

M1

Yves Lacroix
Laurent Mazliak

Probabilités

Variables aléatoires, convergences,
conditionnement
Processus à temps discret

2^e édition



ellipses

Table des matières

La théorie des probabilités hier et aujourd'hui	1
I Variables aléatoires	5
1 Rappels d'intégration	7
2 Espaces et mesures de probabilités	15
2.1 Espaces de probabilités	15
2.2 Théorème d'extension	17
2.3 Application : Construction de la mesure de Lebesgue λ sur $[0, 1]$	20
2.4 Lemme de Borel-Cantelli	21
2.5 Probabilité conditionnelle et indépendance	22
3 Variables aléatoires	25
3.1 Définitions et premières propriétés	25
3.2 Lois des variables aléatoires	27
3.3 Notions sur les processus à temps discret	42
II Convergences et conditionnement	47
4 Différents types de convergences	49
4.1 Convergences	49
4.2 Liens entre les différentes convergences	49
5 Convergences spatiales	53
5.1 Loi des grands nombres	53
5.2 Convergence des séries de variables indépendantes	56
6 Convergence en loi unidimensionnelle	61
6.1 Fonctions de répartition	61
6.2 Fonctions caractéristiques	62

6.3	Etude de la convergence en loi unidimensionnelle	66
6.4	Le théorème limite central	73
7	Théorèmes limites dans $\mathbb{R}^k$	77
7.1	Convergence faible et suites tendues	77
7.2	Fonctions caractéristiques	81
7.3	Quelques prolongements	83
8	Espérance conditionnelle	87
8.1	Construction de l'espérance conditionnelle	87
8.2	Propriétés de l'espérance conditionnelle	89
9	Lois conditionnelles	93
9.1	Lois conditionnelles	93
9.2	Cas particuliers	96
III	Pour aller plus loin...	99
10	Vecteurs gaussiens	101
10.1	Distributions normales dans $\mathbb{R}^k$	101
10.2	Le Théorème Limite Central dans $\mathbb{R}^k$	107
10.3	Vecteurs gaussiens et conditionnement	108
10.4	Contrôle et filtrage linéaires	111
11	Simulation	121
11.1	Quelques méthodes classiques	121
11.2	Simulation de lois particulières	123
11.3	Calculs d'espérances	126
12	Martingales à temps discret	129
12.1	Généralités	129
12.2	Premières propriétés	130
12.3	Le théorème d'arrêt	131
12.4	Inégalités maximales	132
12.5	Martingales de carré intégrable	134
12.6	Théorèmes de convergence	135
12.7	Martingales régulières	137
13	Chaînes de Markov à temps et espace discrets	141
13.1	Matrices de transition, chaînes de Markov	141
13.2	Construction et existence	144
13.3	Les calculs sur la chaîne canonique	146

13.4 Les opérateurs potentiels	148
13.5 Problèmes de passage	150
13.6 Récurrence, transience	152
13.7 Chaînes irréductibles récurrentes	156
13.8 Périodicité	161
14 Processus de Poisson	165
14.1 Processus ponctuel	165
14.2 Le processus de Poisson	166
14.3 Quelques propriétés du processus de Poisson	168
14.4 Intégrale stochastique	172
15 Grandes déviations	177
15.1 Grandes déviations - énoncé	177
15.2 Préliminaires	177
15.3 Fin de la preuve du Théorème de Chernoff	180
15.4 Application au pile ou face équilibré	181
16 Suites stationnaires et théorème ergodique	183
16.1 Suites stationnaires de v.a. et systèmes dynamiques	183
16.2 Ergodicité	184
16.3 Théorème ergodique (maximal)	185
16.4 Le théorème ergodique	187
16.5 Le théorème ergodique entraîne la loi forte i.i.d.	189
16.6 Le compteur kilométrique	191
16.7 Critère de Weyl et ergodicité sur le tore	196
17 Solutions des exercices corrigés	199
Bibliographie	245