

Mathieu Kieffer

Analyse et probabilités : 39 leçons pour l'agrégation



Table des matières

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1 Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence. Applications | 15 |
| 1.1 Suites récurrentes d'ordre 1 | 15 |
| 1.2 Méthode de Newton | 18 |
| 1.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 | 20 |
| 2 Séries à termes réels positifs. Applications | 25 |
| 2.1 Étude de la convergence | 25 |
| 2.1.1 Critères de convergence | 25 |
| 2.1.2 Condition nécessaire de convergence | 27 |
| 2.2 Quelques outils | 28 |
| 2.2.1 Test intégral | 28 |
| 2.2.2 Comparaisons directe et logarithmique | 29 |
| 2.2.3 Règles de Cauchy et de d'Alembert | 31 |
| 2.2.4 Règle de Raabe-Duhamel | 33 |
| 2.3 Formule de Stirling | 34 |
| 3 Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi-convergence | 37 |
| 3.1 Convergence absolue et semi-convergence | 37 |
| 3.2 Théorème d'Abel | 39 |
| 3.3 Opérations sur les séries | 41 |
| 3.3.1 Commutativité | 41 |
| 3.3.2 Associativité | 42 |
| 3.3.3 Distributivité | 44 |
| 4 Vitesse de convergence. Méthodes d'accélération de convergence | 47 |
| 4.1 Vitesse d'une suite convergence | 47 |
| 4.1.1 Quelques étalons de référence | 48 |

| | | |
|----------|-----------------------------------------------------------------------|-----------|
| 4.1.2 | Les convergences lente, géométrique et rapide | 48 |
| 4.2 | Méthodes d'accélération de la convergence | 49 |
| 4.2.1 | Barycentration | 49 |
| 4.2.2 | Développement asymptotique | 49 |
| 4.2.3 | Méthode de Romberg-Richardson | 49 |
| 4.2.4 | Méthode d'accélération d'Aitken | 50 |
| 4.3 | Approximations de constantes célèbres | 51 |
| 4.3.1 | Approximation de π | 51 |
| 4.3.2 | Approximation de e | 52 |
| 4.4 | Le cas des suites divergentes | 53 |
| 5 | Écriture décimale d'un nombre réel. Cas des nombres rationnels | 55 |
| 5.1 | Développement décimal illimité d'un nombre rationnel | 55 |
| 5.2 | Développement décimal illimité d'un nombre réel | 59 |
| 5.3 | Applications | 61 |
| 5.3.1 | Cardinal de \mathbb{R} | 61 |
| 5.3.2 | Le carré et le segment | 62 |
| 6 | Théorème des valeurs intermédiaires. Applications | 63 |
| 6.1 | Théorème des valeurs intermédiaires | 63 |
| 6.2 | Applications | 66 |
| 6.2.1 | Théorème des cordes universelles | 66 |
| 6.2.2 | Théorème du point fixe | 67 |
| 6.2.3 | Théorèmes de la moyenne | 67 |
| 6.2.4 | Théorème de Darboux | 68 |
| 6.2.5 | Réciproque du théorème des valeurs intermédiaires | 69 |
| 7 | Théorème des accroissements finis. Applications | 71 |
| 7.1 | Fonction d'une variable réelle | 71 |
| 7.2 | Fonction de plusieurs variables réelles | 74 |
| 7.3 | Applications | 75 |
| 7.3.1 | Variations d'une fonction | 75 |
| 7.3.2 | Théorème limite de la dérivée | 76 |
| 7.3.3 | Quelques théorèmes | 77 |
| 8 | Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications | 81 |
| 8.1 | Généralités | 81 |
| 8.2 | Caractérisation géométrique | 83 |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 8.3 Caractérisation par les pentes | 84 |
| 8.4 Caractérisation par la dérivée | 86 |
| 8.5 Applications | 87 |
| 8.5.1 Classement des moyennes | 87 |
| 8.5.2 Inégalités de Hölder et Minkowski | 87 |
| 8.5.3 Intégrale d'une fonction convexe | 89 |
| 9 Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications | 91 |
| 9.1 Formule de Taylor-Young | 91 |
| 9.2 Formules de Taylor-Lagrange | 93 |
| 9.3 Applications | 95 |
| 9.3.1 Déterminer une limite | 95 |
| 9.3.2 Comportement local d'une fonction | 96 |
| 9.3.3 Développement en série entière | 96 |
| 9.3.4 Inégalités de Kolmogorov | 98 |
| 10 Fonction réciproque d'une fonction définie sur un intervalle. | |
| Continuité, dérivabilité. Exemples | 101 |
| 10.1 Existence d'une fonction réciproque | 101 |
| 10.2 Continuité d'une fonction réciproque | 102 |
| 10.3 Dérivabilité d'une fonction réciproque | 103 |
| 10.4 Réciproque d'une fonction circulaire | 105 |
| 10.5 Réciproque d'une fonction hyperbolique | 108 |
| 11 Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples | 113 |
| 11.1 Différents modes de convergence | 114 |
| 11.2 Propriétés de la somme | 118 |
| 11.2.1 Continuité | 118 |
| 11.2.2 Intégration | 118 |
| 11.2.3 Déivation | 119 |
| 12 Séries entières d'une variable réelle ou complexe. | |
| Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples | 123 |
| 12.1 Convergence d'une série entière | 124 |
| 12.2 Propriétés de la fonction somme | 126 |
| 12.3 Convergence au bord | 129 |

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 13 Séries de Fourier d'une fonction périodique. Propriétés de la somme. | |
| Exemples | 133 |
| 13.1 Approche géométrique | 133 |
| 13.2 Convergence uniforme en moyenne de Cesàro | 136 |
| 13.3 Convergence en moyenne quadratique | 139 |
| 13.4 Convergence simple | 140 |
| 13.5 Synthèse et exemples | 142 |
| 14 Méthodes de calcul approché d'une intégrale. Majoration ou estimation de l'erreur | 145 |
| 14.1 Méthode des rectangles | 145 |
| 14.2 Méthode du point milieu | 147 |
| 14.3 Méthode des trapèzes | 148 |
| 14.4 Méthode de Simpson | 150 |
| 15 Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de \mathbb{R} (l'intégration sur un segment étant supposée connue). Exemples | 153 |
| 15.1 Présentation de l'intégrale impropre | 153 |
| 15.2 Propriétés de l'intégrale impropre | 156 |
| 15.3 Comparaison | 159 |
| 15.4 Critère d'Abel | 161 |
| 16 Intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre. Propriétés, exemples et applications | 163 |
| 16.1 Intégrale sur un compact | 163 |
| 16.2 Intégrale impropre | 167 |
| 16.3 Fonction gamma d'Euler | 171 |
| 16.4 Transformée de Laplace | 172 |
| 17 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 : $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, où a, b, c sont des fonctions continues sur un intervalle de \mathbb{R}, à valeurs réelles ou complexes | 173 |
| 17.1 Généralités | 174 |
| 17.2 Résolution de l'équation homogène | 176 |
| 17.2.1 Connaissant une base de \mathcal{S}_0 | 176 |
| 17.2.2 Méthode de Lagrange | 177 |
| 17.3 Résolution de l'équation générale | 178 |
| 17.3.1 Connaissant une solution particulière | 178 |
| 17.3.2 Méthode de variation des constantes | 178 |
| 17.4 Problème de raccords | 179 |

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 17.5 Utilisation des séries entières | 180 |
| 17.6 Zéros de solutions | 182 |
| 18 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants. | |
| Exemples | 183 |
| 18.1 Généralités | 183 |
| 18.2 Solution générale de (E_0) | 185 |
| 18.3 Solution particulière de (E) | 188 |
| 18.3.1 Variation des constantes | 188 |
| 18.3.2 Principe de superposition des solutions | 190 |
| 18.4 Intervention de l'exponentielle de matrice | 191 |
| 19 Diverses méthodes de résolution approchée d'une équation numérique ou d'une équation différentielle | 193 |
| 19.1 Résolution approchée d'une équation numérique | 193 |
| 19.1.1 La méthode du point fixe | 193 |
| 19.1.2 La méthode de dichotomie | 194 |
| 19.1.3 L'interpolation | 195 |
| 19.1.4 Localisation des racines d'un polynôme à coefficients réels | 201 |
| 19.2 Résolution approchée d'une équation différentielle | 204 |
| 20 Étude métrique des courbes planes | 209 |
| 20.1 Longueur d'une courbe plane | 209 |
| 20.2 Abscisse curviligne | 211 |
| 20.3 Courbure | 213 |
| 21 Parties compactes de \mathbb{R}^n. Fonctions continues sur une telle partie. | |
| Exemples et applications | 217 |
| 21.1 Parties compactes de \mathbb{R}^n | 217 |
| 21.1.1 Deux définitions équivalentes | 217 |
| 21.1.2 Caractérisation | 219 |
| 21.2 Fonctions continues sur un compact | 220 |
| 21.3 Applications | 221 |
| 21.3.1 Équivalence des normes en dimension finie | 221 |
| 21.3.2 Théorème de Rolle | 222 |
| 21.3.3 Théorème fondamental de l'algèbre | 223 |
| 21.3.4 Théorème de Riesz | 224 |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 22 Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentiabilité, fonctions de classes \mathcal{C}^1. Exemples | 227 |
| 22.1 Différentiabilité | 227 |
| 22.2 Propriétés | 231 |
| 22.3 Applications continûment différentiables | 234 |
| 23 Extremums d'une fonction de plusieurs variables réelles | 237 |
| 23.1 Étude à l'ordre 1 | 237 |
| 23.2 Étude à l'ordre 2 | 238 |
| 23.3 Cas des fonctions de deux variables réelles | 241 |
| 23.4 Extremum global | 243 |
| 23.5 Applications | 244 |
| 23.5.1 La vallée mystérieuse | 244 |
| 23.5.2 Triangle inscrit dans une ellipse | 244 |
| 23.5.3 Extremum sur un compact | 245 |
| 24 Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes. Applications | 247 |
| 24.1 Normes usuelles | 247 |
| 24.2 Applications linéaires | 249 |
| 24.3 Compacité | 250 |
| 24.3.1 Généralités | 250 |
| 24.3.2 En dimension finie | 251 |
| 25 Applications linéaires continues, normes associées. Exemples | 255 |
| 25.1 Caractérisation des applications linéaires continues | 255 |
| 25.2 Équivalence des normes | 257 |
| 25.3 Cas des formes linéaires | 258 |
| 25.4 Cas des applications bilinéaires | 258 |
| 25.5 Norme subordonnée d'une application linéaire continue | 259 |
| 26 Suites dans un espace vectoriel normé de dimension finie | 265 |
| 26.1 Convergence | 265 |
| 26.2 Complétude | 267 |
| 26.3 Compacité | 270 |
| 27 Théorèmes de points fixes | 273 |
| 27.1 Théorème du point fixe et complétude | 273 |
| 27.2 Théorème du point fixe et compacité | 276 |
| 27.3 En dimension infinie | 278 |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 28 Espérance, variance. Applications | 281 |
| 28.1 Espérance et variance d'une variable aléatoire | 281 |
| 28.2 Quelques lois usuelles | 285 |
| 28.3 Loi faible des grands nombres | 288 |
| 29 Variables aléatoires possédant une densité. Exemples | 291 |
| 29.1 Généralités | 291 |
| 29.2 Exemples | 294 |
| 29.2.1 Loi uniforme | 294 |
| 29.2.2 Loi exponentielle | 295 |
| 29.2.3 Loi normale | 296 |
| 29.3 Inégalités | 298 |
| 30 Conditionnement et indépendance en probabilités. Exemples | 299 |
| 30.1 Probabilité conditionnelle et indépendance | 299 |
| 30.2 Variables aléatoires indépendantes | 302 |
| 30.3 Variance et covariance | 303 |
| 30.4 Exemples | 307 |
| 30.4.1 Probabilités et arithmétique | 307 |
| 30.4.2 Somme de variables de Poisson | 308 |
| 31 Suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli. | |
| Variables aléatoires de loi binomiale et approximations de la loi binomiale | 309 |
| 31.1 Loi de Bernoulli et loi binomiale | 310 |
| 31.2 Théorème de Bernoulli | 312 |
| 31.3 Théorème de Stone-Weierstrass | 314 |
| 31.4 Approximations de la loi binomiale | 315 |
| 32 Loi normale en probabilités et statistiques | 319 |
| 32.1 Présentation et simulation | 319 |
| 32.2 Théorème de la limite centrale | 322 |
| 33 Couples de variables aléatoires discrètes. Covariance. Exemples d'application | 329 |
| 33.1 Généralités | 329 |
| 33.2 Variance, covariance et corrélation linéaire | 330 |
| 33.3 Exemples | 336 |

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 34 Exponentielle complexe. Fonctions trigonométriques. Nombre π | 339 |
| 34.1 Exponentielle complexe | 339 |
| 34.2 Fonctions trigonométriques | 342 |
| 34.3 Résolution de $\sin(z) = a$, où $a \in \mathbb{R}$ | 344 |
| 34.4 Le nombre π en géométrie | 345 |
| 34.5 Détermination principale du logarithme | 346 |
| 35 Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications | 349 |
| 35.1 Cas d'une fonction monotone | 349 |
| 35.2 Cas d'une fonction à valeurs dans \mathbb{K} | 352 |
| 35.3 Applications | 353 |
| 35.3.1 Équivalent des sommes partielles d'une série divergente | 353 |
| 35.3.2 Constante d'Euler-Mascheroni | 354 |
| 35.3.3 Formule de Stirling | 354 |
| 35.3.4 Évaluation du reste d'une série convergente | 356 |
| 36 Intégrales et primitives | 357 |
| 36.1 Théorème fondamental de l'analyse | 357 |
| 36.2 Calculs d'intégrales | 360 |
| 36.2.1 Méthode de l'intégration par parties | 360 |
| 36.2.2 Méthode du changement de variable | 361 |
| 36.3 Applications | 362 |
| 36.3.1 Formule de Taylor avec reste intégral | 362 |
| 36.3.2 Inégalité de Taylor-Lagrange | 363 |
| 37 Inégalités en analyse et en probabilités | 365 |
| 37.1 En analyse | 365 |
| 37.1.1 Convexité | 365 |
| 37.1.2 Classement des moyennes | 367 |
| 37.1.3 Inégalités de Hölder et Minkowski | 368 |
| 37.1.4 Projection orthogonale dans un espace préhilbertien complexe . | 370 |
| 37.1.5 Inégalité des accroissements finis | 371 |
| 37.2 En probabilités | 371 |
| 38 Fonctions développables en série entière | 373 |
| 38.1 Généralités | 373 |
| 38.2 Opérations | 376 |
| 38.3 Fonctions élémentaires usuelles | 378 |
| 38.4 Fonction exponentielle complexe | 379 |
| 38.5 Nombres de Catalan | 379 |

| | |
|--------------------------------------------------|------------|
| 39 La fonction Gamma | 383 |
| 39.1 Étude de la fonction | 384 |
| 39.2 Propriétés | 387 |
| 39.3 Équivalents aux bornes | 390 |
| Annexes | 393 |
| Quelques dérivées usuelles | 393 |
| Quelques primitives usuelles | 394 |
| Quelques développements limités usuels | 395 |
| Quelques formules trigonométriques | 396 |
| Plan d'étude d'une courbe paramétrée | 397 |
| Plan d'étude d'une courbe polaire | 398 |
| Bibliographie | 399 |
| Index | 401 |