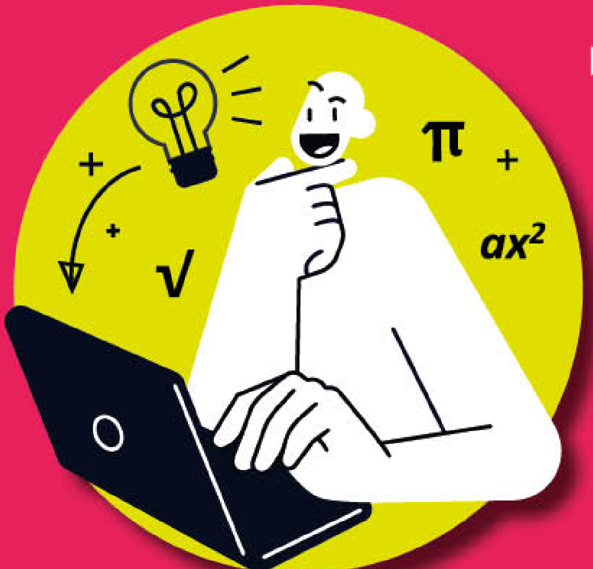
Thibault **Vanhoucke**

T^le^

Spécialité
Mathématiques

Prendre le temps de comprendre



- Acquérir des **bases solides** et des **capacités de raisonnement**
- Maîtriser les **méthodes incontournables** pour le Bac
- Cours détaillé pour **développer son intuition mathématique**
- **Exercices** de difficulté croissante et **solutions détaillées**

ellipses

Chapitre 1

Rudiments de logique et raisonnements

Les mathématiques sont sans aucun doute la science la plus rigoureuse : en mathématiques, soit un résultat est vrai, soit il est faux, il n'y a pas d'entre-deux ! Au fil des siècles, un certain formalisme a été mis en place pour rendre les démonstrations les plus rigoureuses et précises possible. Dans ce chapitre, nous allons dans un premier temps nous familiariser avec les symboles qui sont utilisés pour rédiger une démonstration, et nous passerons ensuite en revue quelques raisonnements qui font partie de la boîte à outils du mathématicien pour prouver des résultats. L'application des différents types de raisonnement sera vue dans les chapitres ultérieurs.

1. Les quantificateurs

En mathématiques, on appelle « quantificateurs » l'ensemble des symboles qui permettent de faciliter la rédaction d'une preuve, et qui permettent par exemple de préciser le domaine de validité d'un résultat. Deux quantificateurs seront particulièrement utiles au lycée :

$$\forall \text{ et } \exists$$

Le quantificateur $\forall$ se lit « pour tout » ou « quel que soit », et permet d'annoncer, généralement en début d'assertion, l'ensemble sur lequel l'assertion qui suit est vérifiée. Par exemple, $\forall x \in \mathbb{R}$ signifie que l'assertion qui suivra est valable pour n'importe quel nombre réel x.

Le second quantificateur, $\exists$, se lit « il existe », et permet d'indiquer qu'il existe au moins un objet vérifiant une certaine propriété (explicitée juste après). Par exemple, $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n \leq M$ se lit « il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $(-1)^n$ est inférieur à M ».

Ainsi, les quantificateurs permettent d'écrire des assertions de manière concise, compacte et sans ambiguïté. Il existe de nombreux autres quantificateurs, parmi lesquels se trouvent par exemple :

$/$ - « tel que »

$!$ - « unique »

$\Rightarrow$ - « implique »

$\Leftrightarrow$ - « est équivalent à »

Pour éviter d'alourdir les notations, le quantificateur $/$ (« tel que ») est souvent remplacé par une simple virgule.

Dans certaines situations, l'ordre des quantificateurs importe peu. C'est par exemple le cas lorsque l'on a sous les yeux une succession de $\forall$ ou bien une succession de $\exists$. En revanche, intervertir $\forall$ et $\exists$ n'est pas sans conséquence. Prenons un exemple concret :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R} / n \leq M$$

$$\exists M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, n \leq M$$

La première assertion stipule que pour tout entier naturel n, il est possible de trouver un réel M qui soit plus grand que n, et cette assertion est bien vraie (par exemple en prenant $M = n + 1$). La seconde assertion stipule qu'il existe un réel M qui est plus grand que n'importe quel entier naturel, et cette assertion est fausse (si l'on prend n'importe quel réel, il existera toujours un entier naturel supérieur à ce réel). La seule différence entre les deux assertions est l'ordre des quantificateurs, mais l'une est vraie, et l'autre est fausse. La différence entre les deux assertions est que dans la première, on choisit M après avoir fixé n (et donc, M peut être différent en fonction des valeurs de n), alors que dans la seconde, on choisit M avant d'avoir fixé n (et donc M doit être valable pour toutes les valeurs de n). Il faudra donc être toujours vigilant lorsqu'une assertion fait intervenir à la fois $\exists$ et $\forall$.

2. Raisonnements par implications successives, par équivalences et par double implication

Comme leurs noms l'indiquent, le raisonnement par implications successives, le raisonnement par équivalences et le raisonnement par double implication permettent de prouver des implications et des équivalences. Je profite de cette section pour rappeler la différence entre une implication et une équivalence. Par exemple, considérons deux assertions quelconques notées A et B. Une implication est une propriété à sens unique ($A \Rightarrow B$: si A est vraie, alors B est vraie), alors qu'une équivalence est une propriété à double sens ($A \Leftrightarrow B$: si A est vraie, alors B est vraie, et si B est vraie, alors A est vraie).

Lorsque $A \Rightarrow B$, on dit que A est une « condition suffisante » pour avoir B, car il suffit de montrer que A est vérifiée pour montrer que B l'est aussi. On dit également que B est une « condition nécessaire » pour A, puisque si B n'est pas vérifiée, alors A ne peut pas l'être. En effet, si A était vérifiée, B le serait également.

Lorsque $A \Leftrightarrow B$, on dit que A est une « condition nécessaire et suffisante » pour avoir B.

Les raisonnements par implications successives consistent à tirer une implication à partir d'une ou des hypothèses initiales, et de déduire une autre implication à partir de l'assertion obtenue, et encore une autre, etc., jusqu'à aboutir à l'implication que l'on souhaite démontrer. Les raisonnements par équivalences sont analogues, mais en travaillant avec des équivalences au lieu de manipuler des implications. Parfois, il n'est pas possible de démontrer directement une équivalence, et on peut alors raisonner par double implication, en prouvant les deux sens de la propriété séparément.

J'aimerais insister sur le fait qu'il faut être très vigilant à ne pas utiliser le symbole d'équivalence de manière abusive. Il est beaucoup plus fréquent d'écrire des fausses équivalences que des fausses implications. Lorsque l'on écrit une équivalence, il faut s'assurer que le sens retour est bien vérifié (c'est généralement ce sens qui rend l'équivalence fausse), et il faut bien veiller à ne pas utiliser le symbole d'équivalence par défaut et de façon machinale et systématique.

3. Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence permet de démontrer des résultats sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. Son principe est relativement simple : si une propriété est vérifiée à un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, et si elle est héréditaire (c'est-à-dire que si elle est vérifiée à un rang n, alors elle l'est aussi au rang $n+1$), alors la propriété est vérifiée pour tout entier naturel supérieur à n_0.

Prenons le temps de nous en convaincre. Supposons qu'une propriété est vérifiée pour $n_0 \in \mathbb{N}$ et qu'elle est héréditaire. Comme elle est héréditaire et qu'elle est vérifiée pour n_0, on peut dire qu'elle est vraie en $n_0 + 1$. Mais comme on a montré que la propriété est vraie en $n_0 + 1$, on peut désormais dire qu'elle est vérifiée en $n_0 + 2$ (puisqu'elle est toujours héréditaire). On peut de même montrer qu'elle est vérifiée en $n_0 + 3$, $n_0 + 4$, etc. Elle est finalement vérifiée pour tout entier naturel supérieur à n_0.

On peut prendre comme analogie une chute de dominos : si un domino tombe, il fait chuter le domino suivant avec lui. Mais attention à ne pas oublier que pour que tous les dominos tombent, il faut que le premier chute.

Généralement, une démonstration par récurrence se rédigera en trois parties :

- Initialisation : dans cette partie, on montre que la propriété est vraie en un certain rang, qui est souvent 0 ou 1, mais pas nécessairement.
- Hérédité : dans cette partie, on montre que la propriété est héréditaire, c'est-à-dire qu'elle se propage de proche en proche. On débutera toujours cette partie par une phrase du type : « Soit $n \in$ ... fixé. Supposons que la propriété est vérifiée au rang n. Montrons qu'elle reste vraie au rang $n + 1$ ».
- Conclusion : on terminera par indiquer que la propriété étudiée est bien vérifiée sur l'ensemble de travail.

4. Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer le contraire de ce que l'on veut prouver et à montrer que cela aboutit (par exemple au terme d'une série d'implications successives) à une contradiction ou à quelque chose d'absurde. Cela signifie alors que l'hypothèse initiale était fausse. Ainsi, si le contraire de l'assertion considérée est faux, on peut conclure que l'assertion est vraie.

Par exemple, considérons une classe ayant effectué une interrogation de cours. La moyenne des notes est égale à 6. Montrons qu'au moins un élève n'a pas appris sa leçon. Supposons donc que tous les élèves ont appris leur leçon. Dans ce cas, tous les élèves auraient une note supérieure à 10. Par conséquent, la moyenne de la classe serait elle-même supérieure à 10. Or, la moyenne de classe est égale à 6, et on aboutit à une contradiction. Finalement, au moins un élève n'a pas appris correctement sa leçon.

5. Raisonnement par contraposée

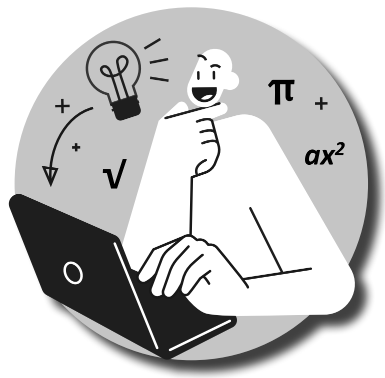
Le raisonnement par contraposée repose sur l'équivalence suivante, dans laquelle P et Q désignent deux assertions :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{ non } Q \Rightarrow \text{ non } P)$$

Ainsi, pour montrer l'implication $P \Rightarrow Q$, on peut soit montrer directement $(P \Rightarrow Q)$, soit montrer $(\text{ non } Q \Rightarrow \text{ non } P)$, les deux reviennent à la même chose. Parfois, il est plus facile de prouver la contraposée de l'implication initiale.

6. Raisonnement par disjonction de cas

Le raisonnement par disjonction de cas consiste à décomposer la proposition que l'on souhaite montrer initialement en un nombre de sous-propositions que l'on vérifie séparément. Ce type de raisonnement est surtout utilisé en arithmétique. Par exemple, si l'on souhaite montrer un résultat vérifié par tous les entiers, on pourra d'abord montrer ce résultat pour les entiers pairs, et ensuite pour les entiers impairs. Le fait de distinguer les cas permet d'utiliser des résultats supplémentaires que l'on ne peut pas appliquer dans le cas général.



Deuxième partie

Les fonctions réelles

Chapitre 2

Généralités sur les fonctions

Cours

1. Comprendre le concept de fonction

Très tôt au cours de notre scolarité (pour ma part en classe de quatrième), on nous parle de fonctions mais personnellement, j'ai mis un certain nombre d'années à trouver une définition satisfaisante de ce concept. On commence en général à nous parler des fonctions affines, c'est-à-dire des fonctions de la forme $f(x) = ax + b$ avec a et b deux nombres réels. Un peu plus tard, on découvre les fonctions polynomiales de degré 2. Et de fil en aiguille, on se familiarise avec les fonctions à travers des cas particuliers sans jamais s'interroger sur ce qui fait qu'une fonction est une fonction.

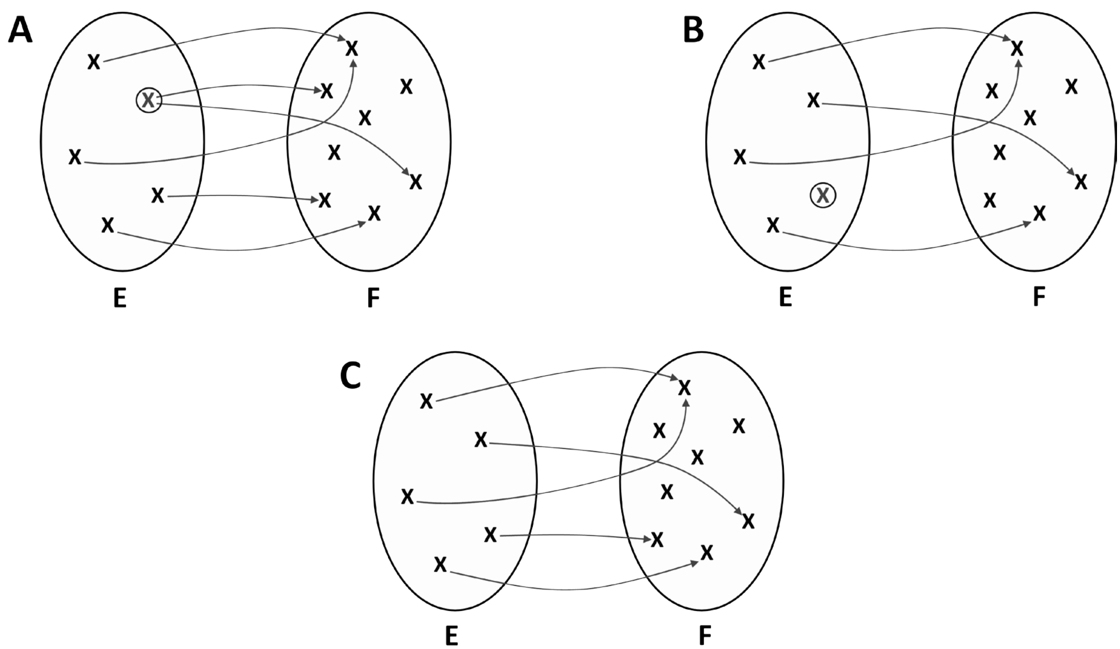
Chercher une définition générale des fonctions nécessite une certaine forme d'abstraction dont on n'a pas vraiment l'habitude au lycée. Mais je suis convaincu qu'en étant accompagné par une personne qui a un peu plus de recul, les lycéens et collégiens sont tout à fait capables de faire preuve d'abstraction et d'appréhender des concepts sans se restreindre à des cas particuliers. C'est pourquoi, avant de se restreindre au cas particulier des fonctions réelles à variable réelle, j'aimerais partager ma définition d'une fonction :

Définition

Une fonction est un objet mathématique qui permet d'associer à chaque élément d'un ensemble, appelé **domaine de définition** ou **ensemble de départ**, un unique élément d'un autre ensemble, appelé **ensemble d'arrivée**.

Je reconnais que cette définition est assez vague, mais elle doit forcément l'être étant donné que le concept de fonction est très large. Je vais tenter de rendre ma définition un peu plus concrète en repartant du premier exemple de fonction que l'on rencontre au cours de sa scolarité : les fonctions affines. Considérons la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 2x - 3$. Cette fonction permet d'associer chaque nombre réel (noté x) à un autre nombre réel (noté $f(x)$). Par exemple, en remplaçant x par des valeurs particulières, on constate que 2 est associé à $2\times2-3 = 1$, le nombre -10 est associé au nombre $2\times(-10)-3 = -23$, etc. Je pense qu'à ce stade, il est relativement aisé de voir les fonctions comme un lien entre deux nombres réels. Mais faisons un pas supplémentaire vers l'abstraction. Dans l'exemple précédent, nous avons choisi comme ensembles de départ et d'arrivée l'ensemble des nombres réels. Je pense qu'il s'agit de l'exemple le plus parlant étant donné que nous sommes habitués à manipuler des nombres réels depuis notre plus jeune âge. Mais une fonction peut relier bien d'autres éléments entre eux : un réel avec un réel, un réel avec un vecteur, une matrice avec un réel, une fonction avec une autre fonction, etc. Si certaines notions mentionnées dans la phrase précédente ne vous disent rien, pas d'inquiétude : nous en parlerons en détail dans ce livre.

Pour ne pas s'intéresser à un cas particulier, nous pouvons par exemple représenter les éléments étudiés (nombres réels, vecteurs, matrices, etc.) par des croix à l'intérieur d'ovales qui symboliseront l'ensemble de départ, noté E, et l'ensemble d'arrivée, noté F. Les « liens » entre les éléments des deux ensembles sont représentés sur la figure par des flèches :



Parmi les trois schémas ci-dessus, un seul correspond à une fonction telle que nous l'avons définie dans l'encadré précédent. Deux points essentiels vont permettre d'identifier le schéma correct. D'une part, la définition indique que les éléments de l'ensemble E doivent être associés à **un unique élément de** F. Cette caractéristique des fonctions permet d'éliminer le schéma A, car l'élément entouré est associé à deux éléments distincts de F. D'autre part, **chaque élément de** E doit être associé à un élément de F. On peut donc affirmer que le schéma B ne correspond pas à une fonction, car l'élément de E entouré n'est relié à aucun élément de F. On parle alors d'« application » et non pas de fonction. Le schéma C quant à lui respecte toutes les caractéristiques d'une fonction. Il est important de noter que la définition d'une fonction n'exclut pas la possibilité qu'un élément de l'ensemble d'arrivée F ne soit associé à aucun élément ou soit associé à plusieurs éléments de l'ensemble de départ E.

En termes de rédaction, la manière la plus complète d'introduire une fonction f définie sur un ensemble E et à valeurs dans un ensemble F est la suivante :

$$f \ : \ \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Il est important de remarquer que les flèches utilisées pour définir la fonction f sont différentes ($\to$ à la première ligne, et $\mapsto$ à la seconde).

Dans la suite de ce livre, nous nous intéresserons uniquement aux fonctions réelles à variables réelles, c'est-à-dire les fonctions de la forme :

$$f \ : \ \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

où I désigne un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

2. Vocabulaire

Le concept de fonction s'accompagne d'un vocabulaire précis que j'aimerais passer en revue dans cette section. Soient E et F deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Considérons la fonction f suivante :

$$f \ : \ \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

De plus, considérons un réel x et notons $y = f(x)$.

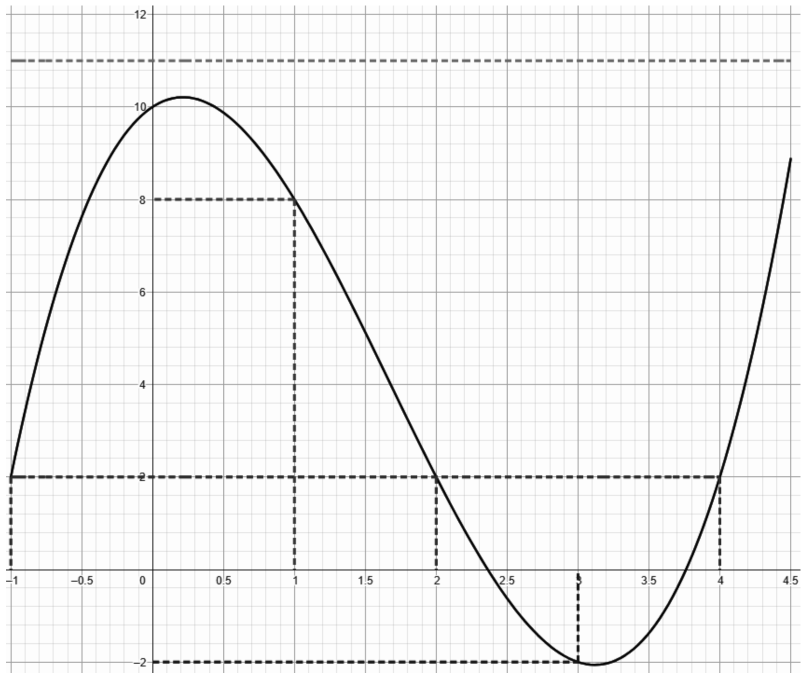
- E est appelé **domaine de définition** ou **ensemble de départ** de la fonction f.
- F est appelé **ensemble d'arrivée** de la fonction f.
- On dit que y est l'**image** de x par la fonction f.
- On dit que x est un **antécédent** de y par la fonction f.

Remarque : Le choix des articles dans les définitions ci-dessus est important. Par définition, chaque élément x de E est associé à un unique élément de F, on parlera donc de « **l**'image de x ». En revanche, un élément y de F peut être associé à plusieurs éléments de E, c'est pourquoi on parlera « d'**un** antécédent » ou « **des** antécédents » de y.

Considérons par exemple la fonction f définie par :

$$f \ : \ \begin{array}{rcl} [-1; 4,5] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - 5x^2 + 2x + 10 \end{array}$$

et dont le graphe est représenté ci-dessous :



Graphiquement, on constate que :
- les antécédents de 2 par f sont -1, 2 et 4 ;
- l'image de 1 par f est 8 ;
- l'image de 3 par f est -2 ;
- 11 n'admet pas d'antécédent par f.

Ces résultats peuvent se retrouver par le calcul :

$$f(1) = 1^3 - 5 \times 1^2 + 2 \times 1 + 10 = 1 - 5 + 2 + 10 = 8$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) + 10 = -1 - 5 - 2 + 10 = 2$$

$$f(2) = 2^3 - 5 \times 2^2 + 2 \times 2 + 10 = 8 - 20 + 4 + 10 = 2$$

$$f(3) = 3^3 - 5 \times 3^2 + 2 \times 3 + 10 = 27 - 45 + 6 + 10 = -2$$

$$f(4) = 4^3 - 5 \times 4^2 + 2 \times 4 + 10 = 64 - 80 + 8 + 10 = 2$$

3. Premières propriétés des fonctions : variations et signe

Définition

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et f une fonction de E dans $\mathbb{R}$.
- f est croissante sur $I \subset E$ si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- f est strictement croissante sur $I \subset E$ si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- f est décroissante sur $I \subset E$ si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

- f est strictement décroissante sur $I \subset E$ si et seulement si :

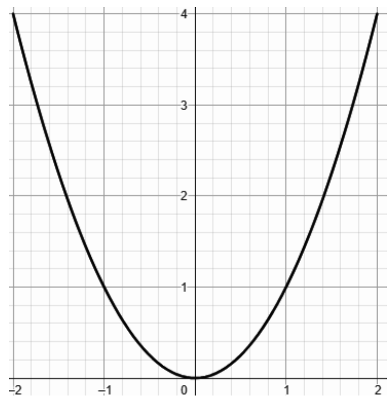
$$\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

- f est monotone sur $I \subset E$ si et seulement si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.

Prenons l'exemple de la fonction g définie par :

$$\begin{array}{rcccl} g & : & [-2,2] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

et dont le graphe est représenté ci-contre. Graphiquement, on constate que la fonction g est décroissante sur $[-2, 0]$ et croissante sur $[0, 2]$. Nous verrons plus tard comment déterminer les variations d'une fonction sans avoir besoin de son graphe. Les variations d'une fonction peuvent être résumées à l'aide d'un tableau de variations :



x	-2		0		2
variations de g	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

Définition

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et f une fonction de E dans $\mathbb{R}$.

- f est positive sur $I \subset E$ si et seulement si :

$$\forall x \in I, f(x) \geq 0$$

- f est strictement positive sur $I \subset E$ si et seulement si :

$$\forall x \in I, f(x) > 0$$

- f est négative sur $I \subset E$ si et seulement si :

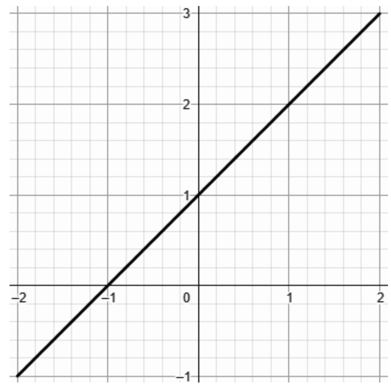
$$\forall x \in I, f(x) \leq 0$$

- f est strictement négative sur $I \subset E$ si et seulement si :

$$\forall x \in I, f(x) < 0$$

Prenons l'exemple de la fonction h définie par :

$$\begin{array}{rccc} h & : & [-2,2] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x+1 \end{array}$$



et dont le graphe est représenté ci-contre. Graphiquement, on constate que la fonction h est négative sur $[-2,-1]$ et positive sur $[-1,2]$. On peut également dire que h est strictement négative sur $[-2,-1[$ et strictement positive sur $]-1,2]$. Le signe d'une fonction peut être récapitulé à l'aide d'un tableau de signe :

x	-2		-1		2
signe de $h(x)$		$-$	0	$+$	

On remarquera que j'ai écrit « signe de $h(x)$ » dans le tableau ci-dessus, alors que j'avais écrit « variations de g » dans le tableau de variations de l'exemple précédent. J'aimerais ici mettre en avant la différence entre f et $f(x)$. f désigne la fonction dans sa globalité, alors que $f(x)$ est un nombre : il s'agit de la valeur prise par la fonction f en x. Par conséquent, il faudra écrire dans les démonstrations « la fonction f » et non pas « la fonction $f(x)$ ». Puisque $f(x)$ est un nombre, il a une valeur constante, et ça n'a donc pas de sens de parler des « variations de $f(x)$ » ; on parlera plutôt des « variations de f ». Par ailleurs, on peut parler du signe d'un nombre ou du signe d'une fonction. Dans le tableau précédent, il serait donc envisageable d'écrire « signe de h » au lieu de « signe de $h(x)$ ». Mais à titre personnel, je préfère parler du « signe de $h(x)$ » pour internaliser la différence fondamentale entre h et $h(x)$.

4. Les fonctions affines

Puisque les fonctions affines sont généralement les premières fonctions que l'on rencontre au cours de notre scolarité, j'aimerais leur consacrer une brève partie.

Définition

Soient E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et a et b deux réels. On appelle fonctions affines les fonctions f de la forme :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array}$$

La courbe représentative d'une fonction affine est une droite et :

- a est appelé **coefficient directeur** de la droite.
- b est appelé **ordonnée à l'origine** de la droite.

Propriété

Soient E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et a et b deux réels. On définit la fonction f par :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array}$$

- La fonction f est strictement croissante si et seulement si $a > 0$.
- La fonction f est strictement décroissante si et seulement si $a < 0$.
- La fonction f est constante si et seulement si $a = 0$.

Démonstration

Soient x_1 et x_2 deux éléments de E tels que $x_1 < x_2$. On a :

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1)$$

Or, $x_2 - x_1 > 0$ par hypothèse, donc :

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow a > 0$$

Finalement, f est croissante si et seulement si $a > 0$.
La démonstration est similaire dans le cas où f est décroissante.

5. Les fonctions polynomiales du second degré

Définition

Soient E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et a, b et c trois réels avec $a \neq 0$. On appelle fonctions polynômiales de degré 2 les fonctions f de la forme :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^2+bx+c \end{array}$$

Les courbes représentatives de ces fonctions sont appelées des **paraboles**.

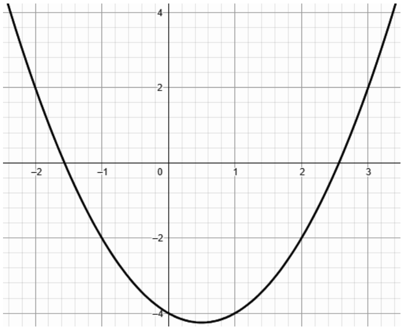
Remarque : Dans la définition précédente, il est important de garder à l'esprit que le coefficient a doit être non nul pour parler de fonction polynomiale du second degré.

Propriété

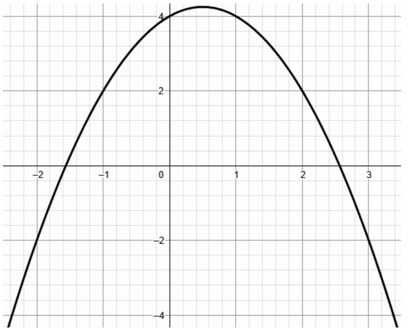
Soient E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et a, b et c trois réels avec $a \neq 0$. Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^2 + bx + c \end{array}$$

- Si $a > 0$, la courbe représentative de f est une parabole orientée vers le haut.
- Si $a < 0$, la courbe représentative de f est une parabole orientée vers le bas.



$a > 0$



$a < 0$

Définition

Soient E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et a, b et c trois réels avec $a \neq 0$. Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^2 + bx + c \end{array}$$

On appelle discriminant de f le réel Δ défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Propriété

Soient E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et a, b et c trois réels avec $a \neq 0$. Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^2 + bx + c \end{array}$$

Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dépend du signe du discriminant de f noté Δ :

- Si $\Delta > 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution réelle, appelée **racine double** :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution réelle.

Remarques :

- Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont appelées « racines » du polynôme.
- Cette méthode permet de trouver facilement (si elles existent) les racines d'un polynôme du second degré. Mais ça n'est pas toujours le moyen le plus rapide de les déterminer. En effet, certains polynômes admettent ce que l'on appelle des « racines évidentes », c'est-à-dire des racines qui peuvent se trouver rapidement en un coup d'œil. Plutôt que de se lancer directement dans la méthode de résolution avec le discriminant, j'invite le lecteur à regarder dans un premier temps si 0, 1, -1, 2 et -2 ne seraient pas racines du polynôme étudié. Au début, cela vous paraîtra certainement assez long (d'autant plus que si cette méthode n'est pas concluante, il faudra de toute façon passer par le discriminant), mais avec de l'entraînement, on peut gagner un temps précieux et faire très bonne impression auprès d'un jury. Cela est d'autant plus vrai qu'une fois que l'on connaît une racine, il est très rapide de trouver la seconde (nous verrons la méthode dans un instant).

Définition

Soit f une fonction polynomiale du second degré définie sur $\mathbb{R}$.

- Il existe trois réels a, b et c tels que $a \neq 0$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$$

  Cette forme est appelée « forme développée ».

- En posant $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x - \alpha)^2 + f(\alpha)$$

  Cette forme est appelée « forme canonique ».

- Dans le cas où l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions distinctes, notées x_1 et x_2, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

  Dans le cas où l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution, notée x_0, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x - x_0)^2$$

  Dans les deux cas, cette forme est appelée « forme factorisée ».

Remarques :

- A partir de la forme canonique d'un polynôme, on peut trouver les coordonnées de son sommet, qui sont $(\alpha, f(\alpha))$. Ce sommet peut être un minimum ou un maximum.
- Si l'on développe la forme factorisée, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

En égalisant cette expression avec la forme développée, on déduit que :

$$c = ax_1x_2$$

Ainsi, si l'on connaît une racine non nulle du polynôme, on peut trouver la seconde en écrivant :

$$x_2 = \frac{c}{ax_1}$$

6. Parité et périodicité

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- f est dite paire si et seulement si :

$$\forall x \in I, -x \in I \text{ et } f(-x) = f(x)$$

- f est dite impaire si et seulement si :

$$\forall x \in I, -x \in I \text{ et } f(-x) = -f(x)$$

Remarques :

- Les fonctions cos et sin sont respectivement paire et impaire.
- La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Définition

Soient $T \in \mathbb{R}^*$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. f est dite T-périodique si et seulement si :

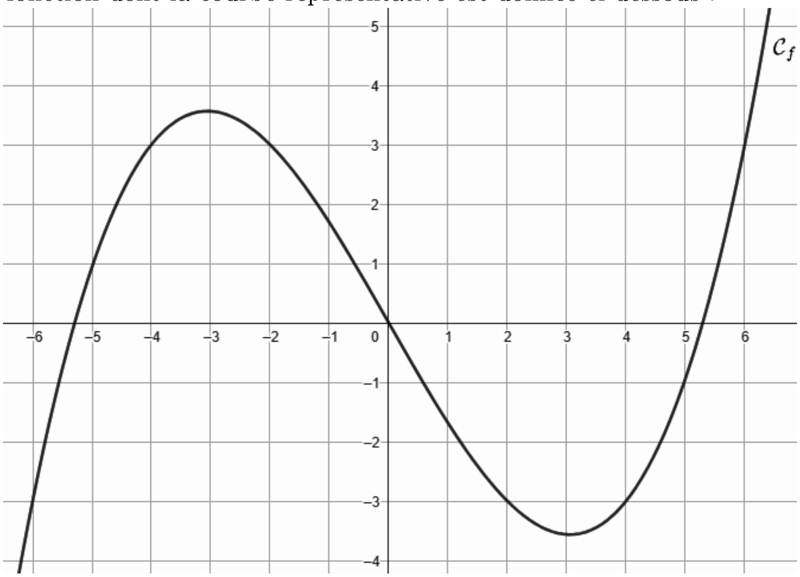
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$$

Remarque : La courbe représentative d'une fonction T-périodique est constituée d'un motif élémentaire de longueur T qui se répète indéfiniment.

Exercices

Exercice 1

Soit f une fonction dont la courbe représentative est donnée ci-dessous :



Compléter les phrases suivantes à partir de la figure précédente :

1. L'image de 0 par la fonction f est ... .
2. Les ... de 3 par la fonction f sont -4, -2 et 6.
3. 2 et 4 ont pour ... -3.
4. Un ... de -1 par f est 5.

Exercice 2

Soit f, g et h les fonctions définies par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x-3)(x+2) \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{-1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x-2}{x+1} \end{array}$$

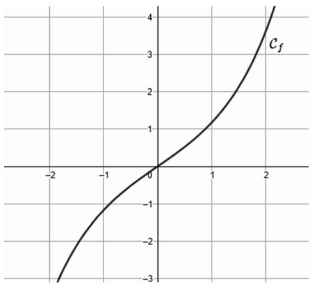
$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x+9} \end{array}$$

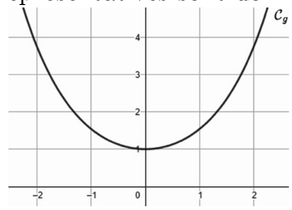
1. Calculer $f(0)$, $f(-3)$, $g(3)$, $g(1)$, $h(9)$ et $h(4)$.
2. Résoudre les équations suivante :

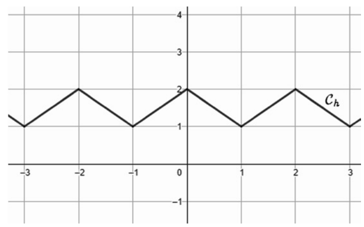
$$f(x) = 0\,;\ g(x) = 5\,;\ h(x) = 5$$

Exercice 3

Soient f, g et h trois fonctions dont les courbes représentatives sont données ci-dessous :







Identifier parmi ces trois fonctions laquelle est périodique, laquelle est paire et laquelle est impaire.

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes sur I :

1. $x^2 + 3x - 1 = 0$, $I = \mathbb{R}$
2. $x^2 - 2x = -1$, $I = \mathbb{R}$
3. $2x^2 + 6x = -4$, $I = \mathbb{R}$
4. $3x^2 - 8x + 12 = 0$, $I = \mathbb{R}$
5. $2x^2 + 8x + 8 = 0$, $I = \mathbb{R}$
6. $-x^2 - 3x = 3$, $I = \mathbb{R}$
7. $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$, $I = \mathbb{R}$
8. $3x - 3\sqrt{x} = 6$, $I = \mathbb{R}_+$
9. $x + \dfrac{1}{x} = 3$, $I = \mathbb{R}^*$

Exercice 5

1. Soit f la fonction définie par :

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x - 8 \end{array}$$

Déterminer la forme canonique et la forme factorisée de f.

2. Soit g la fonction définie par :

$$g \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x-2)^2 - 1 \end{array}$$

Déterminer la forme développée et la forme factorisée de g.

3. Soit h la fonction définie par :

$$h \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2(x+2)(x-4) \end{array}$$

Déterminer la forme développée et la forme canonique de h.

Exercice 6

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 4x^2 - 8x - 5 \end{array}$$

1. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole représentative de f.
2. En déduire le tableau de variations de f.
3. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
4. En déduire le tableau de signe de f.

Exercice 7

Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

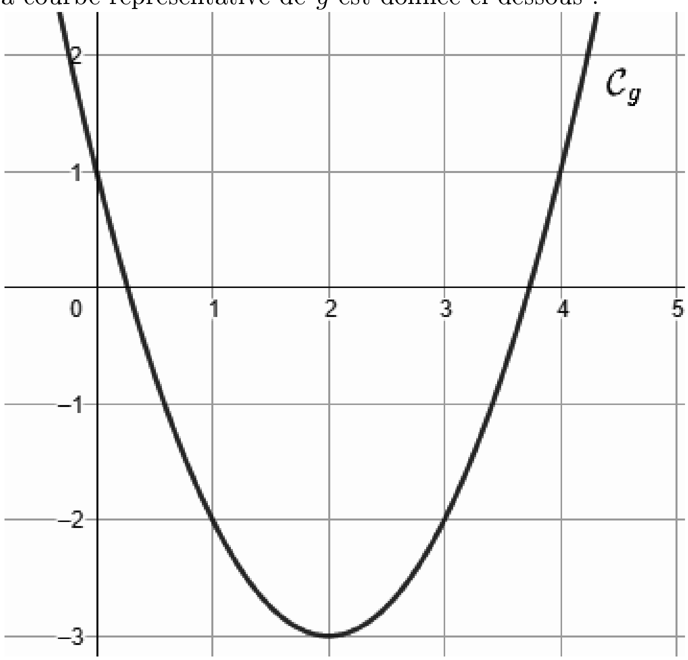
1. $x^2 - 3x + 2 \geq 0$
2. $x^2 + x + 1 \leq 0$
3. $x^2 + x + 2 > 0$
4. $-2x^2 + 8x < 8$
5. $-x^2 - 3x + 1 < 0$
6. $-2x^2 - 5x + 3 \geq 0$

Exercice 8

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de f sachant qu'il s'agit d'une fonction polynomiale du second degré et que :

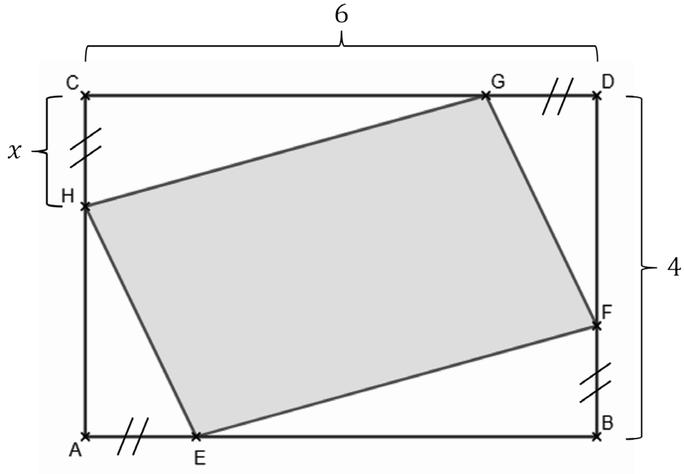
$$f(-1) = 5\,;\ f(1) = -5\,;\ f(2) = -1$$

2. Soit g une fonction polynomiale du second degré définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de g sachant que la courbe représentative de g est donnée ci-dessous :



Exercice 9

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 6$ cm et $AC = 4$ cm. On note E, F, G et H les points appartenant respectivement à $[AB]$, $[BD]$, $[DC]$ et $[CA]$ et tels que $AE = BF = DG = CH = x$. Enfin, on note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du quadrilatère $EFGH$, exprimée en cm^2.



1. Déterminer l'ensemble de définition de $\mathcal{A}$.
2. Démontrer que :
$$\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 10x + 24$$
3. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire de $EFGH$ vaut exactement 16 cm^2.
4. Déterminer la valeur de x pour laquelle $\mathcal{A}$ est minimale, et préciser la valeur de $\mathcal{A}$ correspondante.
5. Déterminer le tableau de variations de $\mathcal{A}$.
6. En déduire l'aire maximale de $EFGH$.

Exercice 10

Une entreprise fabrique chaque jour x pots en céramique avec $x \in [0, 80]$. On considère que le coût de production, exprimé en euros, vaut :
$$C(x) = x^2 - 30x + 250$$

1. Déterminer le coût pour produire 30 pots en céramique.
2. Chaque pot est vendu à un prix de 26 €. Déterminer l'expression de la recette de l'entreprise, notée R, en fonction de x.
3. Justifier que le bénéfice de l'entreprise pour la production et la vente de x pots est donnée, pour tout $x \in [0, 80]$, par :
$$B(x) = -x^2 + 56x - 250$$
4. Déterminer les valeurs de x permettant à l'entreprise d'être rentable, c'est-à-dire d'avoir un bénéfice strictement positif.
5. Dresser le tableau de variations de B sur $[0, 80]$.
6. En déduire la valeur de x pour laquelle le bénéfice est maximal. Quelle est la valeur de ce bénéfice ?

Corrigés

Exercice 1

1. L'image de 0 par la fonction f est 0.
2. Les antécédents de 3 par la fonction f sont -4, -2 et 6.
3. 2 et 4 ont pour image -3.
4. Un antécédent de -1 par f est 5.

Exercice 2

1. On a :
$$f(0) = (0-3)(0+2) = -3 \times 2 = -6$$
$$f(-3) = (-3-3)(-3+2) = -6 \times (-1) = 6$$
$$g(3) = \frac{3-2}{3+1} = \frac{1}{4}$$
$$g(1) = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$$
$$h(9) = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
$$h(4) = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$
2. On a les équivalences suivantes :
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x-3 = 0 \text{ ou } x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -2$$
Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont $\{-2, 3\}$.
Par ailleurs, on a :
$$g(x) = 5 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+1} = 5 \Leftrightarrow x-2 = 5(x+1) \Leftrightarrow -4x = 7 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{4}$$
Ainsi, l'unique solution de l'équation $g(x) = 5$ est $-\frac{7}{4}$.
Enfin, on a :
$$h(x) = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x+9} = 5 \Leftrightarrow x+9 = 25 \Leftrightarrow x = 16$$
L'unique solution de l'équation $h(x) = 5$ est 16.

Exercice 3

La courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère, donc la fonction f est impaire.
La courbe $\mathcal{C}_g$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc la fonction g est paire.
La courbe $\mathcal{C}_h$ est constituée d'un motif qui se répète régulièrement, donc la fonction h est périodique.

Exercice 4

1. Le discriminant du polynôme étudié est $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 13$. Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :
$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$$
2. On a :
$$x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$
Le discriminant du polynôme étudié est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$. Comme Δ est nul, l'équation admet une seule solution réelle :
$$x_0 = \frac{2}{2} = 1$$
Remarque : On pouvait également remarquer l'identité remarquable et en déduire que l'équation se ramène à $(x - 1)^2 = 0$.
3. On a :
$$2x^2 + 6x = -4 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x + 4 = 0$$
Le discriminant du polynôme étudié est $\Delta = 6^2 - 4 \times 2 \times 4 = 4$. Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :
$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{4}}{4} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-6 + \sqrt{4}}{4} = -1$$
4. Le discriminant du polynôme étudié est $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 3 \times 12 = -80$. Comme $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution réelle.
5. Le discriminant du polynôme étudié est $\Delta = 8^2 - 4 \times 2 \times 8 = 0$. Comme Δ est nul, l'équation admet une seule solution réelle :
$$x_0 = \frac{-8}{4} = -2$$
6. On a :
$$-x^2 - 3x = 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 3 = 0$$
Le discriminant du polynôme étudié est $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3$. Comme $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution réelle.
7. En posant $X = x^2$, on obtient l'équation suivante :
$$X^2 + 3X + 2 = 0$$
Le discriminant du polynôme étudié est $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$. Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :
$$X_1 = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2} = -2 \text{ et } X_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2} = -1$$
Comme $X = x^2$, on en déduit que :
$$x^2 = -2 \text{ ou } x^2 = -1$$
Or, comme le carré d'un réel est toujours positif, on en conclut que l'équation n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.

8. En posant $X = \sqrt{x}$, on obtient l'équation suivante :

$$3X^2 - 3X = 6 \Leftrightarrow 3X^2 - 3X - 6 = 0$$

Le discriminant du polynôme étudié est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 3 \times (-6) = 81$. Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{3 - \sqrt{81}}{6} = -1 \text{ et } X_2 = \frac{3 + \sqrt{81}}{6} = 2$$

Comme $X = \sqrt{x}$, on en déduit que :

$$\sqrt{x} = -1 \text{ ou } \sqrt{x} = 2$$

Or, la racine d'un réel est toujours positive, et on en conclut que l'unique solution de l'équation sur $\mathbb{R}_+$ est 4.

9. On a :

$$x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

Le discriminant du polynôme étudié est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5$. Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Exercice 5

1. Il est possible de déterminer la forme canonique d'un polynôme du second degré de deux manières différentes :
   - La première méthode consiste à appliquer la formule du cours, en sachant que l'abscisse du sommet de la parabole est donnée par :

   $$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$$

   Par ailleurs, on a $f(-1) = -9$. On en conclut que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x+1)^2 - 9$$

   - La seconde méthode consiste à reconnaître le début d'une identité remarquable à partir de $x^2 + 2x$ et de corriger ensuite par le terme en dehors du carré. Dans le cas présent, $x^2 + 2x$ est le début de l'identité remarquable $(x+1)^2$, mais si l'on développe ce carré, on récupère un 1 en trop. Pour arriver au -8 de la fonction initiale, il faut donc soustraire 9 et on retrouve l'expression obtenue précédemment :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x+1)^2 - 9$$

   Déterminons désormais la forme factorisée de f. On a $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 36$. Comme $\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines réelles distinctes :

   $$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2} = -4 \text{ et } x_2 = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2} = 2$$

   On en déduit :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x+4)(x-2)$$

Corrigés

2. Déterminons d'abord la forme développée de g. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 1 = x^2 - 4x + 3$$

Le discriminant du polynôme est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$. Comme $\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{4-\sqrt{4}}{2} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{4+\sqrt{4}}{2} = 3$$

On en déduit la forme factorisée de g :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = (x-1)(x-3)$$

3. Déterminons d'abord la forme développée de h. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 2(x+2)(x-4) = 2x^2 - 4x - 16$$

Déterminons désormais la forme canonique de h. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 2x^2 - 4x - 16 = 2(x^2 - 2x - 8) = 2\left((x-1)^2 - 9\right) = 2(x-1)^2 - 18$$

Exercice 6

1. L'abscisse x_S du sommet de la parabole de f est donnée par :

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{8} = 1$$

Par ailleurs, on a $f(1) = -9$. Ainsi, les coordonnées du sommet de la parabole de f sont $(1; -9)$.

2. Le coefficient dominant de f est positif, donc la parabole est orientée vers le haut. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
variations de f		$\searrow$	-9	$\nearrow$	

3. Le discriminant du polynôme associé à f est $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 144$. Comme $\Delta > 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{8-\sqrt{144}}{8} = -\frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{8+\sqrt{144}}{8} = \frac{5}{2}$$

4. On déduit des questions précédentes le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 7

1. Commençons par résoudre l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$. Le discriminant associé au polynôme est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$. Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2$$

Comme le coefficient dominant du polynôme est positif, sa parabole représentative est orientée vers le haut, et on en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
signe de $x^2 - 3x + 2$		+	0	$-$	0	+	

Par conséquent, les solutions de l'inéquation sont $]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.

2. Commençons par résoudre l'équation $x^2 + x + 1 = 0$. Le discriminant associé au polynôme est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$. Comme $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution réelle. Comme le coefficient dominant du polynôme est positif, sa parabole représentative est orientée vers le haut, et on en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $x^2 + x + 1$		+	

Par conséquent, l'inéquation n'admet pas de solutions sur $\mathbb{R}$.

3. Commençons par résoudre l'équation $x^2 + x + 2 = 0$. Le discriminant associé au polynôme est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7$. Comme $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution réelle. Comme le coefficient dominant du polynôme est positif, sa parabole représentative est orientée vers le haut, et on en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $x^2 + x + 2$		+	

Par conséquent, l'inéquation est toujours vérifiée sur $\mathbb{R}$.

4. On a :

$$-2x^2 + 8x < 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 8 > 0$$

Commençons par résoudre l'équation $2x^2 - 8x + 8 = 0$. Le discriminant associé au polynôme est $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 0$. Comme Δ est nul, l'équation admet une unique solution réelle :

$$x_0 = \frac{8}{4} = 2$$

Corrigés

Comme le coefficient dominant du polynôme est positif, sa parabole représentative est orientée vers le haut, et on en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $2x^2-8x+8$		$+$	0	$+$	

Par conséquent, les solutions de l'inéquation sont $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$, autrement dit $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

5. Commençons par résoudre l'équation $-x^2 - 3x + 1 = 0$. Le discriminant associé au polynôme est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 13$. Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :
$$x_1 = \frac{3-\sqrt{13}}{-2} = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{-2} = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$$
Comme le coefficient dominant du polynôme est négatif, sa parabole représentative est orientée vers le bas, et on en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$		$+\infty$
signe de x^2-3x+2		$-$	0	$+$	0	$-$	

Par conséquent, les solutions de l'inéquation sont :
$$\left]-\infty, \frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right[\cup \left]\frac{-3+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right[$$

6. Commençons par résoudre l'équation $f(x) = 0$ avec $f(x) = -2x^2 - 5x + 3$. Le discriminant associé au polynôme est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 49$. Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :
$$x_1 = \frac{5-\sqrt{49}}{-4} = \frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{5+\sqrt{49}}{-4} = -3$$
Comme le coefficient dominant du polynôme est négatif, sa parabole représentative est orientée vers le bas, et on en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Par conséquent, les solutions de l'inéquation sont $\left[-3, \frac{1}{2}\right]$.

Exercice 8

1. Comme f est une fonction polynomiale de degré 2, il existe trois réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$$

On en déduit donc :

$$\begin{cases} f(-1) &= 5 \\ f(1) &= -5 \\ f(2) &= -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c &= 5 \\ a + b + c &= -5 \\ 4a + 2b + c &= -1 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_1]{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{cases} a + c &= 0 \\ b &= -5 \\ 4a + c &= 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c &= -a \\ b &= -5 \\ 3a &= 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c &= -3 \\ b &= -5 \\ a &= 3 \end{cases}$$

Finalement, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - 5x - 3$$

2. On constate sur le graphe que les coordonnées du sommet de la parabole de g sont $(2; -3)$. Ainsi, il existe un réel a tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = a(x-2)^2 - 3$$

Par ailleurs, on remarque que $g(0) = 1$ et :

$$g(0) = 1 \Leftrightarrow 4a - 3 = 1 \Leftrightarrow a = 1$$

Finalement, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = (x-2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1$$

Exercice 9

1. La fonction $\mathcal{A}$ est définie sur $[0, 4]$.
2. L'aire du quadrilatère $EFGH$ est obtenue en soustrayant les aires des triangles AEH, EBF, GDF et CHG à l'aire du rectangle $ABCD$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 4], \mathcal{A}(x) &= 24 - \frac{x(4-x)}{2} - \frac{x(6-x)}{2} - \frac{x(4-x)}{2} - \frac{x(6-x)}{2} \\ &= 24 - x(4-x) - x(6-x) \\ &= 2x^2 - 10x + 24 \end{aligned}$$

3. Il s'agit de résoudre l'équation suivante :

$$\mathcal{A}(x) = 16 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 24 = 16 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0$$

Corrigés

Le discriminant du polynôme est $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 36$. Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{10 - \sqrt{36}}{4} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{10 + \sqrt{36}}{4} = 4$$

Les deux solutions obtenues appartiennent bien au domaine de définition de $\mathcal{A}$, et on en conclut que l'aire de $EFGH$ vaut 16 cm² si et seulement si x vaut 1 ou 4.

4. Le coefficient dominant de $\mathcal{A}$ est positif, ce qui implique que la parabole représentative de $\mathcal{A}$ est orientée vers le haut. Ainsi, son sommet correspond à un minimum. Déterminons l'abscisse x_S du sommet de la parabole représentative de $\mathcal{A}$, donnée par :

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$\frac{5}{2}$ appartient bien au domaine de définition de $\mathcal{A}$, et on en déduit que l'aire de $EFGH$ est minimale lorsque $x = \frac{5}{2}$. De plus :

$$\mathcal{A}\left(\frac{5}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 10 \times \frac{5}{2} + 24 = \frac{25}{2} - 25 + 24 = \frac{23}{2}$$

5. On déduit des questions précédentes le tableau suivant :

x	0		$\frac{5}{2}$		4
variations de $\mathcal{A}$	24	$\searrow$	$\frac{23}{2}$	$\nearrow$	16

6. La question précédente permet de conclure que l'aire de $EFGH$ est maximale lorsque $x = 0$. $\mathcal{A}$ vaut alors 24. En effet, si $x = 0$, les rectangles $ABCD$ et $EFGH$ sont confondus, et ils ont donc la même aire.

Exercice 10

1. On a :

$$C(30) = 30^2 - 30 \times 30 + 250 = 250$$

La production de 30 pots en céramique coûte 250€ à l'entreprise.

2. On a :

$$\forall x \in [0, 80], R(x) = 26x$$

3. On a :

$$\forall x \in [0, 80], B(x) = R(x) - C(x) = 26x - (x^2 - 30x + 250) = -x^2 + 56x - 250$$

4. Commençons par résoudre l'équation :

$$B(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 56x - 250 = 0$$

Le discriminant associé au polynôme est $\Delta = 56^2 - 4 \times (-1) \times (-250) = 2136$. Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-56 - \sqrt{2136}}{-2} \approx 51,1 \text{ et } x_2 = \frac{-56 + \sqrt{2136}}{-2} \approx 4,9$$

Le coefficient dominant du polynôme étant négatif, sa parabole est orientée vers le bas, et on en déduit le tableau de signe suivant :

x	0		x_2		x_1		80
signe de $B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, l'entreprise réalise un bénéfice positif lorsqu'elle produit et vend entre 5 et 51 pots en céramique.

5. L'abscisse x_S du sommet de la parabole est donnée par :

$$x_S = \frac{-56}{-2} = 28$$

Par ailleurs :

$$B(28) = -28^2 + 56 \times 28 - 250 = 534$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		28		80
variations de B	-250	$\nearrow$	534	$\searrow$	-2170

6. L'entreprise réalise un bénéfice maximal lorsqu'elle produit et vend 28 pots en céramique. Son bénéfice vaut alors 534€.

Chapitre 3

Dérivation

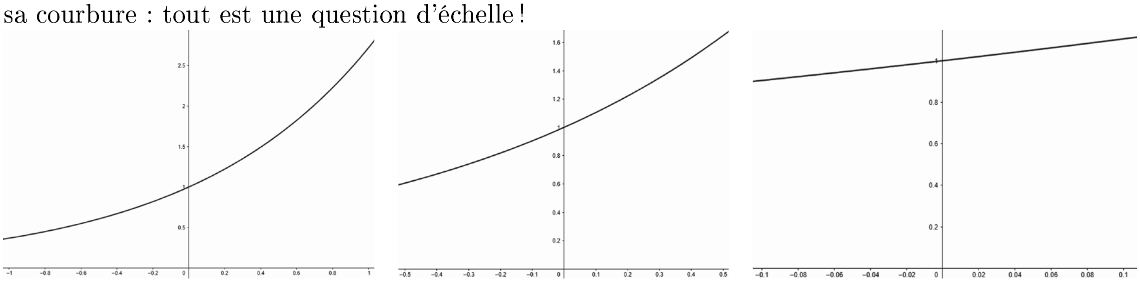
Cours

1. Préambule

En mathématiques, les fonctions peuvent avoir des allures et des propriétés diverses et variées. Je pense néanmoins que l'on peut s'accorder à dire que les fonctions les plus simples sont les fonctions affines, c'est-à-dire les fonctions de la forme :

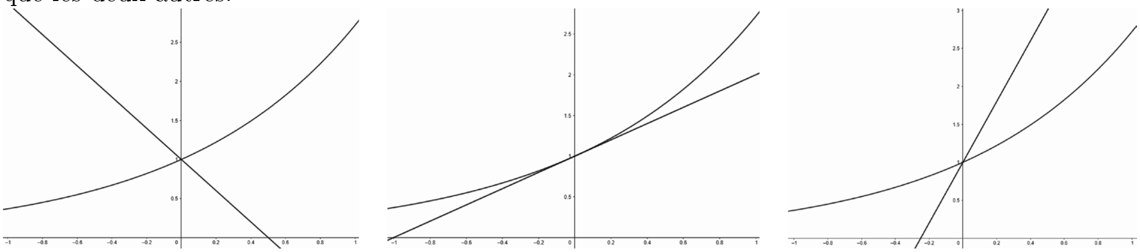
$$f(x) = ax + b, \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

En effet, les courbes représentatives de ces fonctions sont des droites, et on peut difficilement faire plus simple qu'une droite. Le problème est que dans la majorité des cas, les fonctions que l'on étudie ne sont pas des fonctions affines, et ont des courbes représentatives qui ne sont donc pas des droites. Pourtant, si l'on « zoome » suffisamment sur la courbe d'une fonction, elle va finir par ressembler à une droite, et à partir d'un certain moment, on ne parviendra même plus à distinguer sa courbure : tout est une question d'échelle !



L'image du milieu et de droite correspondent approximativement au grossissement d'un facteur 2 et 10 de l'image de gauche. Ainsi, en grossissant l'image d'un facteur 10, on passe d'une courbure évidente à une courbure quasiment indistinguable. Dès lors, on peut raisonnablement envisager d'approximer localement (c'est-à-dire sur un petit intervalle) une courbe par une droite.

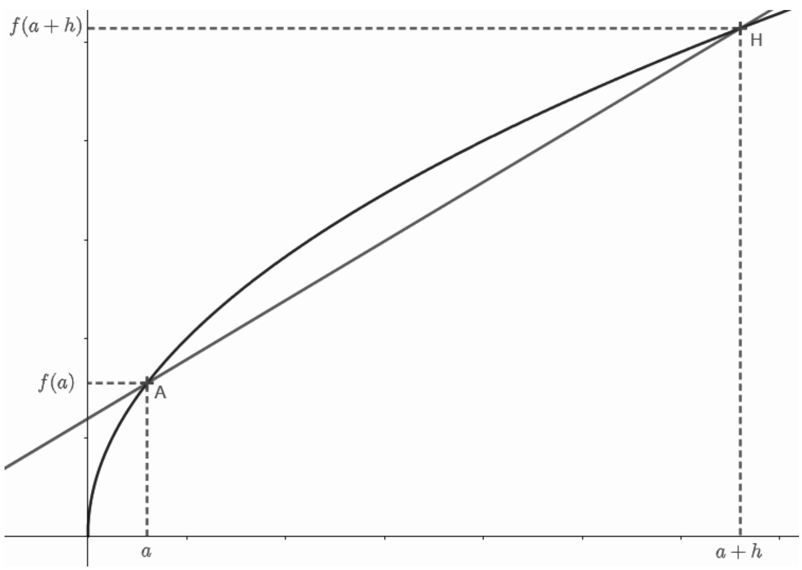
A ce stade, la question qui vient naturellement est : comment choisir la droite qui approxime le mieux la courbe considérée ? Intuitivement, on choisirait certainement la droite qui épouse la courbure de la courbe au niveau du point en lequel on se place. Nous pouvons certainement nous accorder sur le fait que, sur l'image ci-dessous, l'approximation du milieu semble plus satisfaisante que les deux autres.



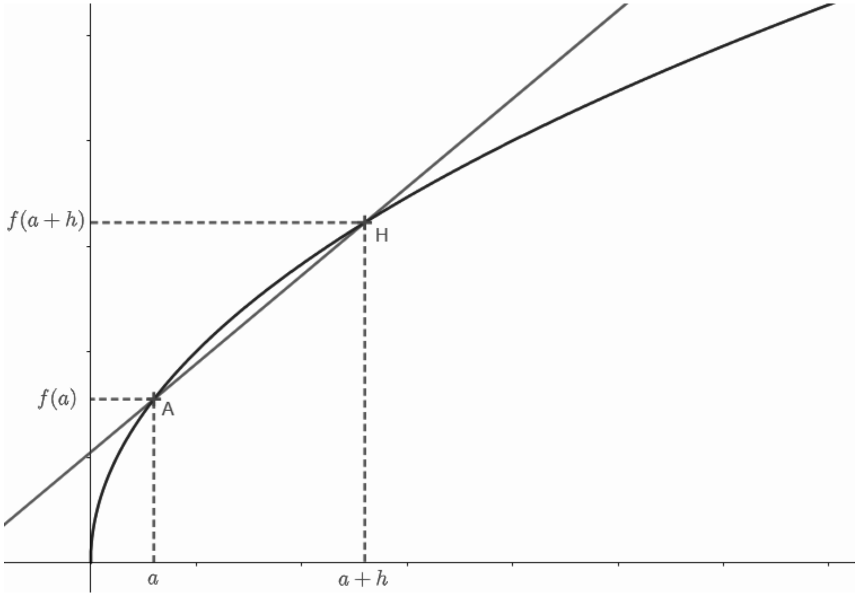
Si ce que nous venons de voir vous semble assez logique, alors vous avez compris l'idée qui se cache derrière la dérivation. Dans la suite de ce chapitre, nous verrons comment formaliser ces idées.

2. Taux d'accroissement et nombre dérivé

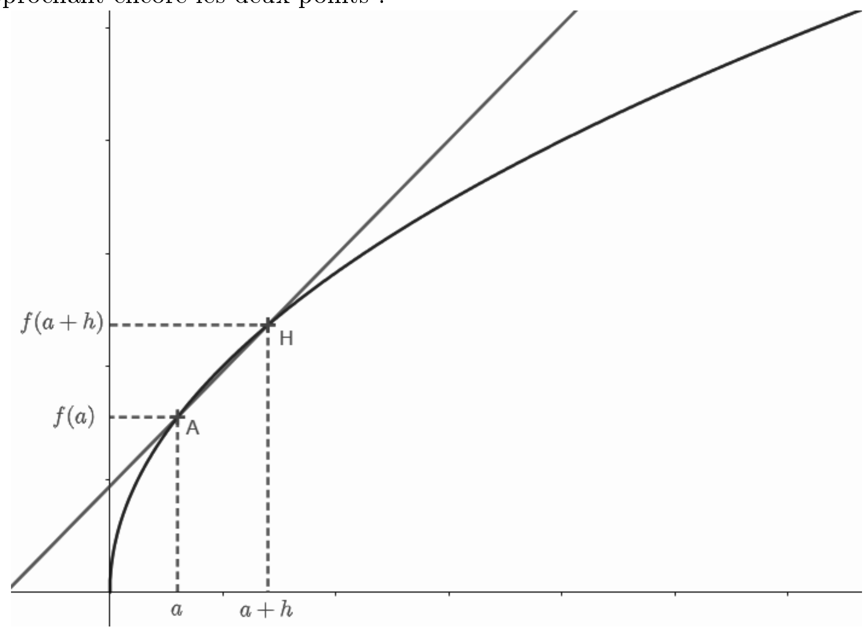
Considérons une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Comme expliqué précédemment, l'une des idées liée à la dérivation est d'approcher localement, par exemple au point d'abscisse $a \in I$, la courbe représentative de f par une droite, la difficulté étant de déterminer la meilleure droite possible pour répondre à ce problème. En première approximation, il est possible de choisir la droite passant par le point d'abscisse a et un autre point, par exemple d'abscisse $a + h$ avec $h \in \mathbb{R}_+^*$:



Cependant, cette droite ne semble pas très satisfaisante pour approximer la courbe. Une idée pour obtenir une meilleure approximation serait de rapprocher le point H de A (autrement dit, de diminuer h) :



La nouvelle droite semble être une meilleure candidate, mais on se doute que l'on peut mieux faire en rapprochant encore les deux points :



Vous l'aurez sans doute compris : plus on diminuera la valeur de h, et par conséquent plus on rapprochera le point H du point A, plus la droite (AH) sera proche de l'idée que l'on se fait de « la meilleure droite approximant la courbe de f en a ».

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$. Si $a + h \in I$, on appelle taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ le nombre :

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque : Le taux d'accroissement ainsi définie correspond au coefficient directeur de la droite (AH) sur les figures précédentes. En effet le coefficient directeur de (AH) s'obtient par :

$$\frac{y_H - y_A}{x_H - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a + h - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \tau_a(h)$$

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a + h \in I$. Si le taux d'accroissement de la fonction f entre a et $a + h$ tend vers un nombre réel quand h tend vers 0, on dit que f est dérivable en a. Dans ce cas, la limite du taux d'accroissement quand h tend vers 0 est appelé nombre dérivé de f en a et est noté $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarques :

- Un chapitre entier sera consacré aux limites de fonctions. A ce stade, vous pouvez retenir que pour déterminer la limite de $\tau_a(h)$ quand h tend vers 0, il suffit de remplacer h par 0 dans l'expression de $\tau_a(h)$.
- D'après ce que l'on a dit précédemment le nombre dérivé de f en a, s'il est bien défini, correspond à la pente locale de f au point d'abscisse a.
- $f'(a)$ se lit « f prime de a ».

3. Calcul de dérivées

Définition

Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I.

Le tableau ci-dessous récapitule les dérivées usuelles, qu'il est impératif de connaître parfaitement :

Domaine de validité	**Fonction f**	**Dérivée f'**
$\mathbb{R}$	$k,\ k \in \mathbb{R}$	0
$\mathbb{R}$	x	1
$\mathbb{R}$	x^2	$2x$
$\mathbb{R}$	$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Démonstration

Nous ne démontrerons pas toutes les formules du tableau ci-dessus, car cela deviendrait rapidement répétitif. Nous ne démontrerons que trois des neuf résultats.

i. On considère la fonction :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Soit $h > 0$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tau_x(h) = \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

On en déduit :

$$\lim_{h \to 0} \tau_x(h) = 2x$$

Finalement, on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1'(x) = 2x$$

ii. On considère la fonction :

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Soit $h > 0$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \tau_x(h) = \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{-h}{hx(x+h)} = \frac{-1}{x(x+h)}$$

On en déduit :

$$\lim_{h \to 0} \tau_x(h) = -\frac{1}{x^2}$$

Finalement, on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f_2'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

iii. On considère la fonction :

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Soit $h > 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \tau_x(h) = \frac{f_3(x+h) - f_3(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
&= \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{h \to 0} \tau_x(h) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Finalement, on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Remarque : Un chapitre entier sera consacré aux fonctions exponentielle et logarithme népérien, mais j'ai d'ores et déjà indiqué les dérivées de ces deux fonctions dans le tableau précédent pour qu'il soit complet et utilisable *a posteriori*.

Propriété

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient f une fonction définie sur I et à valeurs dans J, et g une fonction définie sur J. Soit $x \in I$. Si f est dérivable au point d'abscisse x et si g est dérivable au point d'abscisse $f(x)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x et :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x))$$

Les fonctions que l'on rencontre ne sont généralement pas aussi simples que celles présentées dans le tableau précédent. Le plus souvent, on s'intéresse à des fonctions qui font intervenir plusieurs fonctions de référence. La propriété ci-dessus permet de généraliser les résultats vus précédemment :

u **à valeurs dans**	**Fonction** f	**Dérivée** f'
$\mathbb{R}$	$u^n,\ n \in \mathbb{N}$	$nu'u^{n-1}$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\mathbb{R}$	$\sin u$	$u' \cos u$
$\mathbb{R}$	$\cos u$	$-u' \sin u$
$\mathbb{R}$	e^u	$u' \mathrm{e}^u$
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$

Remarque : Si l'on considère $u(x) = x$, on retrouve les résultats présentés plus tôt.

Propriété

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et u et v deux fonctions dérivables sur I.

i. La fonction $u + v$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, (u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$$

ii. Pour tout réel k, la fonction ku est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, (ku)'(x) = ku'(x)$$

iii. La fonction uv est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

iv. Si de plus la fonction v ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, \left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

Remarque : On veillera à connaître parfaitement ces résultats pour éviter de sortir des monstruosités telles que ~~« la dérivée d'un produit est le produit des dérivées »~~ ou encore ~~« la dérivée d'un quotient est le quotient des dérivées »~~.

4. Dérivée et sens de variations

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $J \subset I$.
- f est croissante sur J si et seulement si f' est positive sur J.
- f est strictement croissante sur J si et seulement si f' est strictement positive sur J.
- f est décroissante sur J si et seulement si f' est négative sur J.
- f est strictement décroissante sur J si et seulement si f' est strictement négative sur J.
- f est constante sur J si et seulement si f' est nulle sur J.

Remarques :
- Ce résultat établit un lien entre une fonction et sa dérivée. **Le seul lien qui existe entre une fonction et sa dérivée est entre les variations de la première et le signe de la seconde. Il n'y a aucun lien entre les variations d'une fonction et les variations de sa dérivée. Il n'y a aucun lien entre le signe d'une fonction et le signe de sa dérivée.**
- Lorsque l'on demandera d'étudier les variations d'une fonction dont l'expression est explicitement donnée, il faudra toujours penser à étudier le signe de sa dérivée.

Même si la démonstration formelle de cette propriété dépasse le cadre du lycée, on peut aisément se convaincre de ce résultat. En effet, nous avons expliqué en début de chapitre que le nombre dérivé (et par extension la dérivée) correspond à la pente locale de la courbe. Si la dérivée est positive, cela signifie que la pente locale de la courbe est positive, et on sait qu'une pente positive correspond à une fonction croissante. De même, si la dérivée est négative, cela signifie que la pente locale de la courbe est négative, et on sait qu'une pente négative correspond à une fonction décroissante. Enfin, si la dérivée est nulle, alors la pente locale de la courbe est nulle, ce qui correspond à une droite horizontale, ou autrement dit à une fonction constante.

5. Tangente d'une fonction en un point

Définition

Soient f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. On appelle tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a la droite passant par le point de coordonnées $(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Remarque : La tangente correspond à la droite qui permet d'approximer le mieux la courbe d'une fonction et dont nous parlions (sans la nommer) au début de ce chapitre.

Propriété

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Démonstration
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. Considérons la droite d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
D'une part, le point $(a; f(a))$ appartient bien à cette droite car $f'(a)(a-a) + f(a) = f(a)$.
D'autre part, on a :

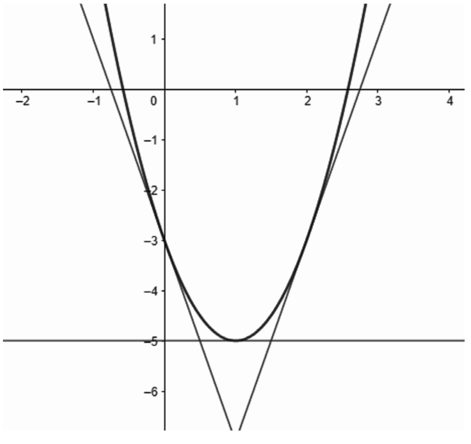
$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \Longleftrightarrow y = f'(a)x - f'(a)a + f(a)$$

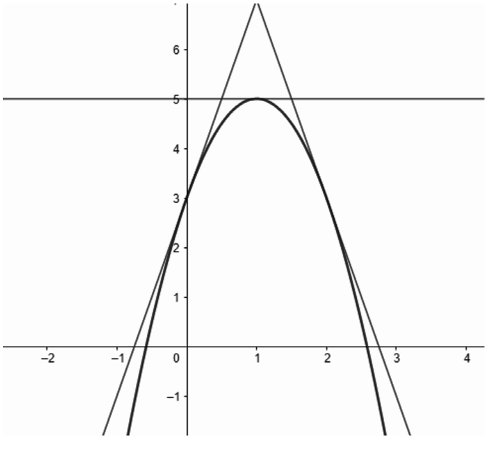
Ainsi, le coefficient directeur de la droite est bien $f'(a)$.
Finalement, la droite considérée est bien la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a telle qu'elle a été définie précédemment.

6. Convexité et concavité

Définition

- Une fonction est convexe sur un intervalle I si et seulement si sa courbe représentative est située au-dessus de chacune de ses tangentes sur cet intervalle (à gauche sur la figure ci-dessous).
- Une fonction est concave sur un intervalle I si et seulement si sa courbe représentative est située en dessous de chacune de ses tangentes sur cet intervalle (à droite sur la figure ci-dessous).





Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Si f' est elle-même dérivable sur I, alors on dit que f est deux fois dérivable et on a :

$$\forall x \in I, f''(x) = \left(f'(x)\right)'$$

Remarques :

- $f''(x)$ se lit « f seconde de x » .
- On peut de la même manière définir la dérivée troisième, la dérivée quatrième, ..., la dérivée n-ème d'une fonction (avec $n \in \mathbb{N}^*$), qui sont respectivement notées $f^{(3)}$, $f^{(4)}$, ..., $f^{(n)}$.

Propriété

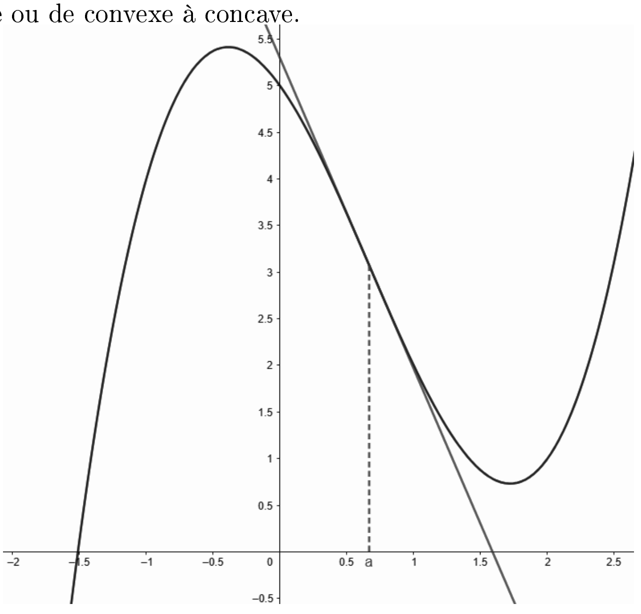
Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I. On a les équivalences suivantes :

$$f \text{ est convexe sur } I \Leftrightarrow \forall x \in I, f''(x) \geq 0$$

$$f \text{ est concave sur } I \Leftrightarrow \forall x \in I, f''(x) \leq 0$$

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que le point d'abscisse $a \in I$ est un point d'inflexion de f si la convexité de f change en ce point, c'est-à-dire qu'elle passe de concave à convexe ou de convexe à concave.



Propriété

Soient f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. Si le point d'abscisse a est un point d'inflexion de f, alors $f''(a) = 0$.

Remarque : J'aimerais attirer votre attention sur le fait que ce résultat est une implication et non pas une équivalence. En effet, étant donnés une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et $a \in I$, il ne suffit pas de dire que $f''(a) = 0$ pour montrer que la fonction f admet un point d'inflexion en a. En effet, d'après la définition d'un point d'inflexion, la convexité de f doit changer en ce point. Par conséquent, il faut que la dérivée seconde de f change de signe en ce point, et montrer que $f''(a) = 0$ n'est donc pas suffisant. En revanche, si f'' change de signe en a, alors on a nécessairement $f''(a) = 0$ (d'où l'implication précédente). Dès lors, on pourra chercher les éventuels points d'inflexion d'une fonction parmi les points en lesquels sa dérivée seconde s'annule.

Exercices

Exercice 1

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes, après avoir justifié qu'elles sont bien dérivables sur l'intervalle de travail.

1. $f_1(x) = x^2 + 3x$, $I = \mathbb{R}$
2. $f_2(x) = \dfrac{3}{x}$, $I = \mathbb{R}^*$
3. $f_3(x) = 2\sqrt{x} + x$, $I = \mathbb{R}_+^*$
4. $f_4(x) = \sin x + \cos x$, $I = \mathbb{R}$
5. $f_5(x) = x^7 + 5x^6 - 3x^3 + 8x^2 - 7x + 10$, $I = \mathbb{R}$

Exercice 2

Après avoir précisé l'intervalle sur lequel elle est dérivable, déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
2. $f_2(x) = (x^2 - 3x)\cos x$
3. $f_3(x) = (3x^3 - 1)^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$
4. $f_4(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1}$
5. $f_5(x) = 2(x^2 + x)\sqrt{x}$
6. $f_6(x) = (2x + 3)^5$
7. $f_7(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{3x^2 + 3x + 1}$

Exercice 3

Après avoir précisé l'intervalle sur lequel elle est dérivable, déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \cos(3x - 1)$
2. $f_2(x) = \sin(\sqrt{x})$
3. $f_3(x) = \sqrt{3x^2 + x}$
4. $f_4(x) = \sin(5x^n)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$
5. $f_5(x) = \sqrt{\dfrac{3x}{x - 1}}$
6. $f_6(x) = \cos((x - 1)\sqrt{x})$

Exercice 4

Dans chacun des cas, déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

1. $f_1(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$, $a = 2$
2. $f_2(x) = \dfrac{x - 1}{2x + 3}$, $a = 0$
3. $f_3(x) = \sqrt{5x + 3}$, $a = 1$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{(x - 3)^3}$, $a = 1$

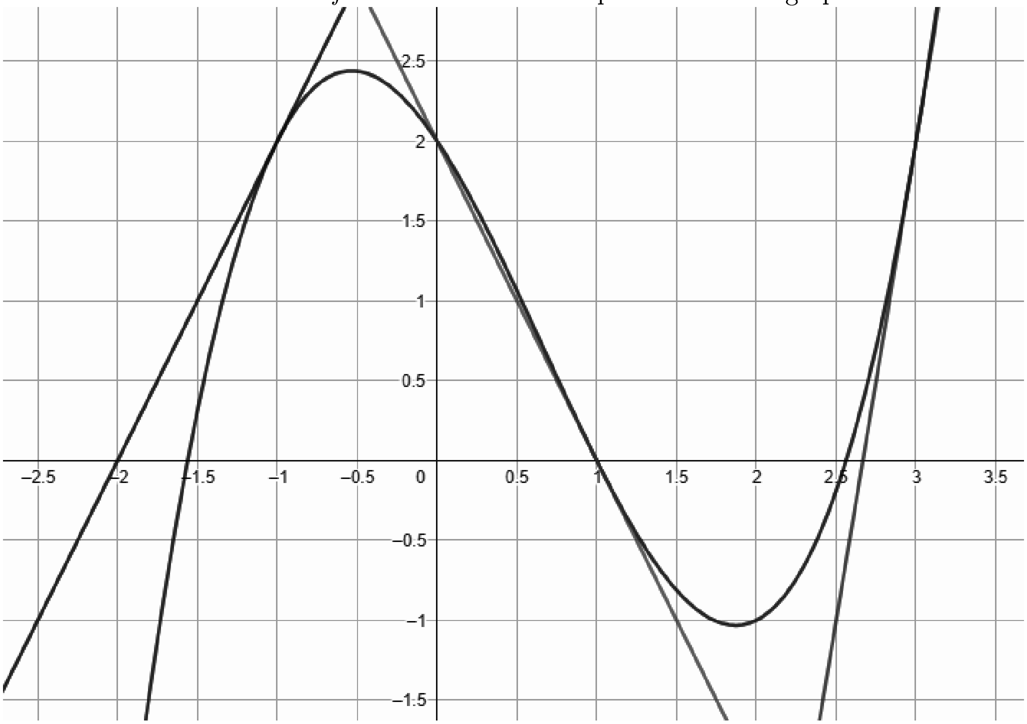
Exercice 5

Déterminer le sens de variations des fonctions suivantes, après avoir préciser leurs domaines de définition respectifs :

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 6x - 3$
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{(x-3)^3}$
3. $f_3(x) = \dfrac{2x-5}{3x+2}$

Exercice 6

On s'intéresse à une fonction f donc la courbe est représentée sur le graphe ci-dessous :



Les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses -1, 1 et 3 ont été représentées sur la figure précédente.

1. Déterminer graphiquement $f'(-1)$, $f'(1)$ et $f'(3)$.
2. En déduire les équations des tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisse -1, 1 et 3.
3. Etablir le tableau de signe de f'. On notera α_1 et α_2 les réels vérifiant $f'(\alpha_1) = f'(\alpha_2) = 0$ et $\alpha_1 < \alpha_2$.
4. La fonction f admet-elle un point d'inflexion ?

Exercice 7

Démontrer que la fonction carrée et la fonction inverse admettent une unique tangente commune sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 8

Déterminer si les fonctions suivantes sont convexes ou concaves sur l'intervalle de travail :

1. $f_1(x) = x^2$, $I = \mathbb{R}$
2. $f_2(x) = \sqrt{x}$, $I = \mathbb{R}_+^*$
3. $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$, $I = \mathbb{R}_-^*$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{x}$, $I = \mathbb{R}_+^*$
5. $f_5(x) = x$, $I = \mathbb{R}$

Exercice 9

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Exercice 10

On considère la fonction f suivante :

$$f \;:\; \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{-x^2+2x-1}{x} \end{array}$$

1. Etudier les variations de f.
2. Déterminer les abscisses des points en lesquels $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale.
3. En quels points la courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle des tangentes dont le coefficient directeur vaut 1 ?
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3.
5. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}_-^*$? sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 11

On s'intéresse à la fonction f définie par :

$$f \;:\; \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

On admet que la fonction f est dérivable une infinité de fois sur $\mathbb{R}^*$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

On rappelle que $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ème de f, c'est-à-dire la fonction obtenue en dérivant successivement n fois la fonction f. On a $f^{(0)} = f$. Enfin, $n!$ désigne la factorielle de n et :

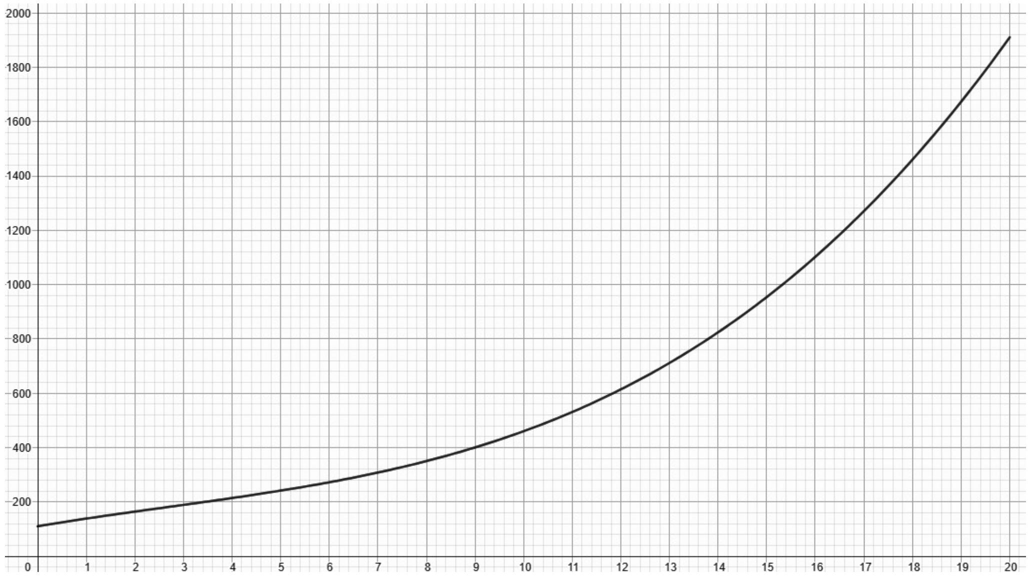
$$n! = 1 \times 2 \times ... \times (n-1) \times n$$

Exercice 12

On s'intéresse à la production de meubles dont le coût total de production est donné, pour $x \in [0, 20]$ par :

$$c(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + 30x + 110$$

où c est exprimé en milliers d'euros et x désigne le nombre de milliers de meubles fabriqués. La courbe représentative de $\mathcal{C}_c$ est donnée ci-dessous :



1. Déterminer les coûts fixes liés à cette production, c'est-à-dire les coûts pour produire 0 meuble.
2. Chaque meuble est vendu au prix de 65€.
   a. Sur la figure précédente, tracer la courbe de la fonction r égale aux recettes de l'entreprise en milliers d'euros.
   b. En déduire graphiquement le nombre minimal et le nombre maximal de meubles à produire pour que l'entreprise soit rentable.
3. On introduit la fonction b égale aux bénéfices de l'entreprise en milliers d'euros.
   a. Exprimer b en fonction de c et r. En déduire une expression de b en fonction de x.
   b. Etudier les variations de b sur $[0, 20]$.
   c. Pour quel nombre de meubles la production est-elle la plus rentable ? Quel est alors le bénéfice atteint ?

Exercices

Corrigés

Exercice 1

1. La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1'(x) = 2x + 3$$

2. La fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car la fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f_2'(x) = -\frac{3}{x^2}$$

3. La fonction f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_3'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

4. La fonction f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_4'(x) = \cos x - \sin x$$

5. La fonction f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_5'(x) = 7x^6 + 30x^5 - 9x^2 + 16x - 7$$

Exercice 2

1. La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme inverse d'une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$. f_1 est de la forme $\frac{1}{u}$ avec $u(x) = \sqrt{x}$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_1'(x) = \frac{-u'(x)}{u(x)^2} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

2. La fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. f_2 est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x^2 - 3x$ et $v(x) = \cos x$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_2'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (2x-3)\cos x - (x^2 - 3x)\sin x$$

3. La fonction f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme puissance entière d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. f_3 est de la forme u^n avec $u(x) = 3x^3 - 1$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_3'(x) = nu'(x)u(x)^{n-1} = 9nx^2(3x^3 - 1)^{n-1}$$

4. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

Par conséquent, la fonction $x \mapsto x^2 + 2x + 1$ s'annule en -1. Ainsi, la fonction f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, le dénominateur de n'annulant pas sur cet intervalle. f_4 est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 + 3x - 1$ et $v(x) = x^2 + 2x + 1$. On a donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}, f_4'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{(2x+3)(x^2+2x+1) - (x^2+3x-1)(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2} \\ &= \frac{-x^2+4x+5}{(x+1)^4}\end{aligned}$$

5. La fonction f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. f_5 est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = 2(x^2 + x)$ et $v(x) = \sqrt{x}$. On a donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_5'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) &= (4x+2)\sqrt{x} + 2(x^2+x)\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{(4x+2)x + x^2 + x}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{5x^2+3x}{\sqrt{x}} \\ &= 5x\sqrt{x} + 3\sqrt{x}\end{aligned}$$

6. La fonction f_6 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme puissance entière d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. f_6 est de la forme u^n avec $u(x) = 2x + 3$ et $n = 5$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_6'(x) = nu'(x)u(x)^{n-1} = 10(2x+3)^4$$

7. Le discriminant du polynôme $3x^2+3x+1$ est $\Delta = 3^2 - 4\times3\times1 = -3 < 0$. Ainsi, le polynôme ne s'annule pas. Par conséquent, la fonction f_7 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, le dénominateur de n'annulant pas. f_7 est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 3\sqrt{x}$ et $v(x) = 3x^2 + 3x + 1$. On a donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_7'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} &= \frac{\frac{3}{2\sqrt{x}}(3x^2+3x+1) - 3\sqrt{x}(6x+3)}{(3x^2+3x+1)^2} \\ &= \frac{3(3x^2+3x+1) - 6x(6x+3)}{2\sqrt{x}(3x^2+3x+1)^2} \\ &= \frac{-27x^2-9x+3}{2\sqrt{x}(3x^2+3x+1)^2}\end{aligned}$$

Exercice 3

1. La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto 3x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$. f_1 est de la forme $u \circ v$ avec $u(x) = \cos x$ et $v(x) = 3x - 1$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1'(x) = v'(x)u'(v(x)) = -3\sin(3x-1)$$

2. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction f_2 est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. f_2 est de la forme $u \circ v$ avec $u(x) = \sin x$ et $v(x) = \sqrt{x}$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_1'(x) = v'(x)u'(v(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x})$$

3. La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \mapsto 3x^2 + x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 3x^2 + x = x(3x + 1)$$

On en déduit le tableau de signe de la fonction $x \mapsto 3x^2 + x$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
signe de $3x^2 + x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Il s'en suit que la fonction f_3 est dérivable sur $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\cup]0, +\infty[$. f_3 est de la forme $u \circ v$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = 3x^2 + x$. On a donc :

$$\forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\cup]0, +\infty[, f_3'(x) = v'(x)u'(v(x)) = (6x + 1)\frac{1}{2\sqrt{3x^2 + x}} = \frac{6x + 1}{2\sqrt{3x^2 + x}}$$

4. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto 5x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$. f_4 est de la forme $u \circ v$ avec $u(x) = \sin x$ et $v(x) = 5x^n$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_4'(x) = v'(x)u'(v(x)) = 5nx^{n-1}\cos(5x^n)$$

5. La fonction $x \mapsto \dfrac{3x}{x-1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle. De plus, on a :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signe de $3x$		$-$	0		$+$		
signe de $x - 1$			$-$		0	$+$	
signe de $\frac{3x}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, il s'en suit que la fonction f_5 est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. f_5 est de la forme $u \circ v$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = \frac{3x}{x-1}$. On a donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[, f_5'(x) = v'(x)u'(v(x)) &= \frac{3(x-1) - 3x}{(x-1)^2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{3x}{x-1}}} \\ &= \frac{-3}{2(x-1)^2} \sqrt{\frac{x-1}{3x}} \\ &= \frac{-3}{2(x-1)\sqrt{3x(x-1)}}\end{aligned}$$

6. La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto (x-1)\sqrt{x}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, la fonction f_6 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. f_6 est de la forme $u \circ v$ avec $u(x) = \cos x$ et $v(x) = (x-1)\sqrt{x}$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_6'(x) = -\left(\sqrt{x} + (x-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\sin((x-1)\sqrt{x}) = \frac{1-3x}{2\sqrt{x}} \sin((x-1)\sqrt{x})$$

Exercice 4

1. La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme puissance entière d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1'(x) = 3(2x-3)(x^2 - 3x + 1)^2$$

L'équation de la tangente à la courbe de f_1 au point d'abscisse 2 est donc :

$$y_1 = f_1'(2)(x-2) + f_1(2) = 3(x-2) - 1 = 3x - 7$$

2. La fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{3}{2}\right\}$, le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle et :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{3}{2}\right\}, f_2'(x) = \frac{2x + 3 - 2(x-1)}{(2x+3)^2} = \frac{5}{(2x+3)^2}$$

L'équation de la tangente à la courbe de f_2 au point d'abscisse 0 est donc :

$$y_2 = f_2'(0)(x-0) + f_2(0) = \frac{5}{9}x - \frac{1}{3}$$

3. La fonction racine carrée étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, il s'en suit que la fonction f_3 est dérivable sur $\left]-\frac{3}{5}, +\infty\right[$ et :

$$\forall x \in \left]-\frac{3}{5}, +\infty\right[, f_3'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x+3}}$$

L'équation de la tangente à la courbe de f_3 au point d'abscisse 1 est donc :

$$y_3 = f_3'(1)(x-1) + f_3(1) = \frac{5}{2\sqrt{8}}(x-1) + \sqrt{8} = \frac{5}{4\sqrt{2}}x - \frac{5}{4\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = \frac{5}{4\sqrt{2}}x + \frac{11}{4\sqrt{2}}$$

4. La fonction f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ comme inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ et ne s'annulant pas sur cet intervalle, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}, f_4'(x) = \frac{-3(x-3)^2}{(x-3)^6} = \frac{-3}{(x-3)^4}$$

L'équation de la tangente à la courbe de f_4 au point d'abscisse 1 est donc :

$$y_4 = f_4'(1)(x-1) + f_4(1) = -\frac{3}{16}(x-1) - \frac{1}{8} = -\frac{3}{16}x + \frac{1}{16}$$

Exercice 5

1. La fonction f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1'(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

On en déduit le signe de la dérivée, et les variations de f_1 :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
signe de $x-2$		$-$	0		$+$		
signe de $x-3$			$-$		0	$+$	
signe de $f_1'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f_1		$\nearrow$	$\frac{5}{3}$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	

2. La fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ comme inverse d'une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}, f_2'(x) = \frac{-3(x-3)^2}{(x-3)^6} = \frac{-3}{(x-3)^4}$$

La dérivée de f_2 est clairement négative sur son domaine de définition et on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $f_2'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
variations de f_2		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	