

Ahmed Lesfari

L3
M1
M2

Fonctions de plusieurs variables réelles et complexes

Cours et exercices corrigés



Table des matières

1	Fonctions de plusieurs variables réelles	7
1.1	Calcul différentiel	7
1.1.1	Généralités	7
1.1.2	Limite-continuité-différentiabilité	8
1.1.3	Propriétés diverses des fonction différentiables	13
1.1.4	Inversion locale et fonctions implicites	35
1.1.5	Recherche d'extremum	45
1.2	Intégrales multiples	53
1.2.1	Généralités	53
1.2.2	Réduction des intégrales multiples (théorème de Fubini)	56
1.2.3	Formule de changement de variables	67
1.3	Formes différentielles	72
1.3.1	Généralités	72
1.3.2	Propriétés diverses	78
1.3.3	Intégration sur un simplexe ou sur un chemin	97
1.4	Variétés différentiables réelles	105
1.4.1	Variétés topologiques, différentiables, analytiques	105
1.4.2	Applications différentiables	110
1.4.3	Espaces et fibrés tangents, applications tangentes	112
1.4.4	Sous-variétés	122
1.4.5	Champs de vecteurs	131
1.5	Exercices et problèmes	135
1.5.1	Calcul différentiel	135
1.5.2	Intégrales multiples	154
1.5.3	Formes différentielles	170
1.5.4	Variétés différentiables	198
2	Fonctions de plusieurs variables complexes	241
2.1	Fonctions holomorphes	241
2.1.1	Préliminaires et notations	241

2.1.2	Fonctions holomorphes	243
2.1.3	Formule intégrale de Cauchy et applications	247
2.1.4	Séries entières multiples et fonctions holomorphes	249
2.1.5	Séries multiples et domaines de Reinhardt	255
2.1.6	Propriétés fondamentales diverses	262
2.1.7	Inversion locale et fonctions implicites	271
2.2	Variétés analytiques complexes	274
2.2.1	Structure de variété (analytique) complexe	274
2.2.2	Exemples fondamentaux	277
2.2.3	Espaces et fibrés tangents	279
2.2.4	Sous-variétés et exemples	281
2.3	L'anneau des germes de fonctions holomorphes	282
2.3.1	Définitions et premières propriétés	282
2.3.2	Théorèmes de préparation et de division de Weierstrass	284
2.3.3	Propriétés algébriques de l'anneau $\mathcal{O}_n$	293
2.4	Ensembles analytiques	297
2.4.1	Définitions et exemples	297
2.4.2	Propriétés diverses	299
2.4.3	Théorème de prolongement ou d'extension de Riemann	302
2.5	Compléments	303
2.5.1	Domaines d'holomorphie	303
2.5.2	Domaines holomorphiquement convexes	310
2.5.3	Ouverts pluri sous-harmoniques et pseudo-convexes	316
2.5.4	Variétés de Stein	320
2.6	Exercices et problèmes	322
2.6.1	Fonctions holomorphes	322
2.6.2	Variétés analytiques	324
2.6.3	L'anneau $\mathcal{O}_n$	333
2.6.4	Ensembles analytiques	336
2.6.5	Compléments	339
3	Apendices A et B	345
3.1	Appendice A : $\mathbb{R}^n$ et sa topologie,...	345
3.2	Appendice B : Fonctions d'une variable complexe	353
	Bibliographie	387
	Index	389