

Mathieu Kieffer

Analyse et probabilités : 39 leçons pour l'agrégation

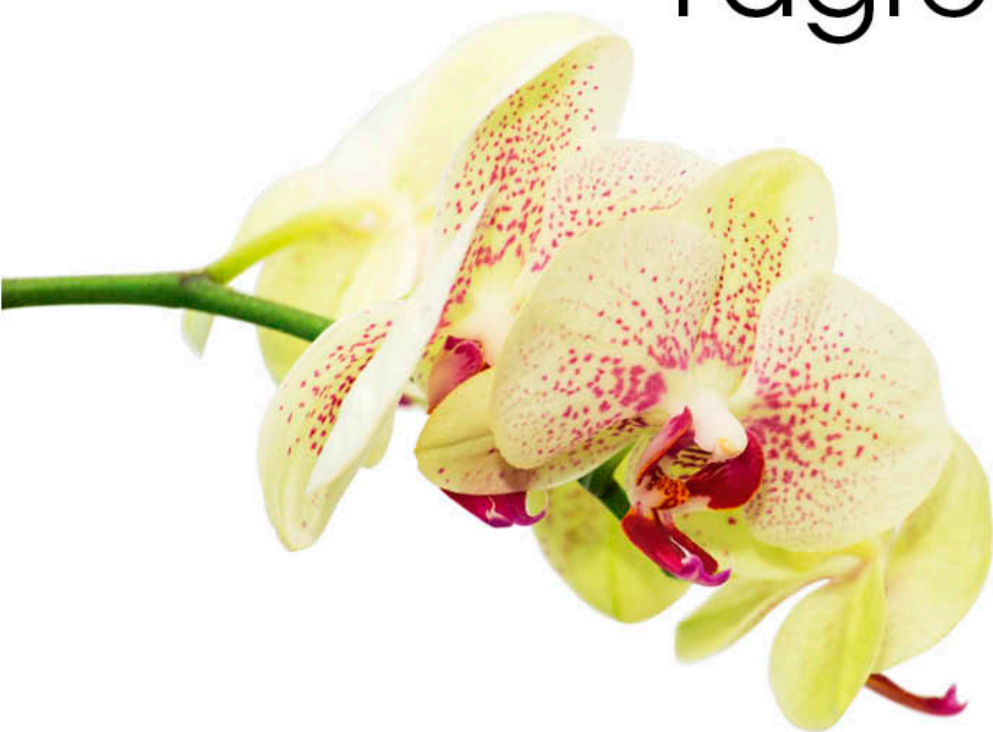


Table des matières

1	Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence. Applications	15
1.1	Suites récurrentes d'ordre 1	15
1.2	Méthode de Newton	18
1.3	Suites récurrentes linéaires d'ordre 2	20
2	Séries à termes réels positifs. Applications	25
2.1	Étude de la convergence	25
2.1.1	Critères de convergence	25
2.1.2	Condition nécessaire de convergence	27
2.2	Quelques outils	28
2.2.1	Test intégral	28
2.2.2	Comparaisons directe et logarithmique	29
2.2.3	Règles de Cauchy et de d'Alembert	31
2.2.4	Règle de Raabe-Duhamel	33
2.3	Formule de Stirling	34
3	Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi-convergence	37
3.1	Convergence absolue et semi-convergence	37
3.2	Théorème d'Abel	39
3.3	Opérations sur les séries	41
3.3.1	Commutativité	41
3.3.2	Associativité	42
3.3.3	Distributivité	44
4	Vitesse de convergence. Méthodes d'accélération de convergence	47
4.1	Vitesse d'une suite convergence	47
4.1.1	Quelques étalons de référence	48

4.1.2	Les convergences lente, géométrique et rapide	48
4.2	Méthodes d'accélération de la convergence	49
4.2.1	Barycentration	49
4.2.2	Développement asymptotique	49
4.2.3	Méthode de Romberg-Richardson	49
4.2.4	Méthode d'accélération d'Aïtken	50
4.3	Approximations de constantes célèbres	51
4.3.1	Approximation de π	51
4.3.2	Approximation de e	52
4.4	Le cas des suites divergentes	53
5	Écriture décimale d'un nombre réel. Cas des nombres rationnels	55
5.1	Développement décimal illimité d'un nombre rationnel	55
5.2	Développement décimal illimité d'un nombre réel	59
5.3	Applications	61
5.3.1	Cardinal de \mathbb{R}	61
5.3.2	Le carré et le segment	62
6	Théorème des valeurs intermédiaires. Applications	63
6.1	Théorème des valeurs intermédiaires	63
6.2	Applications	66
6.2.1	Théorème des cordes universelles	66
6.2.2	Théorème du point fixe	67
6.2.3	Théorèmes de la moyenne	67
6.2.4	Théorème de Darboux	68
6.2.5	Réciproque du théorème des valeurs intermédiaires	69
7	Théorème des accroissements finis. Applications	71
7.1	Fonction d'une variable réelle	71
7.2	Fonction de plusieurs variables réelles	74
7.3	Applications	75
7.3.1	Variations d'une fonction	75
7.3.2	Théorème limite de la dérivée	76
7.3.3	Quelques théorèmes	77
8	Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications	81
8.1	Généralités	81
8.2	Caractérisation géométrique	83

8.3	Caractérisation par les pentes	84
8.4	Caractérisation par la dérivée	86
8.5	Applications	87
8.5.1	Classement des moyennes	87
8.5.2	Inégalités de Hölder et Minkowski	87
8.5.3	Intégrale d'une fonction convexe	89
9	Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications	91
9.1	Formule de Taylor-Young	91
9.2	Formules de Taylor-Lagrange	93
9.3	Applications	95
9.3.1	Déterminer une limite	95
9.3.2	Comportement local d'une fonction	96
9.3.3	Développement en série entière	96
9.3.4	Inégalités de Kolmogorov	98
10	Fonction réciproque d'une fonction définie sur un intervalle. Continuité, dérivabilité. Exemples	101
10.1	Existence d'une fonction réciproque	101
10.2	Continuité d'une fonction réciproque	102
10.3	Dérivabilité d'une fonction réciproque	103
10.4	Réciproque d'une fonction circulaire	105
10.5	Réciproque d'une fonction hyperbolique	108
11	Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples	113
11.1	Différents modes de convergence	114
11.2	Propriétés de la somme	118
11.2.1	Continuité	118
11.2.2	Intégration	118
11.2.3	Dérivation	119
12	Séries entières d'une variable réelle ou complexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples	123
12.1	Convergence d'une série entière	124
12.2	Propriétés de la fonction somme	126
12.3	Convergence au bord	129

13 Séries de Fourier d'une fonction périodique. Propriétés de la somme.	
Exemples	133
13.1 Approche géométrique	133
13.2 Convergence uniforme en moyenne de Cesàro	136
13.3 Convergence en moyenne quadratique	139
13.4 Convergence simple	140
13.5 Synthèse et exemples	142
14 Méthodes de calcul approché d'une intégrale. Majoration ou	
estimation de l'erreur	145
14.1 Méthode des rectangles	145
14.2 Méthode du point milieu	147
14.3 Méthode des trapèzes	148
14.4 Méthode de Simpson	150
15 Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de \mathbb{R}	
(l'intégration sur un segment étant supposée connue). Exemples	153
15.1 Présentation de l'intégrale impropre	153
15.2 Propriétés de l'intégrale impropre	156
15.3 Comparaison	159
15.4 Critère d'Abel	161
16 Intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre. Propriétés,	
exemples et applications	163
16.1 Intégrale sur un compact	163
16.2 Intégrale impropre	167
16.3 Fonction gamma d'Euler	171
16.4 Transformée de Laplace	172
17 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 : $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$,	
où a, b, c sont des fonctions continues sur un intervalle de \mathbb{R}, à valeurs	
réelles ou complexes	173
17.1 Généralités	174
17.2 Résolution de l'équation homogène	176
17.2.1 Connaissant une base de \mathcal{S}_0	176
17.2.2 Méthode de Lagrange	177
17.3 Résolution de l'équation générale	178
17.3.1 Connaissant une solution particulière	178
17.3.2 Méthode de variation des constantes	178
17.4 Problème de raccords	179

17.5	Utilisation des séries entières	180
17.6	Zéros de solutions	182
18	Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants.	
	Exemples	183
18.1	Généralités	183
18.2	Solution générale de (E_0)	185
18.3	Solution particulière de (E)	188
18.3.1	Variation des constantes	188
18.3.2	Principe de superposition des solutions	190
18.4	Intervention de l'exponentielle de matrice	191
19	Diverses méthodes de résolution approchée d'une équation numérique ou d'une équation différentielle	193
19.1	Résolution approchée d'une équation numérique	193
19.1.1	La méthode du point fixe	193
19.1.2	La méthode de dichotomie	194
19.1.3	L'interpolation	195
19.1.4	Localisation des racines d'un polynôme à coefficients réels . . .	201
19.2	Résolution approchée d'une équation différentielle	204
20	Étude métrique des courbes planes	209
20.1	Longueur d'une courbe plane	209
20.2	Abscisse curviligne	211
20.3	Courbure	213
21	Parties compactes de \mathbb{R}^n. Fonctions continues sur une telle partie.	
	Exemples et applications	217
21.1	Parties compactes de \mathbb{R}^n	217
21.1.1	Deux définitions équivalentes	217
21.1.2	Caractérisation	219
21.2	Fonctions continues sur un compact	220
21.3	Applications	221
21.3.1	Équivalence des normes en dimension finie	221
21.3.2	Théorème de Rolle	222
21.3.3	Théorème fondamental de l'algèbre	223
21.3.4	Théorème de Riesz	224

22 Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentiabilité, fonctions de classes C^1. Exemples	227
22.1 Différentiabilité	227
22.2 Propriétés	231
22.3 Applications continûment différentiables	234
23 Extremums d'une fonction de plusieurs variables réelles	237
23.1 Étude à l'ordre 1	237
23.2 Étude à l'ordre 2	238
23.3 Cas des fonctions de deux variables réelles	241
23.4 Extremum global	243
23.5 Applications	244
23.5.1 La vallée mystérieuse	244
23.5.2 Triangle inscrit dans une ellipse	244
23.5.3 Extremum sur un compact	245
24 Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes. Applications	247
24.1 Normes usuelles	247
24.2 Applications linéaires	249
24.3 Compacité	250
24.3.1 Généralités	250
24.3.2 En dimension finie	251
25 Applications linéaires continues, normes associées. Exemples	255
25.1 Caractérisation des applications linéaires continues	255
25.2 Équivalence des normes	257
25.3 Cas des formes linéaires	258
25.4 Cas des applications bilinéaires	258
25.5 Norme subordonnée d'une application linéaire continue	259
26 Suites dans un espace vectoriel normé de dimension finie	265
26.1 Convergence	265
26.2 Complétude	267
26.3 Compacité	270
27 Théorèmes de points fixes	273
27.1 Théorème du point fixe et complétude	273
27.2 Théorème du point fixe et compacité	276
27.3 En dimension infinie	278

28	Espérance, variance. Applications	281
28.1	Espérance et variance d'une variable aléatoire	281
28.2	Quelques lois usuelles	285
28.3	Loi faible des grands nombres	288
29	Variables aléatoires possédant une densité. Exemples	291
29.1	Généralités	291
29.2	Exemples	294
29.2.1	Loi uniforme	294
29.2.2	Loi exponentielle	295
29.2.3	Loi normale	296
29.3	Inégalités	298
30	Conditionnement et indépendance en probabilités. Exemples	299
30.1	Probabilité conditionnelle et indépendance	299
30.2	Variables aléatoires indépendantes	302
30.3	Variance et covariance	303
30.4	Exemples	307
30.4.1	Probabilités et arithmétique	307
30.4.2	Somme de variables de Poisson	308
31	Suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli.	
	Variables aléatoires de loi binomiale et approximations de la loi	
	binomiale	309
31.1	Loi de Bernoulli et loi binomiale	310
31.2	Théorème de Bernoulli	312
31.3	Théorème de Stone-Weierstrass	314
31.4	Approximations de la loi binomiale	315
32	Loi normale en probabilités et statistiques	319
32.1	Présentation et simulation	319
32.2	Théorème de la limite centrale	322
33	Couples de variables aléatoires discrètes. Covariance. Exemples	
	d'application	329
33.1	Généralités	329
33.2	Variance, covariance et corrélation linéaire	330
33.3	Exemples	336

34 Exponentielle complexe. Fonctions trigonométriques. Nombre π	339
34.1 Exponentielle complexe	339
34.2 Fonctions trigonométriques	342
34.3 Résolution de $\sin(z) = a$, où $a \in \mathbb{R}$	344
34.4 Le nombre π en géométrie	345
34.5 Détermination principale du logarithme	346
35 Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications	349
35.1 Cas d'une fonction monotone	349
35.2 Cas d'une fonction à valeurs dans \mathbb{K}	352
35.3 Applications	353
35.3.1 Équivalent des sommes partielles d'une série divergente	353
35.3.2 Constante d'Euler-Mascheroni	354
35.3.3 Formule de Stirling	354
35.3.4 Évaluation du reste d'une série convergente	356
36 Intégrales et primitives	357
36.1 Théorème fondamental de l'analyse	357
36.2 Calculs d'intégrales	360
36.2.1 Méthode de l'intégration par parties	360
36.2.2 Méthode du changement de variable	361
36.3 Applications	362
36.3.1 Formule de Taylor avec reste intégral	362
36.3.2 Inégalité de Taylor-Lagrange	363
37 Inégalités en analyse et en probabilités	365
37.1 En analyse	365
37.1.1 Convexité	365
37.1.2 Classement des moyennes	367
37.1.3 Inégalités de Hölder et Minkowski	368
37.1.4 Projection orthogonale dans un espace préhilbertien complexe .	370
37.1.5 Inégalité des accroissements finis	371
37.2 En probabilités	371
38 Fonctions développables en série entière	373
38.1 Généralités	373
38.2 Opérations	376
38.3 Fonctions élémentaires usuelles	378
38.4 Fonction exponentielle complexe	379
38.5 Nombres de Catalan	379

39 La fonction Gamma	383
39.1 Étude de la fonction	384
39.2 Propriétés	387
39.3 Équivalents aux bornes	390
Annexes	393
Quelques dérivées usuelles	393
Quelques primitives usuelles	394
Quelques développements limités usuels	395
Quelques formules trigonométriques	396
Plan d'étude d'une courbe paramétrée	397
Plan d'étude d'une courbe polaire	398
Bibliographie	399
Index	401