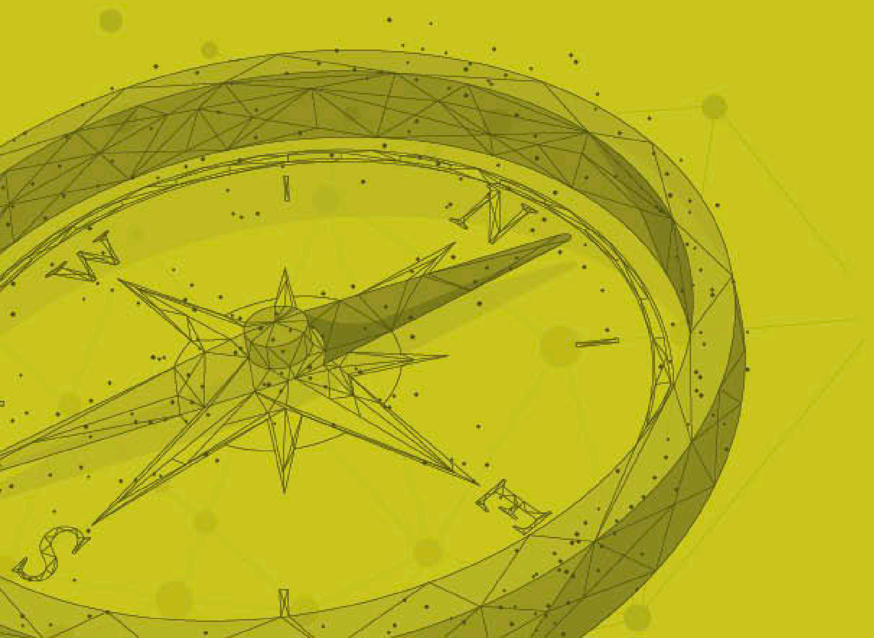
5e

Éric Dubon
Anne Heurtier

Mathématiques

En route vers l'excellence avec 175 exercices corrigés



ellipses

Chapitre 1

Entiers relatifs

1.1 Exercices sur distance et symétrie

Cours (pour les exercices 1 à 3)

Définition

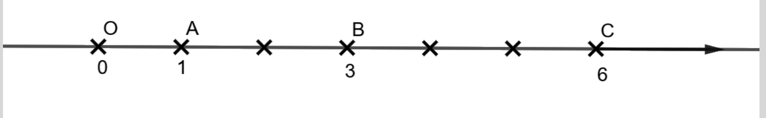
*Une **droite graduée** est une droite possédant :*

- *un sens désigné par une flèche selon lequel nous parcourons la droite ;*
- *une origine souvent notée O à laquelle est associé l'entier 0 ;*
- *une unité de longueur reportée tout au long de la droite.*

Remarque

Le fait d'avoir fixé une unité de longueur nous permet d'associer à chaque point de la droite un nombre que nous appellerons « abscisse du point ».

Il faut garder à l'esprit que nous travaillons avec des entiers, le même raisonnement reste valable pour des nombres décimaux.



L'abscisse du point A est 1 car A est situé à 1 unité de l'origine O. De même, l'abscisse du point C est 6 car le point est à 6 unités du point O.

Nous allons considérer dans ce paragraphe la symétrie centrale de centre O origine de la droite graduée.

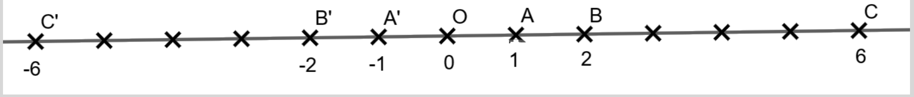
Prenons le cas du point A situé à 1 unité de O. D'après les propriétés de la symétrie centrale, nous pouvons dire que son image, que nous noterons A' (lire « A prime »), appartient aussi à la droite graduée considérée et la distance de A' à O est la même que celle de A à O, autrement dit d'une unité.

Cependant, nous devons tenir compte du fait que A' se situe, par rapport à O, dans le sens opposé à celui indiqué par la flèche. Pour tenir compte de ce fait, nous attribuons l'entier négatif -1 à l'abscisse de A'.
Autrement dit, l'abscisse de A' vaut -1 car :

- *la distance de A' à O vaut (tout comme A) 1 unité ;*
- *A' est situé, par rapport à l'origine de la droite graduée, dans le sens opposé à celui de la flèche (d'où la présence du « $-$ »).*

Imaginons, maintenant, que nous fassions la symétrie par rapport à O de tous les points de la droite qui ont pour abscisse un entier positif. Nous obtiendrions alors des points de la droite dont l'abscisse est un entier négatif.

Dans notre exemple, si nous notons B' et C' les images de B et C par rapport à O, nous pouvons dire que l'abscisse de B' est -3 et celle de C' vaut -6.



La droite étant composée d'un nombre infini de points ayant un entier positif comme abscisse, il y a donc aussi un nombre infini de points de la droite (ce sont leur image respective) qui ont un entier négatif comme abscisse.

Finalement, nous noterons $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers positifs et négatifs et nous l'appellerons ***ensemble des entiers relatifs****.*

Remarque

Comme l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ est infini.
De plus, tout entier naturel étant positif, un entier naturel est donc aussi un entier relatif : l'ensemble des entiers relatifs contient celui des entiers naturels. Cela s'écrit (voir le paragraphe page 244 dans l'Annexe) :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \qquad (\textit{lire l'ensemble } \mathbb{N} \textit{ est contenu dans l'ensemble } \mathbb{Z}).$$

Définition

Soit x un entier relatif quelconque.
*La **valeur absolue** de x est l'entier positif qui vaut x si x est positif et $-x$ si x est négatif.*
Elle est notée $|x|$.
Autrement dit :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \text{ est plus grand ou égal à } 0 \\ \\ -x & \text{si} \quad x \text{ est plus petit ou égal à } 0 \end{cases}$$

Exemple

a) *si* $x = 4$ *on a* $|x| = 4$ *;*
b) *si* $x = 0$ *on a* $|x| = 0$ *;*
c) *si* $x = -2$ *on a* $|x| = -(-2) = 2$.

Remarque

*La valeur absolue d'un entier relatif est **toujours** un entier positif.*

Définition

Soit M un point de la droite graduée d'origine O. Nous noterons x_M l'abscisse du point M.
*Nous appelons **distance à l'origine** de M la valeur absolue de l'abscisse de M.*
Autrement dit, si nous notons $d(M, O)$ la distance de M à O, nous avons :

$$d(M, O) = |x_M|.$$

Remarque

Cette définition n'est pas très surprenante car la distance entre deux points est toujours un nombre positif.

Exemple

La distance à O de C est 6 ; nous l'écrivons $d(C, O) = 6$. Mais comme $|-6| = 6$ et que -6 est l'abscisse de C', nous pouvons dire que la distance à O de C' est aussi 6. Autrement dit, $d(C, O) = d(C', O) = 6$.

Théorème *[Comparaison d'entiers relatifs]*

Pour comparer deux entiers relatifs, nous appliquons les règles suivantes :

a) si les deux entiers sont positifs, alors il suffit de comparer leur valeur absolue. L'entier relatif qui a la plus grande valeur absolue est le plus grand des deux entiers relatifs ;

b) si les deux entiers sont de signes contraires, alors l'entier positif est plus grand que l'entier négatif ;

*c) si les deux entiers sont **négatifs**, alors il suffit de comparer leur valeur absolue. L'entier relatif qui a **la valeur absolue la plus petite** est **le plus grand** entier relatif.*

Exemple

L'entier -3 est plus grand que l'entier -7. En effet, $|-3| = 3 ; 3 < 7 ; 7 = |-7|$ (nous avons appliqué la troisième règle car -3 et -7 sont tous les deux négatifs).

Exercice 1

Sur une droite graduée, placer les points suivants :

$A(-2)$; $B(-6)$; $C(8)$; $D(0)$; $E(-4)$; $F(-3)$.

Exercice 2

Donner la valeur absolue des nombres suivants :

$-13 \quad ; \quad -686 \quad ; \quad 0 \quad ; \quad -50 \quad ; \quad 5 \quad ; \quad -500 \quad ; \quad +0.$

Exercice 3

Donner la valeur absolue des nombres suivants :

$$-130 \quad ; \quad -\frac{6}{2} \quad ; \quad \frac{100}{2} \quad ; \quad -\frac{-30}{6} \quad ; \quad \frac{15}{-3} \quad ; \quad \frac{205}{5} \quad ; \quad \frac{-33}{11}.$$

1.2 Exercices sur l'addition et la soustraction

Cours (pour les exercices 4 à 7)

Théorème

Pour additionner deux nombres positifs, il faut additionner leur valeur absolue (ou distance à zéro) et conserver le signe « + ».

Exemple

$(+7) + (+4) = +11$

Remarque

Cette règle est utilisée depuis le Primaire. De plus, quand un nombre est positif, son signe n'apparaît pas. Ainsi, l'exemple précédent devient $7 + 4 = 11$.

Théorème

Pour additionner deux nombres négatifs, il faut ajouter leur valeur absolue (ou distance à zéro) et conserver le signe « − ».

Exemple

$(-7) + (-6) = -13$

En effet :

a) Tout d'abord, prenons la valeur absolue de chacun des entiers relatifs, $|-7| = 7$ *et* $|-6| = 6$ *;*

b) Ajoutons-les, ce qui donne 13 *;*

c) Mettons le signe « − » devant, ce qui donne -13.

Théorème

Pour ajouter deux nombres de signes contraires, il faut soustraire leur distance à zéro et mettre le signe du nombre ayant la plus grande distance à zéro.

Exemple

a) $-7+6=-1$
En effet :

- *Tout d'abord, prenons la distance à zéro de chaque entier :* $|-7|=7$ *et* $|6|=6$ *;*
- *Calculons leur différence :* $7-6=1$ *;*
- *L'entier ayant la plus grande distance à zéro est* -7*. C'est donc le signe « − » qu'il faut mettre au résultat ;*
- *La somme donne donc* -1*.*

b) $(-5)+(+10)=-5+10=5$
En effet :

- *Les parenthèses inutiles sont d'abord supprimées ;*
- *Prenons les distances à zéro de chacun des entiers relatifs* $|-5|=5$ *et* $|10|=10$ *;*
- *Calculons la différence :* $10-5=5$ *;*
- *L'entier* 10 *étant celui qui a la plus grande distance à zéro, il faut donner au résultat le signe « + » ;*
- *La somme donne* 5*.*

Remarque

1. *Rappelons que si* a *désigne un entier relatif alors* $-a$ *s'appelle son* ***opposé****.*
   En effet $a+(-a)=(-a)+a=0$ *;*
2. *Les propriétés de l'addition vues pour les entiers naturels sont vraies pour les entiers relatifs.*

Exemple

$$-7+(2+(-3))=-7+(-1)=-8$$

$(-7+2)+(-3)=(-5)+(-3)=-8$
On retrouve bien la propriété d'associativité.

En sachant ajouter des entiers relatifs, nous savons les soustraire.

Théorème

*Soustraire un entier relatif revient à ajouter son **opposé**.*

Exemple

i) $7 - (+3) = 7 + (-3) = 4$;

ii) $7 - (-3) = 7 + (+3) = 7 + 3 = 10$;

iii) $-7 - (-3) = -7 + (+3) = -7 + 3 = -4$.

Règle de suppression des parenthèses

Règle 1

Une parenthèse précédée du signe « + » peut être supprimée sans changer les signes opératoires à l'intérieur.

Exemple

a) $-7 + (-4) + (+5) = -7 - 4 + 5 = -11 + 5 = -6$;

b) $12 - (-4 + 3 + (-2)) + (-6) = 12 - (-4 + 3 - 2) - 6 = 12 - (-1 - 2) - 6 = 12 - (-3) - 6 = 12 + 3 - 6 = 15 - 6 = 9$.

Remarque

Par rapport à l'exemple précédent, gardons à l'esprit que $-1 - 2$ *signifie* $-1 + (-2)$ *et que nous devons bien appliquer la règle vue précédemment concernant l'addition de deux entiers relatifs, ce qui donne bien* -3.

Règle 2

Une parenthèse précédée du signe « − » peut être supprimée à condition de changer tous les signes opératoires à l'intérieur des parenthèses.

Exemple

$$-6 - (-4) - (+3) = -6 + 4 - 3 = -2 - 3 = -5$$

Exercice 4

Calculer, en respectant bien chacune des étapes du calcul :

a) $-5 - 93 + (-60) - (-80) =$

b) $61 + (-23) - 1 + 7 =$

c) $-1 - (-79) + 21 - 45 + (-14) =$

d) $40 + (-3) - 16 - (-2) - 2 =$

e) $51 - (-3) - 110 + (-7) + 25 =$

Exercice 5

Calculer, en respectant bien chacune des étapes du calcul :

a) $3 - (-5) + 7 - 8 + (-7) =$

b) $25 - 16 + (-7) + 35 - 78 =$

c) $-56 - (-78) + 50 - 20 - (-64) =$

d) $-128 - 78 + (-35) + 90 =$

e) $23 - (-67) + (-45) - 56 + 13 =$

Exercice 6

Calculer, en respectant bien chacune des étapes du calcul :

a) $-34 - (-97) + 90 + (-76) + 10 =$

b) $-5 - 6 + (-7) - 8 + (-9) - (-10) =$

c) $50 - (-61) + 45 + (-62) - (-3) =$

d) $302 - (-156) + 257 - (-878) + 623 =$

e) $-504 - (-607) + 51 - 403 - (-345) =$

Exercice 7

Calculer, en respectant bien chacune des étapes du calcul :

a) $-5 + (-10) - (-15) - 20 + 30 =$

b) $67 - 45 - (-89) + 304 - (-578) =$

c) $1\,080 - (-345) + 2\,065 - 4\,567 =$

d) $456 - (-98) + 56 - (-900) + 609 =$

e) $4 + 5 - 6 + 7 - (-8) + 9 - 10 - (-11) - 12 =$

1.3 Exercices sur la multiplication et la division

Cours (pour les exercices 8 à 17)

La multiplication d'entiers relatifs possède les mêmes propriétés que celles sur les entiers naturels. Il faut simplement tenir compte des signes des nombres, d'où la règle suivante que nous allons accepter pour l'instant.

Théorème *[Règle des signes]*

a) Le produit de deux entiers relatifs de même signe est toujours un nombre positif ;
b) Le produit de deux entiers relatifs de signes contraires est toujours un nombre négatif.

Exemple

a) $3 \times 4 = 12$;
b) $-8 \times (-3) = 24$;
c) $7 \times (-2) = -14$;
d) $-2 \times 5 = -10$.

C'est dans cette partie que nous allons comprendre la règle de suppression des parenthèses.

Théorème *[Multiplication par -1]*

Multiplier un entier relatif par -1 revient à prendre son opposé.

Exemple

a) $-3 \times (-1) = 3$;
b) $-1 \times 6 = -6$;
c) $-3 \times (4 - 5) = -3 \times (-1) = 3$.

Nous venons d'appliquer tout simplement la règle des signes.

Remarque

1. *Dans l'exemple c) précédent, il est également possible d'appliquer la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :*

$$-3 \times (4-5) = -3 \times 4 + (-3 \times (-5)) = -12 + 15 = 3 \ ;$$

2. *Quand il y a un signe « − » devant une parenthèse, il s'agit en fait de* -1 *qui n'est pas écrit. Ainsi, dans l'écriture* $-(3-4)$ *il faut comprendre* $-1 \times (3-4)$. *En appliquant la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, nous obtenons :*

$$-(3-4) = -1 \times (3-4) = -1 \times 3 + (-1) \times (-4) = -3 + 4$$

   Il s'agit de la règle 2 *de suppression des parenthèses.*

Théorème *[Produit de plusieurs termes]*

Le produit de plusieurs entiers relatifs est :

— *positif s'il comporte un nombre pair de facteurs négatifs ;*

— *négatif s'il comporte un nombre impair de facteurs négatifs.*

Exemple

Sans faire de calcul, il est possible de dire que le produit $-3 \times 2 \times (-1) \times 4 \times (-5)$ *est négatif puisqu'il comporte* 3 *facteurs négatifs.*
Par contre, le produit $-1 \times 2 \times (-3) \times (-4) \times 5 \times (-6)$ *est positif puisqu'il comporte* 4 *facteurs négatifs.*

Théorème

Pour diviser deux entiers relatifs, il suffit de diviser leur distance à zéro puis d'appliquer la règle des signes.

Remarque

Diviser par un nombre non nul revient à multiplier par son inverse. Ainsi, si a et b désignent des entiers et $b \neq 0$, nous avons

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

où $\frac{1}{b}$ est bien l'inverse de b. Ceci explique que nous devons appliquer la règle des signes pour la division de deux entiers relatifs.

Exemple

a) $\frac{-5}{-4}$

- *Tout d'abord, écrivons le quotient des valeurs absolues :* $\frac{|-5|}{|-4|} = \frac{5}{4}$ *;*
- *appliquons la règle des signes pour savoir lequel mettre devant la fraction. Le produit (ou le quotient) de deux entiers négatifs est positif. Le résultat sera donc positif ;*
- *par conséquent,* $\frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$.

b) $\frac{-7}{4}$

- *Tout d'abord, écrivons le quotient des valeurs absolues :* $\frac{|-7|}{|4|} = \frac{7}{4}$ *;*
- *appliquons la règle des signes pour savoir lequel mettre devant la fraction. Le produit (ou le quotient) de deux entiers de signes contraires est négatif. Le résultat sera donc négatif ;*
- *par conséquent,* $\frac{-7}{4} = -\frac{7}{4}$.

c) $\frac{4}{-3}$

- *Tout d'abord, écrivons le quotient des valeurs absolues :* $\frac{|4|}{|-3|} = \frac{4}{3}$ *;*
- *appliquons la règle des signes pour savoir lequel mettre devant la fraction. Le produit (ou le quotient) de deux entiers de signes contraires est négatif. Le résultat sera donc négatif ;*
- *par conséquent,* $\frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$.

Remarque

Nous constatons que : $\dfrac{-4}{3} = \dfrac{4}{-3} = -\dfrac{4}{3}$.

Attention !

La division de deux entiers relatifs peut être un entier relatif, comme par exemple $-25 \div 5 = -5$. *Cependant, comme nous pouvons le voir dans les exemples précédents, ce n'est pas toujours le cas* ($4 \div (-3) = \dfrac{4}{-3} = -\dfrac{4}{3}$ *qui n'est pas un entier relatif). Nous verrons plus tard ce type de nombres et ce que nous pouvons faire avec.*

Exercice 8

Calculer, en respectant les priorités opératoires :

a) $-13 + (-60) + (-5) \times (-10) - (-2) \times 5 =$

b) $-3 \times (-5) - (-2) \times 6 \times (-1) + 10 =$

c) $-66 - (-7) \times 6 \times (-2) + (-14) - (-20) =$

d) $5 - (-6) \times 4 + 3 \times 5 \times (-1) =$

Exercice 9

Calculer, en respectant les priorités opératoires :

a) $-4 + \Big(2 - (-3) - (-7)\Big) \times (-2) + 5 =$

b) $\Big(14 - 7 - (-3)\Big) \times 50 + (-2) \times (-20) =$

c) $(-2) \times 5 + \Big((-4) + 2\Big) \times (-3) + 10 \times (-1) =$

d) $2 \times (-3) + \Big(-4 \times (-1)\Big) \times (-1) =$

e) $\Big(-(-1) \times 14 + (2 - 3 \times 5) + (-2)\Big) + 4 - (-9) =$

Exercice 10

Calculer :

a) $(5 + 6 - 7) \times (4 + 3 - 2) \div (9 - 8) + 10$

b) $\Big[-1 + 2 - 3 \times (5 + 6 - 12)\Big] \div (-2) + (5 - 4 + 10) \times (3 + 4)$

c) $\Big(-1 - (-2) + 3\Big) \times 4 - 6 \times (-2) + (4 + 5 - 9)$

d) $\Big[-3 + 4 - (-5)\Big] \times \Big[(-8 + 1) - (4 + 5)\Big] + 5$

e) $5 + (-6 + 7) \times (2 \div 2) + 3$

f) $5 - \Big(2 - 8 \div (-4) \times 3 + (-7) \times (-2)\Big)$

Exercice 11

Calculer :

a) $2 \times (3 + 5) - 1 \times (-2)$

b) $\Big[(5 + 2) \times 2 - (-3)\Big] \times (-1)$

c) $(5 + 6) \times 3 - 4 \times (5 - 6)$

d) $\Big[(-6 + 5 - 1) \times (-5 + 7) \times (-1)\Big] \div (4 - 3)$

e) $-1 + 5 - 6 \times (-2) + (6 - 7 \div 7 - 1) \div 2$

f) $(-3) \times (-1) \times (-2) \div 2 + (8 - 9 + (-3)) \times (-3)$

g) $2 \times 3 \div 3 - 4 \div (5 + 3 \times (-1)) + 2$

Exercice 12

Calculer, en respectant bien chacune des étapes du calcul :

a) $78 - 56 - (-10) - 10 =$

b) $24 - 16 + (-16) - (-16) + (-30) =$

c) $-(-87) - 20 + (-51) + 35 - (-10) =$

d) $13 + 10 \times (-6) - 2 \times (-3) - 10 - (-10) + 2 =$

e) $102 \times (-2) + 100 - 3 + 102 \times 2 =$

Exercice 13

Calculer, en respectant les priorités opératoires :

a) $2 \times (-6) - 8 \times (-9) + 10 \times (-3) =$

b) $-(-3) + 4 + 5 \times (-6) \times 6 + 1 =$

c) $-3 + 4 \times (-5) + (-6) \times 7 + 8 \times (-9) =$

d) $-9 \times 8 \times (-7) + (-6) \times 5 + (-4) =$

e) $-40 \times 3 \times (-11) \times (-1) =$

Exercice 14

Calculer, en respectant les priorités opératoires :

a) $-11 \times (-10 + 9) - (8 + 7) + (5 - 4) \times (3 - 2) + (1 - 2) =$

b) $-60 + \Big(20 \times 2 \times 3 + (-100)\Big) - (-5) \times 10 =$

c) $\Big(3 \times 11 + (11 \times 3 - 3)\Big) =$

d) $13 + (55 - 5) \times 3 + 3 \times \Big(25 - (-25)\Big) =$

e) $4 \times 5 \times (-6 + 7) \times (-8 - 9) \times 10 =$

Exercice 15

Calculer, en respectant les priorités opératoires :

a) $1 \times (-3) \times 2 + (-3) \times (-6) + 6 \times 8 - (-1) =$

b) $(-1) \times (-2) + 10 + (-10) + 9 - 8 \times (-2) \times (-1) =$

c) $\Big((-4 + 6 \times (-1)) - (-4) \times (-3) + 10\Big) =$

d) $\Big((-1) + 2 \times (-4) + 5\Big) \times 6 \times 2 =$

e) $(3 + 4) \times (10 \times (-2)) + 10 - (-2) =$

Exercice 16

Calculer, en respectant les priorités opératoires :

a) $6 \times 7 \times (-5) + 2 \times (-1) + 3 \times 0 =$

b) $\Big((-6) \times (-1)\Big) + 2 \times \Big(-3 \times (-5)\Big) =$

c) $-1 \times 2 \times 4 + 2 \times (-1) + (-4) \times 3 =$

d) $\Big(2 + 3 + 1 + (-2) \times (-1)\Big) \times 3 =$

e) $(-10) \times (-9) \times (-5) + 5 + 8 + 7 =$

Exercice 17

Calculer, en respectant les priorités opératoires :

a) $-8 \times (-10) + 5 - 3 \times (-2) + 15 \times 2 =$

b) $2 \times (-4) - \Big(-8 \times (-1)\Big) + 1 \times 0 - \Big(-6 \times (-2)\Big) =$

c) $\Big((-1) \times 20 + 10 - (-20)\Big) \times 10 =$

d) $(-1) \times 50 \times 2 + 5 \times (-4) + 50 + 60 =$

e) $(-1) \times (-3) \times 4 \times 2 + 5 =$

1.4 Correction des exercices

Correction de l'exercice 1

Nous obtenons la droite graduée suivante :

Correction de l'exercice 2

Donnons la valeur absolue des nombres :

$|-13| = 13$

$|-686| = 686$

$|0| = 0$

$|-50| = 50$

$|5| = 5$

$|-500| = 500$

$|+0| = 0$

Correction de l'exercice 3

Donnons la valeur absolue des nombres :

$|-130| = 130$

$$\left|-\frac{6}{2}\right| = \frac{6}{2} = 3$$

$$\left|\frac{100}{2}\right| = \frac{100}{2} = 50$$

$$\left|-\frac{-30}{6}\right| = \frac{30}{6} = 5$$

$$\left|\frac{15}{-3}\right| = \frac{15}{3} = 5$$

$$\left|\frac{205}{5}\right| = \frac{205}{5} = 41$$

$$\left|\frac{-33}{11}\right| = \frac{33}{11} = 3$$

Solutions

Correction de l'exercice 4

Calculons :

a) $-5-93+(-60)-(-80) = -5-93+(-60)+80 = -98+(-60)+80 = -158+80 = -78$

b) $61 + (-23) - 1 + 7 = 38 - 1 + 7 = 37 + 7 = 44$

c) $-1-(-79)+21-45+(-14) = -1+79+21-45+(-14) = 78+21-45+(-14) = 99-45+(-14) = 54+(-14) = 40$

d) $40+(-3)-16-(-2)-2 = 40+(-3)-16+2-2 = 37-16+2-2 = 21+2-2 = 21$

e) $51-(-3)-110+(-7)+25 = 51+3-110+(-7)+25 = 54-110+(-7)+25 = -56+(-7)+25 = -63+25 = -38$

Correction de l'exercice 5

Calculons :

a) $3-(-5)+7-8+(-7) = 3+5+7-8-7 = 8+7-8-7 = 0$

b) $25-16+(-7)+35-78 = 9-7+35-78 = 2+35-78 = 37-78 = -41$

c) $-56-(-78)+50-20-(-64) = -56+78+50-20+64 = 22+50-20+64 = 72-20+64 = 52+64 = 116$

d) $-128-78+(-35)+90 = -206-35+90 = -241+90 = -151$

e) $23-(-67)+(-45)-56+13 = 23+67-45-56+13 = 90-45-56+13 = 45-56+13 = -11+13 = 2$

Correction de l'exercice 6

Calculons :

a) $-34-(-97)+90+(-76)+10 = -34+97+90-76+10 = 63+90-76+10 = 153-76+10 = 77+10 = 87$

b) $-5-6+(-7)-8+(-9)-(-10) = -5-6-7-8-9+10 = -11-7-8-9+10 = -18-8-9+10 = -26-9+10 = -35+10 = -25$

c) $50-(-61)+45+(-62)-(-3) = 50+61+45-62+3 = 111+45-62+3 = 156-62+3 = 94+3 = 97$

d) $302-(-156)+257-(-878)+623 = 302+156+257+878+623 = 458+257+878+623 = 715+878+623 = 1\,593+623 = 2\,216$

e) $-504-(-607)+51-403-(-345) = -504+607+51-403+345 = 103+51-403+345 = 154-403+345 = -249+345 = 96$

Correction de l'exercice 7

Calculons :

a) $-5+(-10)-(-15)-20+30 = -5-10+15-20+30 = -15+15-20+30 = -20+30 = 10$

b) $67 - 45 - (-89) + 304 - (-578) = 67 - 45 + 89 + 304 + 578 = 22 + 89 + 304 + 578 = 111 + 304 + 578 = 415 + 578 = 993$

c) $1\,080 - (-345) + 2\,065 - 4\,567 = 1\,080 + 345 + 2\,065 - 4\,567 = 1\,425 + 2\,065 - 4\,567 = 3\,490 - 4\,567 = -1\,077$

d) $456 - (-98) + 56 - (-900) + 609 = 456 + 98 + 56 + 900 + 609 = 554 + 56 + 900 + 609 = 610 + 900 + 609 = 1\,510 + 609 = 2\,119$

e) $4 + 5 - 6 + 7 - (-8) + 9 - 10 - (-11) - 12 = 4 + 5 - 6 + 7 + 8 + 9 - 10 + 11 - 12 = 9 - 6 + 7 + 8 + 9 - 10 + 11 - 12 = 3 + 7 + 8 + 9 - 10 + 11 - 12 = 10 + 8 + 9 - 10 + 11 - 12 = 18 + 9 - 10 + 11 - 12 = 27 - 10 + 11 - 12 = 17 + 11 - 12 = 28 - 12 = 16$

Correction de l'exercice 8

Calculons :

a) $-13 + (-60) + (-5) \times (-10) - (-2) \times 5 = -13 + (-60) + 50 - (-2) \times 5 = -13 + (-60) + 50 - (-10) = -73 + 50 - (-10) = -23 + 10 = -13$

b) $-3 \times (-5) - (-2) \times 6 \times (-1) + 10 = 15 - (-2) \times 6 \times (-1) + 10 = 15 - (-12) \times (-1) + 10 = 15 - 12 + 10 = 3 + 10 = 13$

c) $-66 - (-7) \times 6 \times (-2) + (-14) - (-20) = -66 - (-42) \times (-2) + (-14) - (-20) = -66 - 84 + (-14) - (-20) = -150 + (-14) - (-20) = -164 + 20 = -144$

d) $5 - (-6) \times 4 + 3 \times 5 \times (-1) = 5 + 24 + 3 \times 5 \times (-1) = 5 + 24 + 15 \times (-1) = 5 + 24 - 15 = 29 - 15 = 14$

Correction de l'exercice 9

Calculons :

a) $-4 + \Big(2 - (-3) - (-7)\Big) \times (-2) + 5 = -4 + (2 + 3 + 7) \times (-2) + 5 = -4 + 12 \times (-2) + 5 = -4 - 24 + 5 = -28 + 5 = -23$

b) $\Big(14 - 7 - (-3)\Big) \times 50 + (-2) \times (-20) = (14 - 7 + 3) \times 50 + (-2) \times (-20) = 10 \times 50 + (-2) \times (-20) = 500 + (-2) \times (-20) = 500 + 40 = 540$

c) $(-2) \times 5 + \Big((-4) + 2\Big) \times (-3) + 10 \times (-1) = -10 + \Big((-4) + 2\Big) \times (-3) + 10 \times (-1) = -10 + (-2) \times (-3) + 10 \times (-1) = -10 + 6 + 10 \times (-1) = -10 + 6 - 10 = -14$

d) $2 \times (-3) + \Big(-4 \times (-1)\Big) \times (-1) = -6 + \Big(-4 \times (-1)\Big) \times (-1) = -6 + 4 \times (-1) = -6 - 4 = -10$

e) $\Big(-(-1) \times 14 + (2 - 3 \times 5) + (-2)\Big) + 4 - (-9) = \Big(14 + (2 - 3 \times 5) + (-2)\Big) + 4 - (-9) = \Big(14 + (2 - 15) + (-2)\Big) + 4 - (-9) = \Big(14 + (-13) + (-2)\Big) + 4 - (-9) = -1 + 4 - (-9) = -1 + 4 + 9 = 12$

Solutions

Correction de l'exercice 10

Calculons.

a) $(5+6-7)\times(4+3-2)\div(9-8)+10 = (11-7)\times(4+3-2)\div(9-8)+10 = 4\times(4+3-2)\div(9-8)+10 = 4\times(7-2)\div(9-8)+10 = 4\times 5\div(9-8)+10 = 20\div(9-8)+10 = 20\div 1+10 = 20+10 = 30$

b) $\Big[-1+2-3\times(5+6-12)\Big]\div(-2)+(5-4+10)\times(3+4) = \Big[-1+2-3\times(11-12)\Big]\div(-2)+(5-4+10)\times(3+4) = \Big[-1+2-3\times(-1)\Big]\div(-2)+(5-4+10)\times(3+4) = \Big[-1+2+3\Big]\div(-2)+(5-4+10)\times(3+4) = \Big[1+3\Big]\div(-2)+(5-4+10)\times(3+4) = 4\div(-2)+(5-4+10)\times(3+4) = 4\div(-2)+(1+10)\times(3+4) = 4\div(-2)+11\times(3+4) = 4\div(-2)+11\times 7 = -2+11\times 7 = -2+77 = 75$

c) $\Big(-1-(-2)+3\Big)\times 4-6\times(-2)+(4+5-9) = (-1+2+3)\times 4-6\times(-2)+(4+5-9) = (1+3)\times 4-6\times(-2)+(4+5-9) = 4\times 4-6\times(-2)+(4+5-9) = 4\times 4-6\times(-2)+(9-9) = 4\times 4-6\times(-2)+0 = 16-6\times(-2) = 16+12 = 28$

d) $\Big[-3+4-(-5)\Big]\times\Big[(-8+1)-(4+5)\Big]+5 = (-3+4+5)\times\Big[(-8+1)-(4+5)\Big]+5 = (-3+4+5)\times\Big[-7-(4+5)\Big]+5 = (-3+4+5)\times(-7-9)+5 = (1+5)\times(-7-9)+5 = 6\times(-7-9)+5 = 6\times(-16)+5 = -96+5 = -91$

e) $5+(-6+7)\times(2\div 2)+3 = 5+1\times(2\div 2)+3 = 5+1\times 1+3 = 5+1+3 = 6+3 = 9$

f) $5-\Big(2-8\div(-4)\times 3+(-7)\times(-2)\Big) = 5-\Big(2+2\times 3+(-7)\times(-2)\Big) = 5-\Big(2+6+(-7)\times(-2)\Big) = 5-(2+6+14) = 5-(8+14) = 5-22 = -17$

Correction de l'exercice 11

Calculons.

a) $2\times(3+5)-1\times(-2) = 2\times 8-1\times(-2) = 16-1\times(-2) = 16+2 = 18$

b) $\Big[(5+2)\times 2-(-3)\Big]\times(-1) = \Big[(5+2)\times 2+3\Big]\times(-1) = (7\times 2+3)\times(-1) = (14+3)\times(-1) = 17\times(-1) = -17$

c) $(5+6)\times 3-4\times(5-6) = 11\times 3-4\times(5-6) = 11\times 3-4\times(-1) = 33-4\times(-1) = 33+4 = 37$

d) $\Big[(-6+5-1)\times(-5+7)\times(-1)\Big]\div(4-3) = \Big[(-1-1)\times(-5+7)\times(-1)\Big]\div(4-3) = \Big[-2\times(-5+7)\times(-1)\Big]\div(4-3) = \Big[-2\times 2\times(-1)\Big]\div(4-3) = \Big[-4\times(-1)\Big]\div(4-3) = 4\div(4-3) = 4\div 1 = 4$

e) $-1+5-6\times(-2)+(6-7\div 7-1)\div 2 = -1+5-6\times(-2)+(6-1-1)\div 2 = -1+5-6\times(-2)+(5-1)\div 2 = -1+5-6\times(-2)+4\div 2 = -1+5+12+4\div 2 = -1+5+12+2 = 4+12+2 = 16+2 = 18$

f) $(-3)\times(-1)\times(-2)\div 2+(8-9+(-3))\times(-3)=(-3)\times(-1)\times(-2)\div 2+(-1+(-3))\times(-3)=(-3)\times(-1)\times(-2)\div 2+(-4)\times(-3)=3\times(-2)\div 2+(-4)\times(-3)=-6\div 2+(-4)\times(-3)=-3+(-4)\times(-3)=-3+12=9$

g) $2\times 3\div 3-4\div(5+3\times(-1))+2=2\times 3\div 3-4\div(5-3)+2=2\times 3\div 3-4\div 2+2=6\div 3-4\div 2+2=2-4\div 2+2=2-2+2=2$

Correction de l'exercice 12

Calculons :

a) $78-56-(-10)-10=78-56+10-10=22+10-10=22$

b) $24-16+(-16)-(-16)+(-30)=24-16+(-16)+16+(-30)=8+(-30)=-22$

c) $-(-87)-20+(-51)+35-(-10)=87-20+(-51)+35+10=67+(-51)+35+10=16+35+10=51+10=61$

d) $13+10\times(-6)-2\times(-3)-10-(-10)+2=13-60+6-10+10+2=-47+6-10+10+2=-41+2=-39$

e) $102\times(-2)+100-3+102\times 2=-204+100-3+204=100-3=97$

Correction de l'exercice 13

Calculons :

a) $2\times(-6)-8\times(-9)+10\times(-3)=-12+72-30=30$

b) $-(-3)+4+5\times(-6)\times 6+1=3+4+5\times(-6)\times 6+1=3+4-30\times 6+1=3+4-180+1=-172$

c) $-3+4\times(-5)+(-6)\times 7+8\times(-9)=-3-20-42-72=-137$

d) $-9\times 8\times(-7)+(-6)\times 5+(-4)=-72\times(-7)-30+(-4)=504-30+(-4)=470$

e) $-40\times 3\times(-11)\times(-1)=-120\times(-11)\times(-1)=1320\times(-1)=-1320$

Correction de l'exercice 14

Calculons :

a) $-11\times(-10+9)-(8+7)+(5-4)\times(3-2)+(1-2)=-11\times(-1)-15+1\times 1+(-1)=11-15+1+(-1)=-4$

b) $-60+\Big(20\times 2\times 3+(-100)\Big)-(-5)\times 10=-60+\Big(120+(-100)\Big)-(-5)\times 10=-60+20-(-5)\times 10=-60+20+50=10$

c) $\Big(3\times 11+(11\times 3-3)\Big)=3\times 11+(33-3)=3\times 11+30=33+30=63$

d) $13+(55-5)\times 3+3\times\Big(25-(-25)\Big)=13+50\times 3+3\times 50=13+150+150=313$

e) $4\times 5\times(-6+7)\times(-8-9)\times 10=4\times 5\times 1\times(-17)\times 10=-3\,400$

Solutions

Correction de l'exercice 15

Calculons :

a) $1 \times (-3) \times 2 + (-3) \times (-6) + 6 \times 8 - (-1) = -6 + 18 + 48 + 1 = 61$

b) $(-1) \times (-2) + 10 + (-10) + 9 - 8 \times (-2) \times (-1) = 2 + 10 - 10 + 9 - 16 = -5$

c) $\Big((-4 + 6 \times (-1)) - (-4) \times (-3) + 10\Big) = -4 - 6 - 12 + 10 = -12$

d) $\Big((-1) + 2 \times (-4) + 5\Big) \times 6 \times 2 = (-1 - 8 + 5) \times 6 \times 2 = -4 \times 6 \times 2 = -48$

e) $(3 + 4) \times (10 \times (-2)) + 10 - (-2) = 7 \times (-20) + 10 + 2 = -140 + 10 + 2 = -128$

Correction de l'exercice 16

Calculons :

a) $6 \times 7 \times (-5) + 2 \times (-1) + 3 \times 0 = -210 - 2 + 0 = -212$

b) $\Big((-6) \times (-1)\Big) + 2 \times \Big(-3 \times (-5)\Big) = 6 + 2 \times 15 = 6 + 30 = 36$

c) $-1 \times 2 \times 4 + 2 \times (-1) + (-4) \times 3 = -8 - 2 - 12 = -22$

d) $\Big(2 + 3 + 1 + (-2) \times (-1)\Big) \times 3 = (2 + 3 + 1 + 2) \times 3 = 8 \times 3 = 24$

e) $(-10) \times (-9) \times (-5) + 5 + 8 + 7 = -450 + 5 + 8 + 7 = -430$

Correction de l'exercice 17

Calculons :

a) $-8 \times (-10) + 5 - 3 \times (-2) + 15 \times 2 = 80 + 5 + 6 + 30 = 121$

b) $2 \times (-4) - \Big(-8 \times (-1)\Big) + 1 \times 0 - \Big(-6 \times (-2)\Big) = -8 - 8 + 0 - 12 = -28$

c) $\Big((-1) \times 20 + 10 - (-20)\Big) \times 10 = (-20 + 10 + 20) \times 10 = 10 \times 10 = 100$

d) $(-1) \times 50 \times 2 + 5 \times (-4) + 50 + 60 = -100 - 20 + 50 + 60 = -10$

e) $(-1) \times (-3) \times 4 \times 2 + 5 = 24 + 5 = 29$

Chapitre 2

Opérations sur les nombres réels

Nous avons pris le parti de ne pas utiliser l'appellation "nombres relatifs" de façon systématique car elle n'existe pas dans le bestiaire de l'ensemble des nombres. Ces fameux "nombres relatifs" tant employés dans les manuels de Collège sont en fait des "nombres réels". C'est donc sous ces deux termes que nous les appellerons.

L'objectif de ce chapitre n'est pas de définir ce qu'est un nombre réel car cela sort du programme de mathématiques du Secondaire. Il faudra attendre le Supérieur pour les construire correctement.

Nous dirons donc, pour simplifier, qu'un "nombre réel" est soit zéro, soit un nombre strictement positif, soit un nombre strictement négatif. Voici des exemples de nombres réels : π ; $-3,15$; $\dfrac{7}{3}$; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{3}+\pi$; -4 ; ....

Nous allons donc, dans ce chapitre, voir les différentes opérations qui existent entre ces nombres réels.

2.1 Exercice sur les propriétés des opérations entre réels

Rappels de cours (pour l'exercice 1)

*L'addition est une **loi de composition interne** sur l'ensemble des réels noté $\mathbb{R}$. En effet, soient deux réels a et b. Leur somme $s = a+b$ est – elle aussi – un réel, donc un élément de $\mathbb{R}$. Autrement dit, l'addition fait correspondre à deux éléments quelconques a, b de $\mathbb{R}$ un élément s de $\mathbb{R}$, d'où le mot **interne**.*
Soient a, b et c des réels. L'addition vérifie les propriétés suivantes :

1. ***associativité** : $(a+b)+c = a+(b+c)$;*
2. ***commutativité** : $a+b = b+a$;*
3. *elle possède un unique **élément neutre** qui est 0 car $0+a = a+0 = a$.*

*Il en va de même pour la multiplication : quels que soient les réels a et b, le **produit** $p = a\times b$ est bien, lui aussi, un réel. La multiplication est donc une loi de composition interne sur $\mathbb{R}$.*
Soient a, b et c des nombres réels, la multiplication vérifie les propriétés suivantes :

1. ***associativité** : $(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$;*
2. ***commutativité** : $a\times b = b\times a$;*
3. ***distributivité par rapport à l'addition** : $a\times(b+c) = (a\times b)+(a\times c)$;*
4. *elle possède un unique **élément neutre** qui est 1 car $1\times a = a\times 1 = a$.*

Ce n'est pas vrai pour la soustraction et la division.

Exercice 1

Donner, pour chaque cas, la propriété qui permet d'affirmer l'égalité :

a) $(1,5+2)+3 = 1,5+(2+3)$

b) $1,050\times 1 = 1,050$

c) $1\,456,45+45 = 45+1\,456,45$

d) $23,2+45,03+0 = 23,2+45,03$

e) $3\times(12\times 2) = (3\times 12)\times 2$

f) $234,1\times 23,65 = 23,65\times 234,1$

g) $\dfrac{3}{2}\times\left(\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{2}$

2.2 Exercices sur la valeur absolue

Rappels de cours (pour les exercices 2 et 3)

La valeur absolue définie dans le chapitre 1 page 11 existe aussi pour les nombres réels. Il suffit, tout simplement, de changer dans la définition page 11 les mots « entier relatif » ou « entier » par « nombre réel ».

Exemple

a) *si* $x = 4,3$, *on a* $|x| = |4,3| = 4,3$;

b) *si* $x = 0$, *on a* $|x| = |0| = 0$;

c) *si* $x = -2,13$, *on a* $|x| = |-2,13| = -(-2,13) = 2,13$.

Remarque

La valeur absolue d'un nombre réel est ***toujours*** *un réel positif.*

Nous avons les propriétés suivantes :

Théorème

Soient x *et* y *des réels avec* y *supposé non nul.*

1. $|x \times y| = |x| \times |y|$;
2. $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$.

Remarque

Attention les règles de calcul précédentes ne sont pas vraies, en général, pour la somme ou la différence. Par exemple, nous avons $|x+y| \leq |x|+|y|$ *appelée* ***inégalité triangulaire****. L'égalité est vraie seulement si* $x = k \times y$ *avec* k *réel positif. En effet,* $|x + y| = |k \times y + y| = |(k + 1) \times y| = |k + 1| \times |y| = (k + 1) \times |y|$ *et* $|x| + |y| = |k \times y| + |y| = |k| \times |y| + |y| = (|k| + 1) \times |y| = (k + 1) \times |y|$ *car comme* k *est positif alors* $|k| = k$*. D'où l'égalité dans ce cas particulier.*

Exercice 2

Donner la valeur absolue des nombres suivants :

a) $-6,7$

b) $45,8$

c) $-\frac{4}{5}$

d) $\frac{-4}{5}$

e) $\frac{4}{-5}$

f) $-\frac{-4}{5}$

g) $-\frac{4}{-5}$

Exercice 3

Donner la valeur absolue des nombres suivants :

a) $-\frac{-4}{-5}$

b) $\frac{-4}{-5}$

c) $-3 \times \frac{4}{5}$

d) $-3 \times \frac{-4}{-5}$

e) $-2 \times (-4,5)$

f) $2 \times (-4,5)$

g) $-2 \times 4,5$

2.3 Exercices sur les priorités opératoires

Rappels de cours (pour les exercices 4 à 7)

Rappelons qu'il existe des priorités entre les opérations :

- *La multiplication et la division sont prioritaires sur l'addition et la soustraction.*
- *Les calculs qui sont entre parenthèses sont à faire en premier. S'il y a plusieurs parenthèses incluses les unes dans les autres, il faut commencer par les parenthèses les plus intérieures.*
- *Si le calcul est, par exemple, composé seulement d'additions et de soustractions (ce serait la même chose s'il n'y avait que des multiplications et des divisions), alors les opérations doivent être faites de gauche à droite, c'est-à-dire dans le sens de la lecture.*

Exemples

a) $3 + 5 \times 2 - 1 = 3 + 10 - 1 = 13 - 1 = 12$

b) $10 \times \Big(7 + (25 - 16)\Big) = 10 \times (7 + 9) = 10 \times 16 = 160$

c) $\Big(7 + 5 \times (3 + 4)\Big) \times 2 = (7 + 5 \times 7) \times 2 = (7 + 35) \times 2 = 42 \times 2 = 84$

d) $(7+5)\times 8 - \Big(3\times(5+2\times 4)-7\Big) = 12\times 8 - \Big(3\times(5+8)-7\Big) = 12\times 8-(3\times 13-7) = 12 \times 8 - (39 - 7) = 12 \times 8 - 32 = 96 - 32 = 64.$

Exercice 4

Calculer :

a) $-5 + 6 - (-1) - 5 + 10$

b) $(-112) \times (-2) + 5 - 4 \times (-2)$

c) $-45 + (-6) - 9 + 10 \times (-1) \times (-2)$

d) $5 \times 10 \times (-0,1) \times 2 \times (-3)$

e) $2 \times (-3) \times 4 + 5 + (-6) + 7 - 8$

Exercice 5

Calculer :

a) $[(0,4 + 3,65) \times 0,1 + 0,5] \times 10$

b) $5,6 - (-3,4) + 2,5 \times 2$

c) $-(-34,56)+4,01\div 0,1+4,2\times 2$

d) $67,34-(-5,72)-6,10\times 3\div 2$

e) $-34,456+4,654-34,05\div 2$

f) $33,33\times 0,1-(-45,56)\div 0,1+\Big[-5,25\times 100-(-5,45)\Big]$

g) $\Big[(-25,75-1,01)\div 100-(-0,54)\Big]+3,76\times 0,1$

Exercice 6

Calculer :

a) $\Big[-143,59-(-3,01)\Big]\times 0,01-2,45\times 2$

b) $(5,6-7)\times(4,3-2,3)\div(9-8)$

c) $\Big[-3,45-(-5,6)\Big]\times\Big[9,1-(-0,9)\Big]+4,567$

d) $-78,90\times 100\div 0,1+56,76$

e) $(-0,01-0,1)+0,1\times 100\div 0,1$

f) $23,06-(-67,79)\div 0,001+100$

g) $0,01\div 100\times 0,01+100$

Exercice 7

Classer par ordre décroissant :

$$\frac{-134}{1000}\ ;1,34\ ;-0,1345\ ;0,13\ ;0,11\ ;-0,141\ ;\frac{13}{10}\ ;\frac{14}{-100}$$

2.4 Correction des exercices

Correction de l'exercice 1

Donnons les propriétés qui permettent d'affirmer les égalités.

a) $(1,5+2)+3=1,5+(2+3)\rightarrow$ *associativité de l'addition*

b) $1,050\times 1=1,050\rightarrow$ *1 est l'élément neutre de la multiplication*

c) $1\,456,45+45=45+1\,456,45\rightarrow$ *commutativité de l'addition*

d) $23,2+45,03+0=23,2+45,03\rightarrow$ *0 est l'élément neutre de l'addition*

e) $3\times(12\times 2)=(3\times 12)\times 2\rightarrow$ *associativité de la multiplication*

f) $234,1\times 23,65=23,65\times 234,1\rightarrow$ *commutativité de la multiplication*

g) $\frac{3}{2}\times\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\rightarrow$ *distributivité par rapport à l'addition*