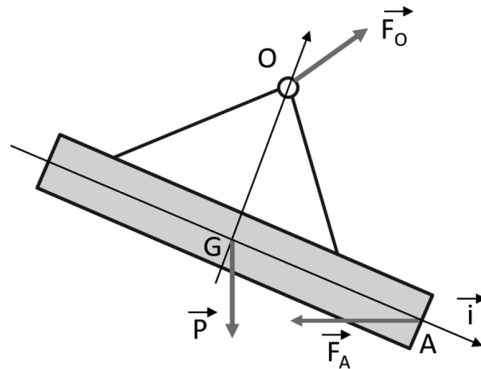
La poutre en chêne est un cylindre de dimensions : $L = 3,5$ m, $D = 50$ cm. Le chêne possède une masse volumique $\rho = 950$ kg/m³. La distance GA est égale à $L/2$ et la distance OG est notée d et vaut $d = 1,5$ m. On demande :

Q1 Déterminer la masse M puis le poids P de la poutre. Un petit commentaire sur la force des protagonistes pour la mettre en place ?

La masse est donnée par la relation : $M = \rho V = \rho \pi D^2 L / 4 = 652,5$ kg ce qui donne pour le poids : $P = Mg = 6525$ N... même si on y va à trois, ça reste bien lourd : plus de 200 kg chacun !

Q2 Faire le bilan des actions mécaniques qui s'exercent sur le solide S et placer ses actions sur une figure reproduisant le solide S de la figure 1, seul.

D'après l'énoncé, et compte tenu du système de fixation, le solide S est soumis à trois forces (ou trois AM représentées par des torseurs glisseurs) : une totalement inconnue en O, une totalement connue en G, le poids P , et une en A dont on connaît la direction puisqu'il s'agit de la tension de corde.



Q3 Déterminer l'action X_A dans la corde qui retient le tronc en A et les composantes X_O et Y_O de celle que l'articulation encaisse en O en fonction du poids P et des données géométriques pertinentes du système.

On peut procéder de manière graphique en exploitant les deux propriétés : (i) les 3 forces sont concourantes $\rightarrow$ ce qui implique que la direction de F_O passe par le point d'intersection de P et de F_A (ii) le triangle des forces est fermé $\rightarrow$ ce qui donne la norme de F_A et de F_O , en fonction de la norme de P .

Ainsi on « voit » que F_A est environ 1/3 de P , soit environ 2200 N et que F_O est légèrement plus grand que P , soit environ 6800 N. Avec un tracé précis et une échelle pour les forces on peut affiner la précision.

