

L3
M1
Agrégation

Ioan Badulescu

Anneaux, corps, polynômes et théorie de Galois

Cours et exercices corrigés



Table des matières

Avant-propos	3
Partie 1. Anneaux et corps	9
Chapitre 1. Rappels sur les anneaux et les corps	11
1.1. Conventions et premières définitions	11
1.2. Propriétés des morphismes	12
1.3. Corps des fractions	14
1.4. L'anneau $\mathbb{Z}$ et son arithmétique	14
1.5. Arithmétique dans les anneaux intègres	16
1.6. Caractéristique. Conséquences	18
1.7. L'endomorphisme de Frobenius	19
1.8. Anneaux finis. Les corps $\mathbb{F}_p$	19
1.9. Exercices	20
1.10. Annexe : Anneaux principaux et factoriels ; $\mathbb{Z}[i]$	25
Chapitre 2. Le corps $\mathbb{C}$ et l'anneau $\mathbb{H}$ des quaternions	33
2.1. Construction de $\mathbb{C}$. Racines n -ièmes	33
2.2. Équations de degré deux, trois et quatre	35
2.3. $\mathbb{C}$ est algébriquement clos	39
2.4. L'anneau $\mathbb{H}$ des quaternions	41
2.5. Exercices	42
Partie 2. Polynômes	47
Chapitre 3. Algèbres. $K[X]$. Étude des polynômes	49
3.1. Algèbres	49
3.2. L'algèbre $K[X]$, son arithmétique et ses quotients	52
3.3. Opérations spéciales : substitution, dérivation et résultant	59
3.4. Racines des polynômes ; multiplicités	63
3.5. Le cas de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$	73
3.6. Les fractions rationnelles	74
3.7. Exercices	76
3.8. Annexe 1 : Une autre preuve de la formule du résultant	81
3.9. Annexe 2 : Le discriminant	84
Chapitre 4. L'anneau $\mathbb{Z}[X]$	87

4.1.	$\mathbb{Z}[X]$, critère d'Eisenstein et applications	87
4.2.	Les polynômes cyclotomiques	92
4.3.	Le théorème de Wedderburn	95
4.4.	Exercices	96
Partie 3. Extensions. Éléments algébriques. Théorie des corps finis		101
Chapitre 5.	Théorie élémentaire des extensions	103
5.1.	Extensions finies. Degré. Base télescopique	103
5.2.	Éléments algébriques, polynôme minimal	106
5.3.	Extensions monogènes (1 ^{re} partie)	110
5.4.	Corps de rupture et corps de décomposition	114
5.5.	Exercices	119
5.6.	Annexe : $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_n})$	127
Chapitre 6.	Corps finis	131
6.1.	Classification	131
6.2.	Propriétés des corps finis	132
6.3.	Polynômes à coefficients dans un corps fini	134
6.4.	Exercices	139
6.5.	Annexe 1 : Corps finis et arithmétique	142
6.6.	Annexe 2 : Compter les objets d'algèbre linéaire	151
Partie 4. Théorie avancée des extensions. Théorie de Galois		157
Chapitre 7.	Extensions algébriques. Extensions séparables	159
7.1.	Extensions algébriques. Clôture algébrique	159
7.2.	Séparabilité. Extensions séparables	165
7.3.	Extensions monogènes (2 ^e partie)	173
7.4.	Exercices	176
Chapitre 8.	Théorie de Galois. Résolution par radicaux	183
8.1.	Extensions normales et galoisiennes	183
8.2.	Le groupe de Galois	189
8.3.	Le groupe de Galois des extensions cyclotomiques	194
8.4.	Calcul pratique du groupe de Galois	196
8.5.	Correspondance de Galois ; résolution par radicaux	203
8.6.	Exercices	212
8.7.	Annexe 1 : Le groupe symétrique : résultats utiles	223
8.8.	Annexe 2 : Polynômes de degré 4	229
8.9.	Annexe 3 : Groupes résolubles	234
8.10.	Annexe 4 : Décomposition de Dunford sur les corps parfaits	235
8.11.	Annexe 5 : Extensions cycliques et abéliennes	236

Partie 5. Solutions et compléments	245
Chapitre 9. Solution des exercices	247
9.1. Chapitre 1	247
9.2. Chapitre 2	258
9.3. Chapitre 3	265
9.4. Chapitre 4	273
9.5. Chapitre 5	281
9.6. Chapitre 6	299
9.7. Chapitre 7	308
9.8. Chapitre 8	320
Chapitre 10. Compléments	347
10.1. Polynômes symétriques et leurs applications	347
10.2. Traces, normes, le théorème 90 de Hilbert	352
10.3. Construction à la règle et au compas	359
10.4. Réduction modulo p . S_n comme groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$	371
10.5. $Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$	375
10.6. Galois infini	382
10.7. Les corps p -adiques	390
10.8. Algèbres de quaternions généralisées	405
Bibliographie	409
Index	411