

MPSI

Thierry Finot

Elsa Choubert

Sébastien Fayolle

David Legrand

Vincent Parmentier

Nicolas Tancrez

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

PHYSIQUE CHIMIE

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Résolutions de problèmes, activités numériques
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés



6^e édition
+ exos-minutes

Bases de l'optique géométrique

UN SCIENTIFIQUE



Willebrord SNELL (1580-1626) est un mathématicien et physicien hollandais. Enfant prodige, il acquiert bientôt une immense culture dans le domaine scientifique. Il rencontre les plus grands savants de son époque et se lance dans des recherches dans de nombreux domaines : astronomie, mesure de la Terre, approximation du nombre π . En optique, il s'intéresse aux miroirs concaves et convexes. Il énonce la loi de réfraction attribuée en France à DESCARTES.

■ Un peu d'histoire

Qui a découvert la loi de réfraction de la lumière ? En 984, le mathématicien arabe Ibn SAHL explique, schémas à l'appui, le lien entre l'angle d'incidence et celui de réfraction d'un rayon lumineux. Ses travaux restent totalement inconnus en Occident. Thomas HARRIOT découvre cette loi en 1602 mais il ne fait aucune publication. Elle est à nouveau énoncée en 1621 par le mathématicien hollandais Willebrord SNELL qui, lui non plus, n'en fait pas état publiquement. En 1637 René DESCARTES publie le *Discours de la méthode* dans lequel il énonce les principes de la rationalité scientifique. Il le fait suivre de trois appendices ; le premier est un manuel d'optique dans lequel il énonce la loi de réfraction, sans connaître les travaux de ses prédécesseurs. Quelques années plus tard, Pierre DE FERMAT justifie cette loi par le principe du temps minimum de parcours.

■■ Objectifs

■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les définitions concernant la lumière, sa propagation et ses sources
- ▷ Le modèle de l'optique géométrique et ses limites
- ▷ Les lois de Snell–Descartes pour la réflexion et la réfraction
- ▷ Les définitions concernant les systèmes optiques et la formation d'images
- ▷ Les conditions de l'approximation de Gauss et ses conséquences
- ▷ Le principe de fonctionnement d'une fibre optique

■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Relier la longueur d'onde dans le vide, celle dans un autre milieu et la couleur
- ▷ Utiliser les lois de Snell–Descartes pour déterminer des rayons réfléchis ou réfractés
- ▷ Étudier les cas de réfraction limite et réflexion totale
- ▷ Calculer des angles et des distances avec des formules géométriques
- ▷ Construire l'image d'un objet par un miroir plan et identifier sa nature réelle ou virtuelle
- ▷ Établir les expressions du cône d'acceptance et de la dispersion intermodale d'une fibre optique

■ ■ Résumé de cours

■ Propagation de la lumière

□ Nature de la lumière

– Selon le **modèle ondulatoire** de la lumière, il s'agit d'une onde électromagnétique, c'est-à-dire d'une propagation de variations périodiques des champs électrique et magnétique, dans un milieu matériel ou dans le vide.

Une lumière **monochromatique** est décrite par une fonction sinusoïdale de fréquence f . La lumière visible correspond à l'intervalle $4 \cdot 10^{14} \text{ Hz} < f < 8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ environ. Les autres fréquences correspondent à d'autres types d'ondes électromagnétiques (voir chapitre 8).

– Un autre modèle, dit **corpusculaire**, décrit la lumière (et les autres ondes électromagnétiques) comme un flux de particules appelés **photons** (voir chapitre 24).

□ Indice et longueur d'onde

– La **célérité** (vitesse de propagation) de la lumière dans le vide est $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

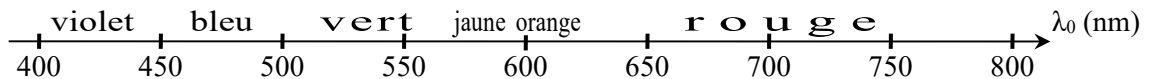
Sa célérité dans un milieu transparent quelconque est $v = \frac{c}{n}$ où n est l'**indice de réfraction**

($n \geq 1$), caractéristique du milieu et dépendant de la fréquence (donc de la longueur d'onde).

$n = 1,0003$ pour l'air (conditions usuelles), $n = 1,33$ pour l'eau, $n = 1,5$ à $1,8$ pour les verres.

– Une lumière monochromatique a une fréquence f déterminée par l'émetteur, et une longueur d'onde λ telle que $\lambda = \frac{v}{f}$. La longueur d'onde dans le vide est $\lambda_0 = \frac{c}{f}$, donc $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$.

– Échelle des couleurs :



□ Approximation de l'optique géométrique

L'optique géométrique modélise la lumière comme un ensemble de **rayons lumineux** : chaque rayon est une courbe décrite par la lumière pour aller d'un point à un autre. Les rayons lumineux sont *indépendants* les uns des autres ; ceci suppose qu'il n'y a pas d'interférences (toujours vrai en pratique). Dans un milieu transparent homogène et isotrope (seul cas envisagé ici), ils sont *rectilignes* ; ceci suppose qu'on évite la diffraction, tous les systèmes étant suffisamment larges.

■ Sources de lumière

□ Types de sources

– Les **sources de lumière blanche** (lampes à incandescence, à LED blanche...) ont un spectre *continu* (constitué de toutes les fréquences dans l'intervalle du visible, et même au-delà).

- Les **lampes spectrales** (notamment à vapeur métallique : mercure, sodium...) ont un spectre caractéristique de l'élément chimique, qui peut être considéré comme *discret* (constitué seulement de quelques fréquences distinctes).
- Les **lasers** émettent une lumière qui peut être considérée comme monochromatique.

□ Modèle de la source ponctuelle monochromatique

Une source de lumière est en général étendue (elle présente une certaine surface). Mais elle peut être *modélisée* comme un ensemble de **sources ponctuelles**.

De plus on se limitera, si nécessaire, à des sources ponctuelles monochromatiques.

■ Réflexion et réfraction

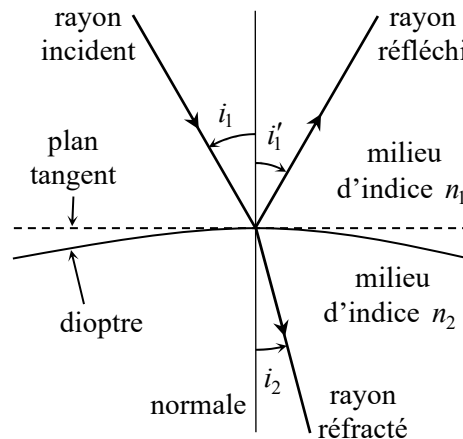
□ Description

Lorsqu'un rayon lumineux, dit **incident**, arrive sur un **dioptre** (interface entre deux milieux d'indices différents), il donne naissance en général à un rayon **réfléchi** (dans le milieu initial) et à un rayon **transmis** ou **réfracté** (dans le second milieu).

À partir du point d'intersection entre le rayon incident et le dioptre, on définit la normale, droite orthogonale au dioptre. Cette normale et le rayon incident définissent le **plan d'incidence**.

□ Lois de Snell-Descartes

1. Les rayons réfléchi et réfracté sont dans le plan d'incidence.
2. L'angle i'_1 de réflexion est : $i'_1 = -i_1$ (ou bien $i'_1 = i_1$ avec des angles non orientés).
3. L'angle i_2 de réfraction est lié à l'angle i_1 d'incidence par : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.



Les expressions avec des angles orientés montrent que le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont de l'autre côté de la normale, par rapport au rayon incident.

Ces lois ont pour conséquence la **loi de retour inverse de la lumière** : le trajet suivi par la lumière pour aller d'un point A à un point B est le même que celui suivi pour aller de B à A .

Remarques

- Lorsque le rayon réfracté est présent, on néglige souvent le rayon réfléchi.
- Si la surface est un miroir, il n'y a pas de rayon réfracté.

□ Réfraction limite et réflexion totale

- Si $n_2 > n_1$, il y a toujours un rayon réfracté (en plus du rayon réfléchi).
- Si $n_2 < n_1$, le rayon réfracté n'existe que lorsque l'angle i_1 est inférieur à une valeur limite,

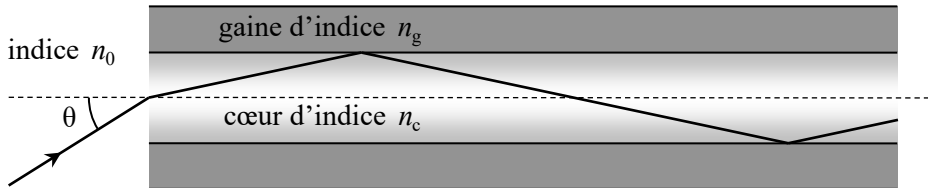
notée i_{lim} : celle-ci correspond au cas où $i_2 = \frac{\pi}{2}$, soit $i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$.

Lorsque $i_1 > i_{\text{lim}}$, il n'y a pas de réfraction, il y a donc **réflexion totale**.

⇒ **Méthode 1.1. Déterminer un rayon réfracté et étudier la réfraction limite**

□ Application : fibre optique

Une application du phénomène de réflexion totale est la **fibre optique à saut d'indice** : un fil cylindrique transparent constitué d'un cœur d'indice n_c entouré d'une gaine d'indice $n_g < n_c$.



- Tout rayon pénétrant dans la fibre avec un angle $\theta < \theta_a$ sera guidé par réflexion interne : l'angle maximal θ_a caractérise le **cône d'acceptance** de la fibre. Son **ouverture numérique** est $o_n = n_0 \sin \theta_a$ où n_0 est l'indice du milieu extérieur.

Le calcul donne $\theta_a = \arcsin\left(\frac{\sqrt{n_c^2 - n_g^2}}{n_0}\right)$ d'où $o_n = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$.

- Lors du guidage d'un faisceau lumineux dans une fibre optique de longueur donnée, tous les rayons n'ont pas la même durée de trajet : on appelle **dispersion intermodale** la différence de temps $\Delta\tau$ entre les rayons les plus lents et les rayons les plus rapides. Pour une bonne transmission de l'information, $\Delta\tau$ ne doit pas être trop élevée.

On trouve $\Delta\tau = \frac{L n_c (n_c - n_g)}{c n_g}$ pour une fibre de longueur L .

⇒ **Méthode 1.2. Établir les expressions du cône d'acceptance et de la dispersion intermodale d'une fibre optique**

■ Formation d'images par un système optique

□ Système optique

Un **système optique** est un ensemble de dioptries et/ou de miroirs, qui modifie la trajectoire des rayons lumineux. Son rôle est de donner une image d'un objet.

□ Stigmatisme, objets et images

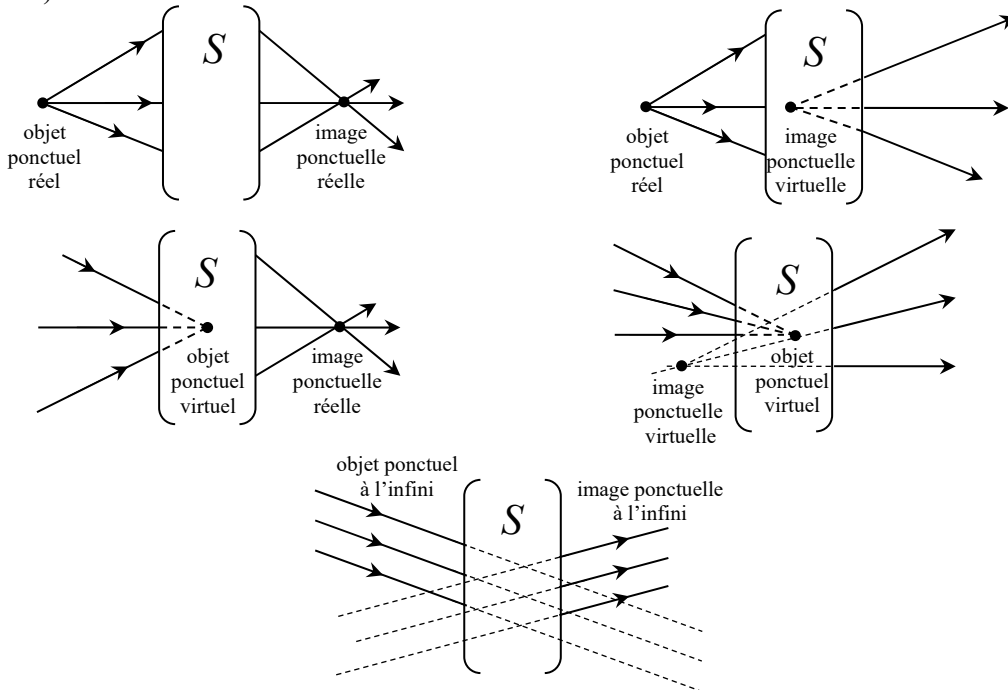
Une intersection d'un grand nombre de rayons incidents, ou de leurs prolongements, est appelée **point objet** (ou **objet ponctuel**). Il est **réel** si les rayons sont vraiment issus de ce point, et

virtuel si seuls les *prolongements* des rayons convergent vers ce point. Des rayons incidents parallèles entre eux définissent un objet **à l'infini** (cas limite d'un objet réel ou virtuel).

Après la traversée d'un système optique, on peut envisager deux cas :

- soit les rayons émergents correspondant aux rayons issus de chaque point objet A convergent vers un point A' ou semblent provenir d'un point A' , on dit alors que le système est **stigmatique** et A' est appelé **point image** (ou **image ponctuelle**) de A ;
- soit ces rayons émergent de façon désordonnée, et le système n'est pas stigmatique.

Pour un système stigmatique, l'image est **réelle** si les rayons convergent vraiment vers A' , et **virtuelle** s'ils semblent provenir de A' (leurs prolongements se coupant en A'). Enfin l'image est **à l'infini** si les rayons émergents sont parallèles entre eux (cas limite d'une image réelle ou virtuelle).



Un objet réel se trouve donc du côté de la lumière incidente, avant la face d'entrée du système, contrairement à un objet virtuel. Une image réelle se trouve du côté de la lumière émergente, après la face de sortie du système, contrairement à une image virtuelle.

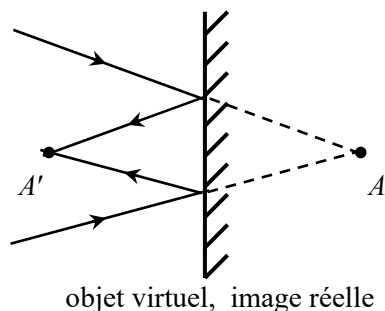
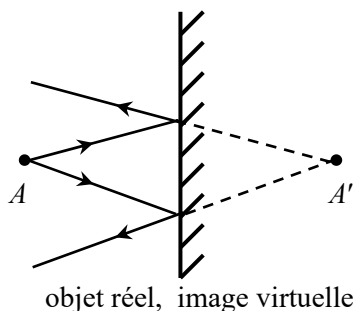
Un objet quelconque (étendu) est un ensemble de points objets, une image quelconque est un ensemble de points images.

⇒ **Méthode 1.3. Calculer des distances à partir des angles**

□ Exemple du miroir plan

Le miroir plan est un exemple simple de système optique.

L'image d'un point objet A par un miroir plan est un point image A' symétrique de A par rapport au miroir. Si A est réel, A' est virtuelle ; si A est virtuel, A' est réelle.



⇒ **Méthode 1.4. Déterminer l'image d'un objet par un miroir plan**

□ Systèmes centrés

Définition

Un système optique est **centré** s'il possède un axe de symétrie de révolution, appelé **axe optique**. Un rayon incident confondu avec cet axe ne sera donc pas dévié par le système.

De plus, d'après la première loi de Snell–Descartes, un rayon incident contenu dans un plan méridien (contenant l'axe) sera ensuite réfracté et/ou réfléchi dans ce plan.

Aplanétisme

Un système centré sera utilisable comme instrument s'il possède la propriété d'**aplanétisme** : l'image d'un objet plan orthogonal à l'axe optique est également plane et orthogonale à l'axe.

Conditions de Gauss

Aucun système optique, excepté le miroir plan, n'est rigoureusement stigmatique ; cependant, les grains d'un détecteur (cellules de la rétine, d'une plaque numérique...) ne sont pas ponctuels mais ont eux-mêmes une certaine largeur, donc un stigmatisme approché est suffisant.

Pour les systèmes optiques centrés, on peut obtenir un stigmatisme approché en ne laissant pénétrer dans le système que les rayons **paraxiaux**, c'est-à-dire rencontrant le système près de l'axe optique et peu inclinés par rapport à celui-ci. Ce sont les **conditions de Gauss**, qui se réalisent pratiquement à l'aide d'un diaphragme et en observant des objets petits et/ou éloignés. Dans ces conditions, les systèmes optiques centrés sont aplanétiques.

Foyers et plans focaux

Les systèmes optiques centrés, dans les conditions de Gauss, possèdent deux points particuliers :

- le **foyer principal objet** F dont l'image par le système est à l'infini sur l'axe ;
- le **foyer principal image** F' , image d'un point objet situé sur l'axe et à l'infini.

Si ces deux points sont à l'infini, le système est dit **afocal** (c'est le cas du miroir plan).

Le plan passant par F (resp. F') et orthogonal à l'axe est le **plan focal objet** (resp. **image**).

- D'après la propriété d'aplanétisme, en dehors de F' , tout point du plan focal image, appelé **foyer image secondaire**, est l'image d'un point objet situé à l'infini mais hors de l'axe.
- De même, en dehors de F , tout point du plan focal objet, appelé **foyer objet secondaire**, a son image à l'infini mais hors de l'axe.

■ Comment utiliser les lois de Snell–Descartes ?

□ Méthode 1.1. Déterminer un rayon réfracté et étudier la réfraction limite

- La loi de la réfraction donne $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1$, d'où $i_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin i_1\right)$.
- Le rayon réfracté n'existe que si on trouve $\sin i_2 < 1$, ce qui équivaut à $\frac{n_1}{n_2} \sin i_1 < 1$ ou encore $\sin i_1 < \frac{n_2}{n_1}$. Cette condition est toujours vérifiée si $n_2 > n_1$; mais si $n_2 < n_1$ alors l'angle incident i_1 ne doit pas dépasser la valeur limite $i_{\text{lim}} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$ pour que le rayon réfracté existe.

⇒ **Exo minute 1.B, Exercices 1.3 à 1.5, 1.7 à 1.12, 1.14**

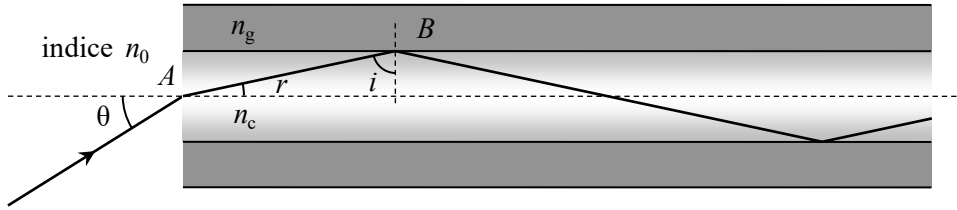
Exemple : un rayon lumineux passe de l'eau ($n_1 = 1,33$) vers l'air ($n_2 = 1,00$). Le rayon incident forme un angle $i_1 = 30,0^\circ$ avec la normale au dioptre au point d'intersection avec le dioptre. Le rayon réfracté formera avec cette même normale un angle $i_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin i_1\right) = 41,7^\circ$.

L'angle limite vaut $i_{\text{lim}} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = 48,8^\circ$. Les rayons ayant un angle incident supérieur à cette valeur ne donnent pas naissance à un rayon réfracté : dans ce cas, il y a seulement un rayon réfléchi et le dioptre se comporte comme un miroir.

□ Méthode 1.2. Établir les expressions du cône d'acceptance et de la dispersion intermodale d'une fibre optique

- Après avoir défini les trois angles qui interviennent dans les calculs, on écrit la condition de réflexion totale sur le dioptre entre le cœur et la gaine, et la loi de la réfraction au point d'entrée dans la fibre (dioptre entre l'extérieur et le cœur).
- On relie géométriquement deux de ces angles, et la combinaison de toutes ces relations fait apparaître l'inégalité cherchée sur l'angle d'entrée.
- On utilise ensuite la définition de l'indice pour calculer les temps de parcours des deux rayons extrêmes, dont la différence est la dispersion intermodale.

⇒ **Exercice 1.14**



- Au point B , comme $n_c > n_g$, la condition de réflexion totale s'écrit : $\sin i > \sin i_{\text{lim}} = \frac{n_g}{n_c}$ (1).

Au point A , la loi de Snell–Descartes s'écrit : $n_0 \sin \theta = n_c \sin r$ (2).

Or $r = \frac{\pi}{2} - i$ (angles complémentaires), donc $\sin r = \sin\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = \cos i$. Sachant que

$\sin^2 i + \cos^2 i = 1$, la relation (1) devient : $\sqrt{1 - \cos^2 i} > \frac{n_g}{n_c}$ d'où $\cos^2 i < 1 - \frac{n_g^2}{n_c^2} = \frac{n_c^2 - n_g^2}{n_c^2}$.

Finalement : (2) $\Leftrightarrow n_0 \sin \theta = n_c \cos i < n_c \sqrt{\frac{n_c^2 - n_g^2}{n_c^2}} = \sqrt{n_c^2 - n_g^2} = n_0 \sin \theta_a$

soit $\theta_a = \arcsin\left(\frac{\sqrt{n_c^2 - n_g^2}}{n_0}\right)$. L'ouverture numérique est donc : $O_n = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$.

- La durée de parcours d'une distance d , à la célérité v , est $\tau = \frac{d}{v}$. Or $v = \frac{c}{n_c}$, et pour le rayon dessiné, $d = \frac{L}{\cos r}$ où L est la longueur de la fibre, donc $\tau = \frac{L n_c}{c \cos r}$. Le rayon le plus rapide est celui qui parcourt le trajet le plus court, obtenu pour $\theta = 0$ donc $r = 0$ et $\cos r = 1$: $\tau_{\min} = \frac{L n_c}{c}$.

Le rayon le plus lent correspond à $\theta = \theta_a$ et à l'angle $i = i_{\text{lim}}$ correspondant à la réflexion limite en B , sachant que $\sin i_{\text{lim}} = \frac{n_g}{n_c} = \cos r_{\text{lim}}$. Donc $\tau_{\min} = \frac{L n_c^2}{c n_g}$.

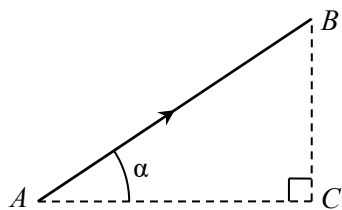
On en déduit : $\Delta\tau = \tau_{\max} - \tau_{\min} = \frac{L n_c (n_c - n_g)}{c n_g}$.

■ Comment obtenir les relations géométriques cherchées ?

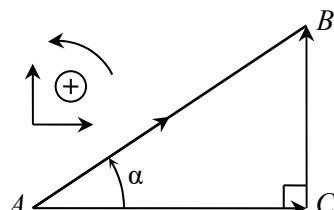
□ Méthode 1.3. Calculer des distances à partir des angles

Les lois de Snell–Descartes ne donnent que des relations entre des angles. Pour déterminer des distances ou des mesures algébriques, on combine ces lois avec des relations de trigonométrie, notamment dans des triangles rectangles.

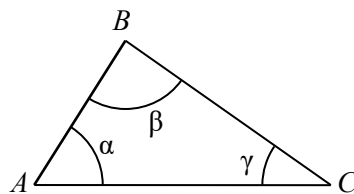
⇒ Exercices 1.10 à 1.12, 1.14



Dans ce triangle rectangle on peut écrire : $\cos \alpha = \frac{AC}{AB}$,
 $\sin \alpha = \frac{BC}{AB}$, $\tan \alpha = \frac{BC}{AC}$.



La formule de la tangente peut aussi s'écrire avec un angle orienté et des mesures algébriques : $\tan \alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$.



Enfin on peut écrire la formule des sinus pour un triangle quelconque :

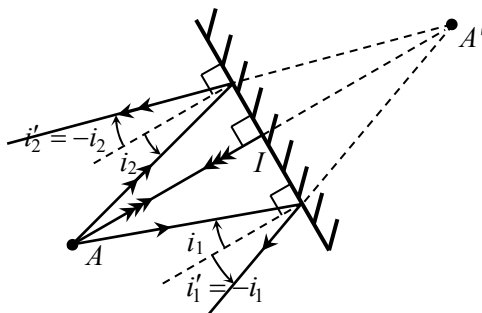
$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{CA}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \gamma}.$$

■ Comment déterminer l'image d'un objet ponctuel par un système optique ?

□ Méthode 1.4. Déterminer l'image d'un objet par un miroir plan

Tracer au moins trois rayons incidents se coupant en un même point A , réel ou virtuel. Construire les rayons réfléchis selon les lois de Snell–Descartes. On constate que ces rayons, ou leurs prolongements, se coupent en un même point A' , qui est donc l'image de A . Et les différents triangles symétriques montrent que A' est le symétrique de A par rapport au plan du miroir.

⇒ Exercice 1.13



Pour un point objet A réel (faisceau incident divergent), comme ci-dessus, l'image A' est l'intersection des *prolongements* des rayons réfléchis (faisceau réfléchi divergent également), donc A' est un point image *virtuel*. Effectivement, quand on se regarde dans une glace, notre image est virtuelle : si on mettait un écran là où semble se trouver notre image, c'est-à-dire derrière le mur où est fixé le miroir, on ne verrait rien sur l'écran !

■ ■ Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. La lumière se propage plus vite dans l'eau ($n_{\text{eau}} = 1,3$) que dans l'air ($n_{\text{air}} = 1,0$).	☐	☐
2. L'indice d'un milieu homogène transparent et isotrope dépend de la fréquence de la lumière qui le traverse.	☐	☐
3. La lumière solaire peut être considérée comme monochromatique.	☐	☐
4. La lumière d'un laser peut être considérée comme monochromatique.	☐	☐
5. Lors du passage d'un milieu d'indice faible à un milieu d'indice plus élevé, le rayon se rapproche de la normale.	☐	☐
6. On peut observer un phénomène de réflexion totale lorsqu'un rayon lumineux passe d'un milieu peu réfringent à un milieu plus réfringent.	☐	☐
7. Lors du phénomène de réflexion, la direction du rayon réfléchi dépend de la longueur d'onde de la lumière.	☐	☐
8. Lors du phénomène de réfraction, la direction du rayon réfracté dépend de la longueur d'onde de la lumière.	☐	☐
9. Un système optique centré ne dévie pas les rayons incidents parallèles à son axe optique.	☐	☐
10. Le foyer principal image F' d'un système optique centré est l'image par ce système du foyer principal objet F .	☐	☐

■ ■ Énoncé des exercices

■ Exercices en moins de 5 minutes 🕒

□ Exo minute 1.A. Fréquence et longueur d'onde

La lumière visible possède des longueurs d'onde dans le vide comprises entre 0,40 et 0,80 μm .

1. À quel intervalle de fréquences cela correspond-il ?

2. Que deviennent ces longueurs d'onde :

a) dans l'eau, d'indice $n = 1,3$?

b) dans un verre, d'indice $n' = 1,5$?

Donnée : $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

□ Exo minute 1.B. Réfraction sur un dioptre

On considère deux milieux transparents homogènes et isotropes d'indices respectifs $n_1 = 1,310$ et $n_2 = 1,512$, séparés par un dioptre plan. Un rayon lumineux issu du milieu 1 passe dans le milieu 2 ; son angle d'incidence sur le dioptre est $i_1 = 32^\circ 12'$ (32 degrés et 12 minutes).

Calculer, en degrés décimaux puis en degrés et minutes, l'angle de déviation de la trajectoire de ce rayon lors du changement de milieu.

■ Indice et longueur d'onde

□ Exercice 1.1. Longueur d'onde et couleur

Un laser émet une radiation lumineuse quasi monochromatique de fréquence $f = 4,73 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$.

On donne $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (vitesse de la lumière dans le vide).

1. Pourquoi qualifie-t-on cette radiation de « quasi monochromatique » ?

2. Quelle est la longueur d'onde dans le vide de cette radiation ? Quelle est sa couleur ?

3. On considère maintenant que cette radiation se propage dans un milieu d'indice 1,66.

Quelle est la vitesse de propagation de la lumière dans ce milieu ?

Quelle est alors la longueur d'onde de la radiation du laser ? Quelle est sa couleur ?

□ Exercice 1.2. Loi de Cauchy

La formule de Cauchy, donnant l'indice d'un verre pour une radiation monochromatique de

longueur d'onde λ_0 dans le vide, est : $n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$ où A et B sont des constantes.

1. Donner les dimensions de A et B , et leurs unités dans le Système international.

2. Des mesures effectuées avec un même verre ont donné :

$n_r = 1,618$ pour une radiation rouge de longueur d'onde dans le vide $\lambda_{0r} = 768 \text{ nm}$;

$n_v = 1,652$ pour une radiation violette de longueur d'onde dans le vide $\lambda_{0v} = 434 \text{ nm}$.

a) Calculer les valeurs de A et B .

b) En déduire la valeur de l'indice pour une radiation jaune telle que $\lambda_{0j} = 589 \text{ nm}$.

■ Réflexion et réfraction

□ Exercice 1.3. Réfraction et dispersion

Un rayon lumineux, se propageant dans l'air, arrive avec une incidence $i = 40^\circ$ sur un dioptre air/verre plan. Si ce rayon est constitué de lumière blanche, calculer l'écart angulaire entre les rayons réfractés extrêmes.

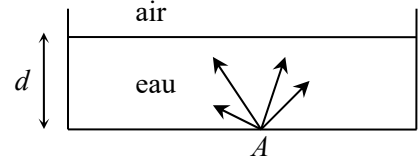
Données : l'indice du verre est donné par la formule de Cauchy : $n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$, avec $A = 1,504$ et

$B = 4,188 \cdot 10^{-15}$ unité SI ; l'indice de l'air est $n_a = 1,000$.

□ Exercice 1.4. Condition d'émergence

1. Quelle est la condition pour qu'un rayon passant de l'eau (indice $n_{\text{eau}} = 1,33$) à l'air (indice $n_{\text{air}} = 1,00$) soit réfracté ?

2. On place une source de lumière (supposée ponctuelle) au fond d'une piscine remplie d'eau, de profondeur $d = 2,50 \text{ m}$. Donner les dimensions de la zone de la surface qui sera traversée par des rayons lumineux.



□ Exercice 1.5. Capteur de niveau d'eau

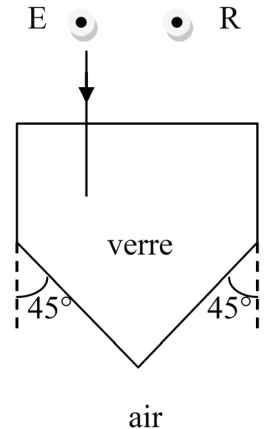
On désire connaître le niveau du liquide dans un château d'eau. Pour cela on l'équipe d'un capteur optique schématisé sur la figure ci-contre. L'émetteur (E) est un faisceau laser et le récepteur (R) une photodiode. Cette dernière fournit un signal électrique lorsqu'elle reçoit de la puissance lumineuse.

L'indice du verre est $n = 1,5$; celui de l'air est 1.

1. Montrer que le faisceau laser se réfléchit totalement sur les faces et ressort en (R).

2. À la place de l'air, il y a maintenant de l'eau d'indice $n' = 1,33$. Le récepteur (R) reçoit-il toujours de la lumière ?

3. Expliquer comment utiliser ce dispositif pour connaître le niveau de remplissage du château d'eau.



D'après G2E

□ Exercice 1.6. Construction de Descartes*

On considère un rayon lumineux passant d'un milieu d'indice $n_1 = 1,5$ (verre) à un milieu d'indice $n_2 = 1,0$ (air).

1.a) Faire un schéma du plan d'incidence, avec le milieu 1 en haut, et tracer le rayon incident. On note I le point d'intersection de ce rayon avec le dioptre.

b) Construire dans le milieu 2 deux demi-cercles de même centre I , l'un (C_1) de rayon proportionnel à n_1 et l'autre (C_2) de rayon proportionnel à n_2 (échelle au choix).

Soit J le point d'intersection du prolongement du rayon incident avec C_1 : à partir de J , on trace une droite Δ parallèle à la normale. On note alors K le point d'intersection de Δ avec C_2 : la droite (IK) obtenue donne la direction du rayon réfracté.

c) Construire le rayon réfracté selon cette méthode.

2. Démontrer, par des considérations géométriques, qu'on retrouve la loi de Snell–Descartes de la réfraction en utilisant cette construction.

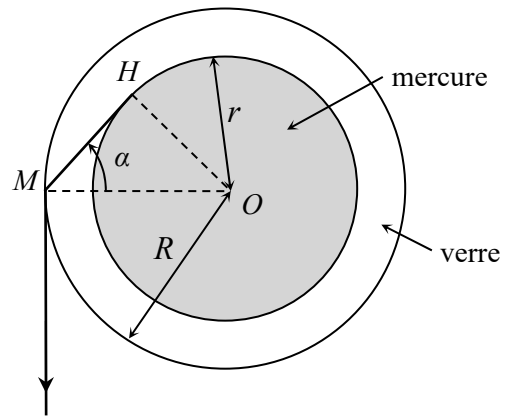
3. Montrer, à partir de cette construction, qu'il existe une valeur limite de i au-delà de laquelle il n'y a plus de rayon réfracté. Faire la construction de Descartes correspondante. Calculer cet angle et vérifier qu'on retrouve le résultat donné par les formules.

□ Exercice 1.7. Thermomètre*

On considère un thermomètre à colonne de mercure, dont l'enveloppe est un cylindre en verre de rayon extérieur R et de rayon intérieur r .

Montrer qu'à partir d'une certaine valeur de $\frac{r}{R}$,

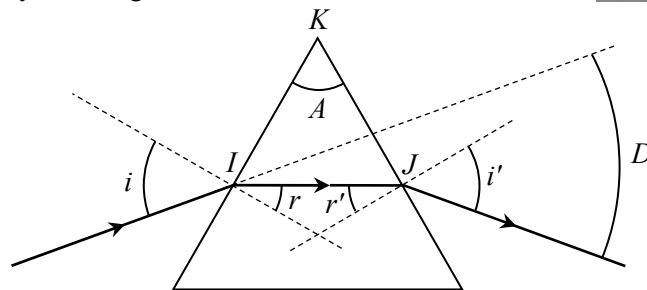
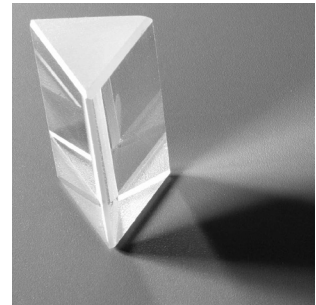
un observateur voit le mercure comme s'il remplissait entièrement un cylindre de rayon R , c'est-à-dire que l'épaisseur du verre n'est plus visible. On pourra utiliser les points O , M , H et l'angle α . L'indice du verre est $n = 1,5$.



□ Exercice 1.8. Mesure de l'indice d'un prisme**

On réalise la dispersion de la lumière au moyen d'un prisme en verre, d'angle A entre ses deux faces utiles, et d'indice de réfraction n pour une longueur d'onde donnée. Le milieu extérieur est l'air, d'indice pris égal à 1.

Soit un rayon parvenant au point I sur la face d'entrée avec un angle d'incidence i : il émerge par la face de sortie en un point J avec un angle i' . On note D l'angle mesurant la déviation entre le rayon incident et le rayon émergent.



1. Appliquer la loi de Snell–Descartes en I et J . Établir également les deux relations géométriques : $A = r + r'$ et $D = i + i' - A$. (Ces quatre relations sont les *formules du prisme*.)
2. Montrer que l'existence du rayon émergent en J dépend d'une condition sur r' , puis en déduire une condition sur i .
3. Montrer que l'existence d'un rayon émergent impose aussi une condition sur A .
4. Pour un prisme en verre *flint* d'indice $n = 1,74$, vérifier que l'angle usuel $A = 60^\circ$ convient. Déterminer alors numériquement l'encadrement de i .
5. On constate expérimentalement que, lorsqu'on fait varier i de 0° à 90° en tournant le prisme, la déviation D passe par un minimum unique D_m .
 - a) Justifier sans calcul que ce minimum correspond nécessairement à $i = i'$.
 - b) Exprimer alors D_m en fonction de i et A , puis en déduire l'indice n en fonction de D_m et A .

□ Exercice 1.9. Arc-en-ciel**

Lorsque le Soleil illumine un rideau de pluie, chaque goutte d'eau constitue une sphère réceptionnant un faisceau de rayons parallèles entre eux. On recherche les conditions pour que la lumière émergente, issue d'une goutte d'eau, se présente sous forme d'un faisceau de lumière parallèle (c'est à cette condition que l'intensité lumineuse sera maximale, donc observable pour l'œil). Pour cela on fait intervenir l'angle de déviation D de la lumière à travers la goutte d'eau, mesuré entre le rayon émergent et le rayon incident. Cet angle de déviation D est une fonction de l'angle d'incidence i . On admettra que la condition de parallélisme des rayons émergents se traduit mathématiquement par $\frac{dD}{di} = 0$.

1. Rappeler les lois de Snell–Descartes pour la réfraction d'un rayon lumineux passant de l'air (milieu d'indice unité) vers un milieu d'indice n . Exprimer la dérivée $\frac{dr}{di}$ exclusivement en fonction de l'indice n et du sinus de l'angle d'incidence.

2. Une goutte d'eau quelconque, représentée par une sphère de centre O et de rayon R , est atteinte par la lumière solaire sous des incidences variables, comprises entre 0° et 90° . Son indice, pour une radiation donnée, sera noté n tandis que celui de l'air sera pris égal à l'unité.

Répondre aux questions **a**, **b**, **c** ci-après pour chacun des trois cas suivants :

- lumière directement transmise (figure 1) ;
- lumière transmise après une réflexion partielle à l'intérieur de la goutte (figure 2) ;
- lumière transmise après deux réflexions à l'intérieur de la goutte (figure 3).

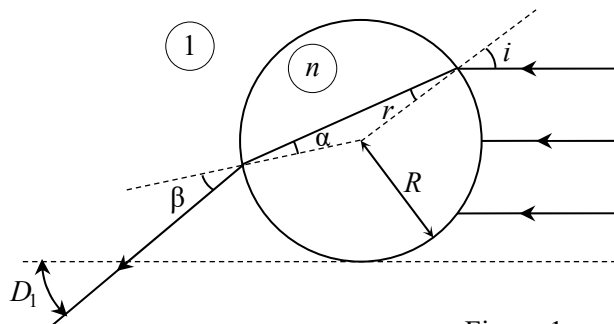


Figure 1

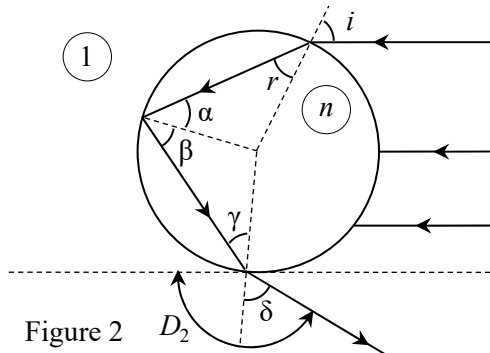


Figure 2

- a) Exprimer en fonction de l'angle d'incidence i ou de l'angle de réfraction r , tous les angles marqués de lettres grecques.
- b) En déduire l'angle de déviation D propre à chaque cas, en fonction de i et de r .
- c) Rechercher ensuite, si elle existe, une condition d'émergence d'un faisceau parallèle, exprimée par une relation entre le sinus de l'angle d'incidence et l'indice n de l'eau.

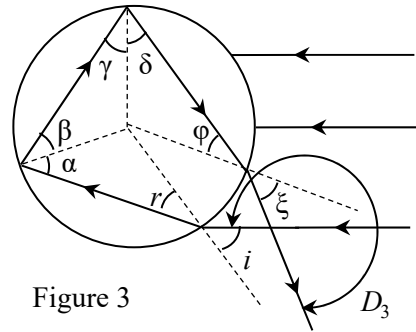


Figure 3

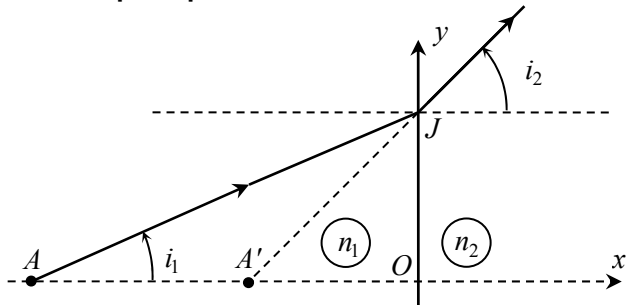
Madame Michu se trouve face à un rideau de pluie, et observe le ciel en tournant le dos au Soleil, qui est assez bas sur l'horizon.

3. Montrer qu'elle ne pourra observer la lumière transmise que si la goutte d'eau se trouve sur deux cônes d'axes confondus avec la direction solaire et de demi-angles au sommet θ_2 et θ_3 . Exprimer ces deux angles en fonction de D_2 et D_3 .
4. Les angles θ_2 et θ_3 dépendant de l'indice n de l'eau, on observe une séparation des couleurs due au fait que cet indice varie en fonction de la longueur d'onde. Calculer ces angles pour le rouge (indice 1,3317) et le violet (indice 1,3448).
5. Dessiner les deux arcs-en-ciel qui apparaissent dans le champ de vision de Madame Michu, en notant la position respective des rouges et des violets sur chacun des deux.

■ Formation d'images par un système optique

□ Exercice 1.10. Stigmatisme du dioptre plan*

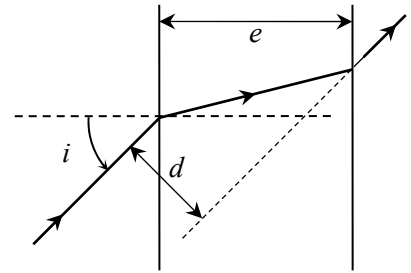
Un dioptre plan sépare un milieu d'indice n_1 d'un milieu d'indice n_2 . On considère un rayon issu d'un point A , situé dans le milieu d'indice n_1 , et d'angle d'incidence orienté i_1 . On note A' l'intersection du rayon réfracté avec l'axe perpendiculaire au dioptre et passant par A .



1. Exprimer $\overline{OA'}$ en fonction de $\overline{OA}$, $\sin i_1$, n_1 et n_2 .
2. Le système est-il rigoureusement stigmatique ?
3. En utilisant une approximation, déterminer l'image du point objet A , puis d'un objet AB parallèle au dioptre.

□ Exercice 1.11. lame à faces parallèles*

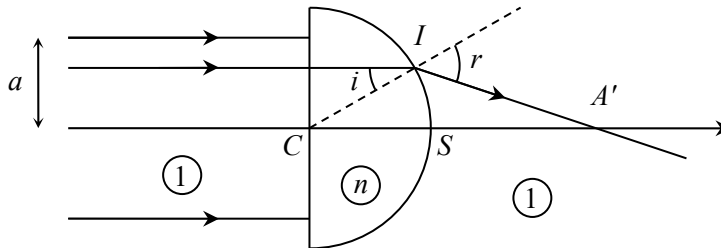
On considère une lame de verre à faces parallèles, d'épaisseur e , d'indice n , plongée dans l'air d'indice 1. Un rayon incident arrive avec un angle d'incidence i .



1. Déterminer l'écart d entre le rayon incident et le rayon émergent en fonction de n et $\sin i$.
2. Faire l'application numérique pour $e = 4 \text{ mm}$, $n = 1,5$ et $i = 50^\circ$.
3. Cette lame est-elle stigmatique ? Quel est son effet sur la vision d'un objet ?

□ Exercice 1.12. Lentille demi-boule*

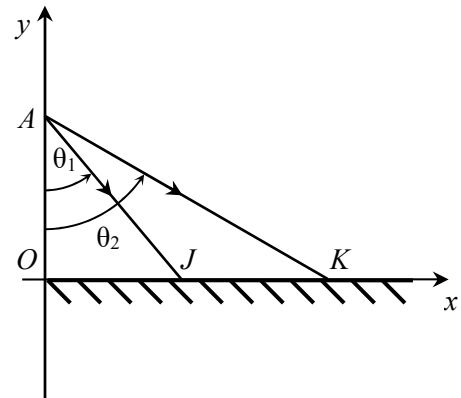
On considère une lentille en forme de demi-boule de rayon R et d'indice n , plongée dans l'air d'indice 1. Un faisceau lumineux cylindrique, de rayon a , arrive sous incidence normale sur la face plane de la lentille.



2. En déduire la limite CF' de CA' lorsqu'on se place dans l'approximation de Gauss (à définir). Quelle propriété de la lentille obtient-on ? Que représente le point F' ?
3. Quelle est la valeur limite a_0 du rayon du faisceau incident si l'on veut que tous les rayons ressortent de la lentille ? Faire l'application numérique pour $n = 1,5$ et $R = 5,0 \text{ cm}$.

□ Exercice 1.13. Jeux avec un ou deux miroirs**

On considère un miroir plan contenu dans le plan xOz et un objet ponctuel A placé sur l'axe Oy ($OA = a$). On cherche à déterminer l'image A' de A par le miroir.



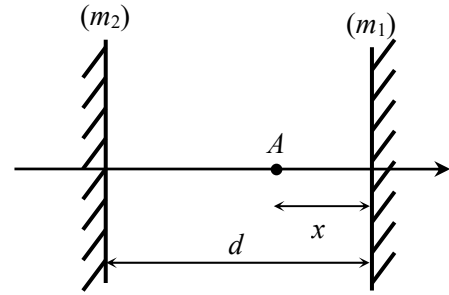
1. Construire les rayons réfléchis correspondant aux rayons incidents AJ et AK .
2. Établir les équations des droites des rayons réfléchis en fonction des tangentes des angles θ_1 et θ_2 .
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection C de ces deux droites.
4. Quelle est l'image de A par le miroir ? En déduire une propriété caractéristique du miroir plan.

On place maintenant deux miroirs plans identiques, parallèles et distants de d . Un objet ponctuel A est placé entre les deux miroirs à la distance x de (m_1) .

On note A_1 l'image de A par (m_1) , puis A_2 l'image de A_1 par (m_2) , etc.

5. Déterminer, en fonction de x et d , les mesures algébriques $\overline{AA_1}$, $\overline{AA_2}$, $\overline{AA_3}$ et $\overline{AA_4}$.

6. En déduire $\overline{AA_n}$. Combien d'images peut-on observer ?

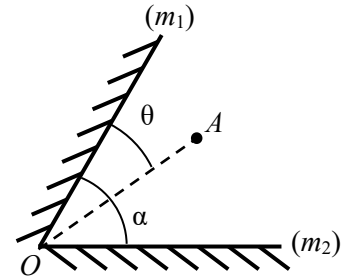


On place à présent les deux miroirs comme indiqué sur le schéma de telle façon qu'ils forment entre eux un angle $\alpha = 60^\circ$.

On place un objet ponctuel A entre eux. On note A_1 l'image de A par (m_1) , puis A_2 l'image de A_1 par (m_2) , etc.

7. Construire les images A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 .

8. Combien d'images peut-on observer ?



D'après CCINP

■ Fibre optique

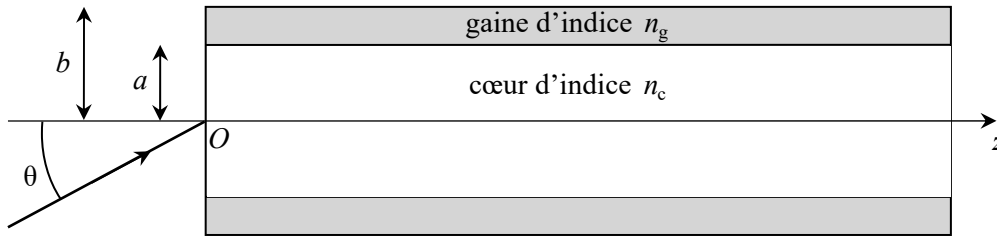
□ Exercice 1.14. Caractéristiques d'une fibre optique

Les câbles à fibres optiques permettent la transmission à haut débit de tous types de signaux électromagnétiques, sur de longues distances avec très peu d'atténuation ; ceux-ci se propagent comme la lumière. Chaque câble comporte un grand nombre de fibres très fines.



Une fibre optique à saut d'indice est assimilée à un cylindre de révolution d'axe (Oz) , de longueur L , constitué d'un cœur en polyméthacrylate de méthyle, de rayon a (de l'ordre de 8 à 50 μm) et d'indice $n_c = 1,49$, entouré d'une couche cylindrique de polymère fluoré, la gaine, d'épaisseur $b - a$ et d'indice $n_g = 1,40$. Le milieu extérieur a un indice n_0 .

Un rayon pénètre dans la fibre en O , en faisant un angle θ avec l'axe (Oz) .



1. Déterminer la valeur maximale admissible θ_a de l'angle θ pour que le rayon puisse être guidé dans la fibre, et calculer l'ouverture numérique $o_n = n_0 \sin \theta_a$.
2. On note τ la durée du trajet d'un rayon lumineux dans la fibre. Déterminer l'intervalle de temps $\Delta\tau = \tau_{\max} - \tau_{\min}$ entre les rayons les plus lents et les plus rapides en fonction de n_c , n_g , L et de la célérité c de la lumière dans le vide.
Calculer $\Delta\tau$ pour $L = 1,0 \text{ km}$, sachant que $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
3. Lors d'une communication par cette fibre optique, on envoie à l'entrée de la fibre des impulsions lumineuses avec une fréquence f . On souhaite récupérer ces impulsions distinctes en sortie ($L = 1,0 \text{ km}$). Montrer que la fréquence f doit être inférieure à une certaine valeur.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 1.2. Tous les termes d'une somme ont la même dimension, qui est aussi celle de la somme elle-même.

Exercices 1.8 et 1.9. La somme des trois angles d'un triangle vaut π .

Exercices 1.10 et 1.11. Pour savoir si le système est rigoureusement stigmatique, il faut vérifier si tous les rayons issus d'un point A semblent venir d'un même point A' après avoir traversé le système. Penser à utiliser le rayon non dévié.

Exercice 1.12. Faire apparaître le projeté H de I sur l'axe, et calculer séparément CH (facile) et HA' (plus difficile) pour en déduire $CA' = CH + HA'$.

Exercice 1.14. Pour que le rayon demeure dans la fibre, il faut qu'il y ait toujours réflexion totale au niveau du dioptré entre le cœur et la gaine.

■ ■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	vrai	faux	vrai	vrai	faux	faux	vrai	faux	faux

1. La vitesse de la lumière est $v = \frac{c}{n}$ donc $v_{\text{eau}} < v_{\text{air}}$.

5. La lumière solaire peut être décomposée (à l'aide d'un prisme, par exemple) en une infinité de radiations de longueurs d'ondes différentes.

8. Une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour observer une réflexion totale est que l'indice du premier milieu soit supérieur à celui du deuxième.

9. Seul le rayon confondu avec l'axe optique n'est pas dévié ; les autres sont déviés vers le foyer image principal.

□ Les erreurs classiques

- Faire attention à l'unité d'angle utilisée dans les calculs (degrés ou radians). Et quand on utilise les degrés, ne pas confondre les valeurs en degrés décimaux (avec des chiffres après la virgule), par exemple $24,30^\circ$, et celles en degrés et minutes, par exemple $24^\circ 30'$, qui est égal à $24,50^\circ$ puisque $1^\circ = 60'$.
- Les angles d'incidence, de réflexion et de réfraction sont mesurés à partir de la *normale* au dioptre, et non par rapport au dioptre lui-même.
- Bien vérifier l'homogénéité des formules ! Par exemple, une longueur ne peut être égale qu'à une autre longueur, mais en aucun cas à l'inverse d'une longueur, ou à un produit de deux longueurs...

■ ■ Corrigé des exercices

Exo minute 1.A

1. On applique la relation $f = \frac{c}{\lambda_0}$, ce qui donne pour $\lambda_0 = 0,40 \text{ }\mu\text{m}$, $f = 7,5 \times 10^{14} \text{ Hz}$ et pour $\lambda_0 = 0,80 \text{ }\mu\text{m}$, $f = 3,8 \times 10^{14} \text{ Hz}$.

2. La fréquence ne dépend pas du milieu, c'est une caractéristique intrinsèque d'une lumière donnée. Mais la longueur d'onde est modifiée lorsque la lumière change de milieu.

a) $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$. Application numérique (AN) : $0,31 \text{ }\mu\text{m}$ et $0,62 \text{ }\mu\text{m}$.

b) $\lambda' = \frac{\lambda_0}{n'}$. AN $0,27 \text{ }\mu\text{m}$ et $0,54 \text{ }\mu\text{m}$.

Exo minute 1.B

Il faut d'abord calculer l'angle i_2 entre le rayon réfracté et la normale au dioptre, en utilisant la

loi de Snell–Descartes de la réfraction : $n_2 \sin i_2 = n_1 \sin i_1$, ce qui donne $i_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin i_1\right)$.

Pour effectuer l'AN, convertissons d'abord l'angle d'incidence en degrés décimaux :

$i_1 = 32^\circ 12' = 32 + \frac{12}{60} = 32,20^\circ$. On obtient alors $i_2 = 27,50^\circ = 27^\circ 30'$.

La déviation du rayon est finalement : $D = |i_2 - i_1| = 4,70^\circ = 4^\circ 42'$.

Exercice 1.1

1. Cette lumière n'est pas rigoureusement monochromatique (ce qui n'est qu'un cas idéal), mais elle en est « très proche », c'est-à-dire que l'intervalle de fréquences est extrêmement étroit autour de la valeur f donnée. Et en tous cas, la lumière laser possède une monochromaticité beaucoup plus grande que n'importe quel autre type de lumière.

2. On utilise la formule $\lambda_0 = \frac{c}{f}$. AN $\lambda_0 = 0,63 \text{ }\mu\text{m}$. La couleur perçue par l'œil humain est rouge (car le rouge couvre l'intervalle approximatif de $0,62$ à $0,80 \text{ }\mu\text{m}$ dans le vide).

3. La vitesse est $v = \frac{c}{n}$. AN $v = 1,81 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La longueur d'onde devient $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{\lambda_0}{n}$.

AN $\lambda_0 = 0,38 \text{ }\mu\text{m}$. En revanche, la couleur, qui dépend de la fréquence et qui est donc intrinsèque, reste rouge.

Exercice 1.2

1. A est sans dimension, donc sans unité (comme n) et B a la dimension d'une longueur au carré ; il s'exprime donc en mètres carrés (m^2) dans le SI.

2.a) Il faut donc résoudre le système : $n_r = A + \frac{B}{\lambda_{0r}^2}$ (1) et $n_v = A + \frac{B}{\lambda_{0v}^2}$ (2).

On élimine A en effectuant la soustraction (2) - (1), ce qui permet d'obtenir $B = \frac{n_v - n_r}{1/\lambda_{0v}^2 - 1/\lambda_{0r}^2}$.

AN $B = \frac{1,652 - 1,618}{(4,34 \times 10^{-7})^{-2} - (7,68 \times 10^{-7})^{-2}}$ soit $B = 9,41 \times 10^{-15} \text{ m}^2$. On en déduit $A = 1,602$.

b) $n_j = 1,602 + \frac{9,41 \times 10^{-15}}{(5,89 \times 10^{-7})^2}$ soit $n_j = 1,629$.

Exercice 1.3

Le rayon lumineux réfracté dans le verre aura un angle de réfraction r tel que $\sin i = n \sin r$, soit $r = \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right)$. Or l'indice n dépend de la longueur d'onde dans le vide de la lumière incidente. Pour la lumière blanche, les valeurs extrêmes sont $\lambda_{0v} = 400 \text{ nm}$ (violet) et $\lambda_{0r} = 800 \text{ nm}$ (rouge). On a donc pour les indices correspondants $n_v = 1,530$ et $n_r = 1,511$.

Les angles de réfraction sont $r_v = \arcsin\left(\frac{\sin 40^\circ}{1,530}\right) = 24,84^\circ$ et $r_r = \arcsin\left(\frac{\sin 40^\circ}{1,511}\right) = 25,17^\circ$, ce qui représente un écart angulaire $\Delta r = r_r - r_v = 0,33^\circ = 20'$.

⇒ Méthode 1.1

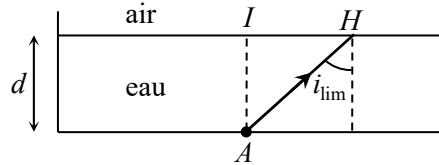
Exercice 1.4

1. Il faut que l'angle i d'incidence du rayon soit inférieur à l'angle limite, soit $i \leq i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{1}{1,33}\right) = 48,8^\circ$.

⇒ Méthode 1.1

2. Un rayon pourra traverser le dioptré eau-air si son angle d'incidence est inférieur à l'angle limite calculé précédemment.

La zone cherchée sera donc un disque de rayon $IH = d \tan i_{\text{lim}} = 2,85 \text{ m}$.



Exercice 1.5

1. Sur les dioptrés verre/air, l'angle de réflexion totale est $i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = 41^\circ 50'$. Or l'angle d'incidence du faisceau laser est $i = 45^\circ$, donc $i > i_{\text{lim}}$: il y a réflexion totale sur la face

oblique de gauche (avec un angle de réflexion de 45°), puis à nouveau sur la face de droite (avec les mêmes angles), et le rayon revient finalement entièrement vers (R).

⇒ Méthode 1.1

2. La nouvelle valeur de l'angle de réflexion totale est $i'_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n'}{n}\right) = 62^\circ 30'$. Maintenant

$i < i'_{\text{lim}}$: il n'y a plus réflexion totale. Cependant il y a toujours une réflexion partielle en même temps que la réfraction, donc le récepteur reçoit encore un peu de lumière, mais avec une intensité beaucoup plus faible que dans le cas précédent.

3. On peut suspendre ce dispositif au-dessus du réservoir et le faire descendre progressivement, tout en observant le signal capté par (R). L'intensité de ce signal reste sensiblement constante tant que le capteur est au-dessus de l'eau, puis diminue brusquement lorsqu'il s'immerge dans l'eau. Ainsi, en repérant la distance dont on a fait descendre le capteur (longueur de fil déroulé...), on peut connaître le niveau de l'eau.

Exercice 1.6

1. a) b) c) Voir schéma.

2. En notant H le projeté orthogonal de J (ou K) sur le dioptre, on peut écrire les relations trigonométriques :

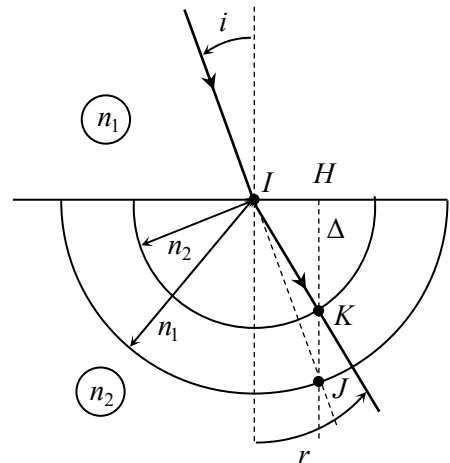
$$\sin i = \frac{HI}{IJ} = \frac{HI}{n_1} \quad \text{et} \quad \sin r = \frac{HI}{IK} = \frac{HI}{n_2}.$$

On en déduit donc que $HI = n_1 \sin i = n_2 \sin r$.

On retrouve bien la loi de la réfraction :

$$\boxed{n_1 \sin i = n_2 \sin r}.$$

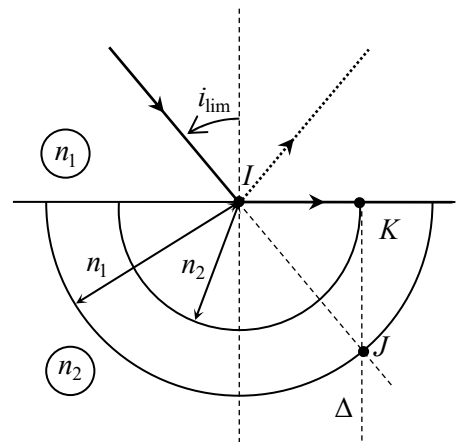
⇒ Méthode 1.3



3. L'angle limite d'incidence i_{lim} s'obtient pour $i_2 = \frac{\pi}{2}$ (ou 90°), on peut donc le déterminer graphiquement. Pour une valeur de i_1 supérieure à i_{lim} , il n'y a plus de point K donc on ne peut plus construire de rayon réfracté.

Dans le cas où un rayon lumineux passe du verre ($n_1 = 1,5$) à l'air ($n_2 = 1$), l'angle limite vaut

$i_\ell = \arcsin\left(\frac{1}{1,5}\right) = 41,8^\circ$. Pour $i_1 > 41,8^\circ$ il y aura réflexion totale.



Exercice 1.7

Pour qu'on obtienne l'effet indiqué, un rayon issu de H (sur le bord du mercure) doit émerger en M à la limite de la réflexion totale, ce qui revient à dire $\sin \alpha \geq \sin \alpha_{\text{lim}} = \frac{1}{n}$.

Or $\sin \alpha = \frac{r}{R}$ (dans le triangle rectangle OHM), donc la condition s'écrit : $\frac{r}{R} \geq \frac{1}{n} = 0,67$.

⇒ Méthode 1.1

Exercice 1.8

1. Lois de Snell–Descartes : en I , $\sin i = n \sin r$ (équation 1) ; en J , $\sin i' = n \sin r'$ (2).

– Par ailleurs, dans le triangle IJK , la somme des angles vaut π : $A + \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right) = \pi$

d'où $A = r + r'$ (3).

– Pour la déviation D , il faut remarquer que le rayon incident est dévié deux fois dans le même sens (vers la droite sur notre schéma). En I , le rayon entre dans le prisme en tournant de $i - r (> 0)$; puis en J , il tourne de $i' - r' (> 0)$. La déviation totale est donc $D = i + i' - r - r'$, et en utilisant la relation (3) on obtient $D = i + i' - A$ (4).

2. La réfraction en I (de l'air au verre, d'indice plus grand) existe pour toute valeur de i . En revanche, en J (du verre à l'air) elle est conditionnée à la valeur de r' : il faut que

$r' < r'_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ pour que le rayon émerge en J et ne subisse pas de réflexion totale.

La relation (3) $A = r + r'$ impose donc $r > A - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ et la relation (1) donne alors :

$i > \arcsin\left[n \sin\left(A - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = i_{\text{min}}$. L'angle d'incidence doit être assez grand.

⇒ Méthode 1.1

✎ Les fonctions sinus et arcsinus sont croissantes entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, donc une valeur minimale pour un angle correspond à une valeur minimale pour son sinus.

3. D'après (1), $\sin r = \frac{\sin i}{n} < \frac{1}{n}$ donc $r < \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Si on considère la condition sur r' : $r' < \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ ainsi que la relation (3), on en déduit qu'il

est impératif d'avoir $A < 2 \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = A_{\text{max}}$ pour que la lumière puisse émerger du prisme.

Celui-ci doit donc être assez pointu.

4. Pour $n = 1,74$, $A_{\text{max}} = 70^\circ 10'$ donc la valeur $A = 60^\circ$ convient.

La condition sur i est alors : $47^\circ 9' < i < 90^\circ$.

5.a) D'après la loi de retour inverse de la lumière, si on obtient une déviation minimale dans un sens pour un angle incident i , la déviation est aussi minimale dans l'autre sens, en inversant les rôles des rayons émergent et incident, donc pour un angle incident i' . Le minimum étant unique, on trouve nécessairement $i' = i$.

b) D'après les relations (1) et (2), si $i' = i$, alors $r' = r$. Les relations (4) et (3) donnent alors :

$$D_m = 2i - A \text{ d'où } i = \frac{A + D_m}{2} ; \text{ et } r = \frac{A}{2}. \text{ Or } n = \frac{\sin i}{\sin r}, \text{ soit } \boxed{n = \frac{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}}.$$

Exercice 1.9

1. Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence et $\sin i = n \sin r$ (1).

Écrivons la différentielle de cette expression : $\cos i \, di = n \cos r \, dr$, soit $\frac{dr}{di} = \frac{\cos i}{n \cos r}$.

En utilisant la relation (1) et la relation $\cos i = \sqrt{1 - \sin^2 i}$, on obtient : $\frac{dr}{di} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}}$.

2. Figure 1

a) $\alpha = r$ et $\beta = i$.

b) $D_1 = 2(i - r)$.

c) $dD_1 = 2di - 2dr$ et $\frac{dD_1}{di} = 2\left(1 - \frac{dr}{di}\right)$. La condition d'émergence d'un faisceau parallèle est

$\frac{dD_1}{di} = 0$, soit $\frac{dr}{di} = 1$. Or, d'après le résultat de la question 1, $\frac{dr}{di} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}}$, ce qui impose

que $n^2 - \sin^2 i = 1 - \sin^2 i$, donc que $n = 1$. Cette solution triviale n'a pas d'intérêt (il faudrait que l'indice de l'eau soit le même que celui de l'air !). Il n'est donc pas possible d'observer le faisceau parallèle recherché dans ces conditions.

Figure 2

a) $\alpha = \beta = \gamma = r$ et $\delta = i$.

b) $D_2 = 2(i - r) + \pi - 2r$.

c) $dD_2 = 2(di - dr) - 2dr = 2di - 4dr$. La condition d'émergence du faisceau parallèle s'écrit

$\frac{dr}{di} = \frac{1}{2}$ et le résultat de la question 1 conduit à $n^2 - \sin^2 i = 4(1 - \sin^2 i)$, soit $\boxed{\sin^2 i = \frac{4 - n^2}{3}}$.

Figure 3

a) $\varphi = \delta = \gamma = \beta = \alpha = r$ et $\xi = i$.

b) $D_3 = 2(i - r) + 2(\pi - 2r)$.

c) $dD_3 = 2(di - dr) - 4dr = 2di - 6dr$ donc la condition recherchée s'écrit $\frac{dr}{di} = \frac{1}{3}$, ce qui

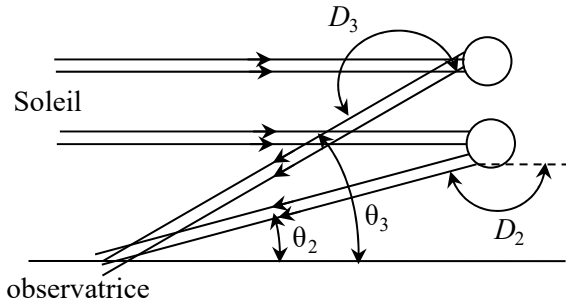
donne, en utilisant le résultat de la question 1 : $\boxed{\sin^2 i = \frac{9 - n^2}{8}}$.

3. Madame Michu ne verra la lumière émergente que si la condition d'émergence d'un faisceau parallèle est vérifiée, ce qui correspond au schéma ci-contre.

On constate les relations $\theta_2 = \pi - D_2$ et $\theta_3 = D_3 - \pi$.

Les gouttes devront donc être sur un cône centré sur l'observatrice et d'axe parallèle aux rayons incidents.

Elle observera deux arcs : l'un dû à la simple réflexion de la lumière dans une goutte (cas de la figure 2) et l'autre dû à la double réflexion (cas de la figure 3).



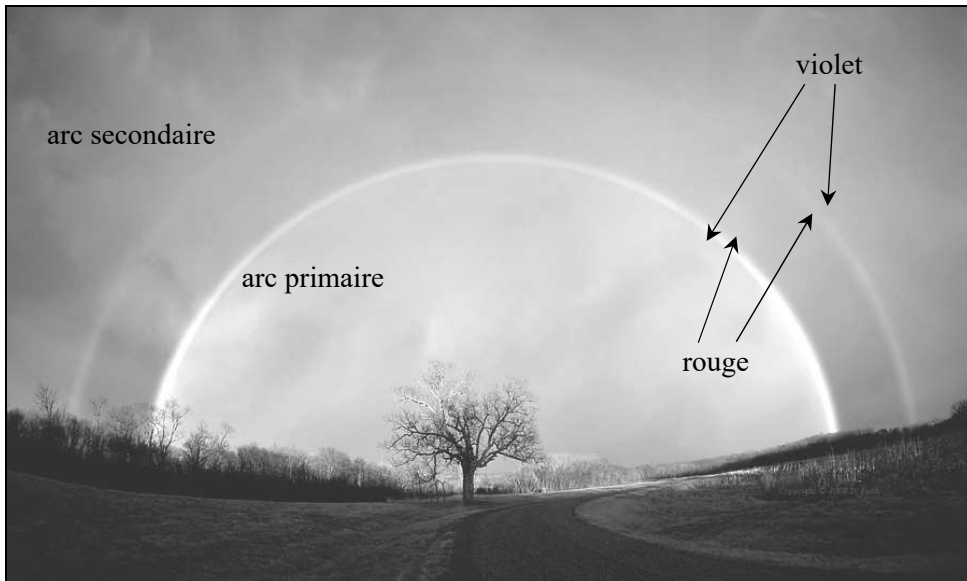
4. Pour la simple réflexion : $\theta_2 = \pi - D_2$, avec $D_2 = 2(i - r) + \pi - 2r$, et $i = \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$;

quant à r , il se calcule par la relation $r = \arcsin \left(\frac{\sin i}{n} \right)$. Pour la double réflexion : $\theta_3 = D_3 - \pi$,

avec $D_3 = 2(i - r) + 2(\pi - 2r)$, $i = \arcsin \sqrt{\frac{9 - n^2}{8}}$ et toujours $r = \arcsin \left(\frac{\sin i}{n} \right)$.

Angle (en degrés)	i_2	r_2	D_2	θ_2	i_3	r_3	D_3	θ_3
Violet ($n = 1,3448$)	58,75	39,48	139,58	40,41	71,50	44,85	233,87	53,87
Rouge ($n = 1,3317$)	59,51	40,33	137,71	42,29	71,92	45,56	230,48	50,48

5. On constate que l'arc secondaire (obtenu par double réflexion) est au-dessus de l'arc primaire (simple réflexion), puisque les angles sont plus grands, et que les couleurs des deux arcs sont inversées : violet à l'intérieur pour l'arc primaire, à l'extérieur pour l'arc secondaire.



Exercice 1.10

1. $\tan i_1 = \frac{\overline{OJ}}{\overline{AO}}$, $\tan i_2 = \frac{\overline{OJ}}{\overline{A'O}}$ et la loi de la réfraction en J s'écrit $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

⇒ Méthode 1.3

☛ Ici on travaille avec des angles orientés, ce qui permet d'obtenir des mesures algébriques et pas seulement des distances. Mais il faut les orienter correctement !

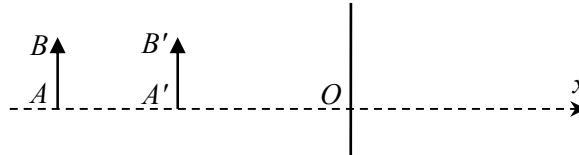
Ces trois relations entraînent que $\overline{OA'} = \overline{OA} \frac{\tan i_1}{\tan i_2} = \overline{OA} \times \frac{\sin i_1}{\cos i_1} \times \frac{\cos i_2}{\sin i_2}$.

Or $\cos i_1 = \sqrt{1 - \sin^2 i_1}$, $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ et $\cos i_2 = \sqrt{1 - \sin^2 i_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 i_1}$, ce qui

permet, après simplification, d'obtenir $\overline{OA'} = \overline{OA} \frac{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1}}{\sqrt{n_1^2 - n_1^2 \sin^2 i_1}}$.

2. La position de A' dépend de l'angle i_1 , donc du rayon étudié. On ne peut donc pas dire que tous les rayons issus de A sembleront venir d'un même point A' après réflexion : il n'y a pas d'image A' de A , le dioptre n'est pas un système rigoureusement stigmatique.

3. Si i_1 est faible, c'est-à-dire si on ne considère que les rayons faiblement inclinés par rapport à (Ox) , alors $\sin i_1 \ll 1$ d'où $\overline{OA'} \approx \frac{n_2}{n_1} \overline{OA}$. Cette relation ne dépend plus de i_1 donc A' est bien l'image de A dans ces conditions.



Cette relation étant valable pour tout point de l'objet AB , on en déduit que $A'B'$, image de AB par le dioptre, est également parallèle au dioptre et plus proche de ce dernier si $n_2 < n_1$ (mais plus éloignée si $n_2 > n_1$).

Exercice 1.11

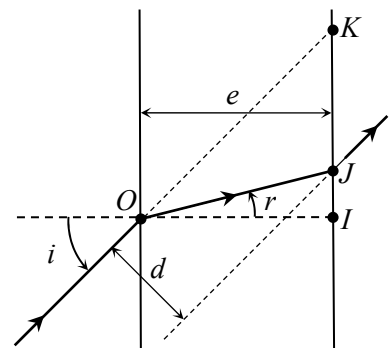
1. Un peu de trigonométrie permet de résoudre ce problème. Il est conseillé de faire un schéma très clair et de nommer les points remarquables : O, I, J et K .

$$d = JK \cos i = (IK - IJ) \cos i = e(\tan i - \tan r) \cos i$$

$$= e \left[\frac{\sin i}{\sqrt{1 - \sin^2 i}} - \frac{\sin r}{\sqrt{1 - \sin^2 r}} \right] \sqrt{1 - \sin^2 i}.$$

On utilise alors la loi de la réfraction : $\sin i = n \sin r$ d'où

$$d = e \sin i \left[1 - \frac{\sqrt{1 - \sin^2 i}}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \right].$$



⇒ Méthode 1.3

2. AN $d = 1,54 \text{ mm}$.

3. Cherchons l'image donnée par la lame d'un point A . Pour cela, on construit le trajet de deux rayons issus de A (on choisit l'un des deux orthogonal à la lame par commodité). Tout d'abord, il faut vérifier le stigmatisme de la lame, c'est-à-dire vérifier que la position de A' ne dépend pas de l'inclinaison des rayons issus de A .

Ce n'est pas vrai de façon exacte, car la formule précédente dépend de i .

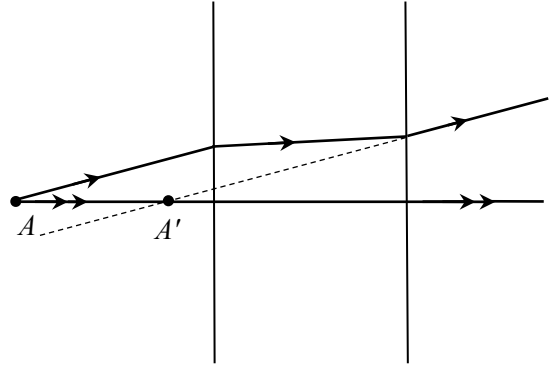
Mais pour i très faible : $\sin i \approx i \ll 1$ donc

$$d \approx ei \left[1 - \frac{1}{n} \right]. \text{ De plus } \sin i = \frac{d}{AA'} \approx i \text{ donc}$$

$$\text{on trouve } AA' \approx \frac{d}{i} \approx e \left[1 - \frac{1}{n} \right], \text{ qui est}$$

indépendant de i : la lame à face parallèle est stigmatique pour les angles faibles.

On constate alors que l'image A' est plus proche de la lame que A . La lame donne donc l'impression de rapprocher les objets.

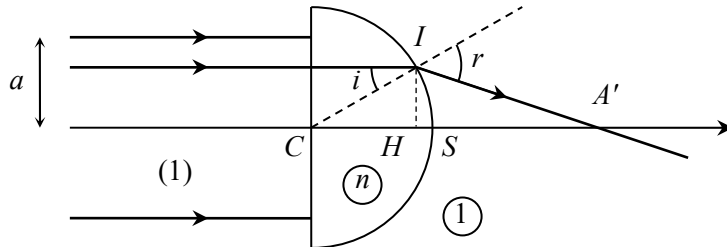


Exercice 1.12

1. On définit le point I , intersection entre le rayon incident et le dioptre sphérique, et le point H , projeté orthogonal de I sur l'axe, ce qui définit deux triangles rectangles.

Le rayon n'étant pas dévié par la face plane de la lentille (car il arrive selon la normale), on peut se contenter de considérer la réfraction au niveau de la face sphérique : $n \sin i = \sin r$.

$$\overline{CA'} = \overline{CH} + \overline{HA'} = \frac{HI}{\tan i} + \frac{HI}{\tan(r-i)} \text{ et } HI = R \sin i, \text{ donc } \boxed{\overline{CA'} = R \cos i + \frac{R \sin i}{\tan(r-i)}}.$$



⇒ Méthode 1.3

2. L'approximation de Gauss consiste à se limiter à des rayons paraxiaux, ce qui permet d'écrire $i \ll 1$, d'où également $r \ll 1$. Alors $\sin i \approx \tan i \approx i$, donc la loi de Snell–Descartes

$$\text{devient } ni \approx r; \text{ et } \cos i \approx 1 \text{ d'où } \overline{CA'} \approx R + \frac{Ri}{r-i} \approx R + \frac{Ri}{ni-i} \text{ soit } \boxed{\overline{CA'} \approx \frac{nR}{n-1} = \overline{CF'}}.$$

On a, dans ces conditions, une lentille stigmatique dont F' est le foyer principal image.

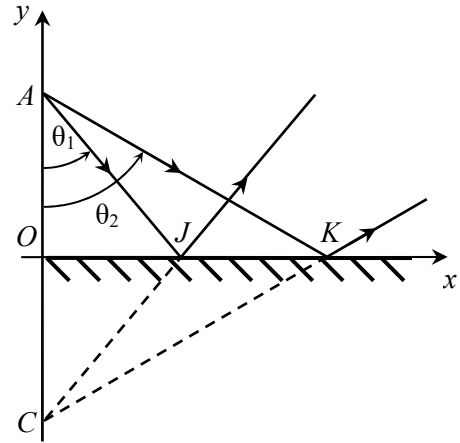
3. Pour qu'un rayon émergent existe, il faut que la loi de Snell–Descartes donne $\sin r \leq 1$ donc

$$\sin i \leq \frac{1}{n}. \text{ Or } \sin i = \frac{a_0}{R}, \text{ la condition est donc } \boxed{a_0 \leq \frac{R}{n} = 3,3 \text{ cm}.}$$

Exercice 1.13

1. Voir schéma.

2. Le rayon (1) a pour pente $\frac{1}{\tan \theta_1}$. L'équation cherchée est donc de la forme $y_1 = \frac{x}{\tan \theta_1} + k$. On détermine la constante k en imposant que le point J appartienne à cette droite, soit $0 = \frac{OJ}{\tan \theta_1} + k$ et donc $k = -\frac{OJ}{\tan \theta_1} = -a$. L'équation de la droite du rayon réfléchi (1) est donc :

$$\boxed{y_1 = \frac{x}{\tan \theta_1} - a}$$


⇒ Méthode 1.4

Pour le rayon (2), on utilise la même méthode en notant que sa pente est $\frac{1}{\tan \theta_2}$ et en utilisant le point K pour déterminer la constante. L'équation recherchée est alors

$$\boxed{y_2 = \frac{x}{\tan \theta_2} - a}$$

3. Pour déterminer le point d'intersection C , on cherche à résoudre l'équation $y_1 = y_2$.

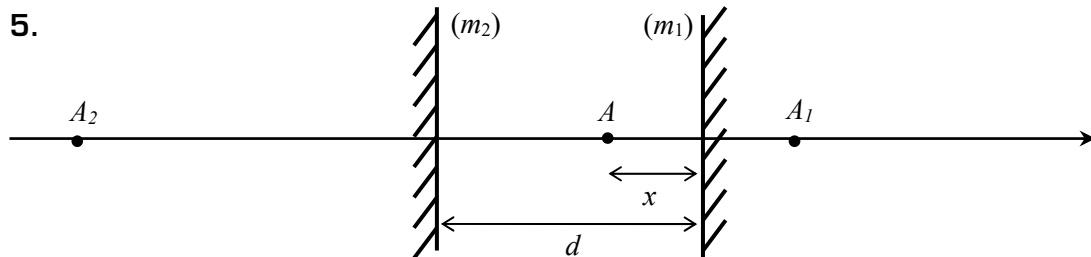
Donc $\frac{x_C}{\tan \theta_1} - a = \frac{x_C}{\tan \theta_2} - a$ et, vu que $\tan \theta_1 \neq \tan \theta_2$, alors $\boxed{x_C = 0}$ et $\boxed{y_C = -a}$.

4. Les angles θ_1 et θ_2 étant quelconques, on peut en déduire que tous les rayons issus de A semblent venir de C après réflexion. C est donc l'image de A par le miroir.

Ce n'est pas une approximation mais un résultat exact : il y a stigmatisme rigoureux du miroir.

Le miroir plan est le seul système optique rigoureusement stigmatique.

5.



$$\overline{AA_1} = 2x ; \quad \overline{AA_2} = \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} = 2x - 2(d+x) = -2d ;$$

$$\overline{AA_3} = \overline{AA_2} + \overline{A_2A_3} = -2d + 2(2d+x) = 2d + 2x ;$$

$$\overline{AA_4} = \overline{AA_3} + \overline{A_3A_4} = 2d + 2x - 2(3d+x) = -4d .$$

6. En continuant la suite, et par extrapolation, on obtient :

– si n est pair, $\overline{AA_n} = -nd$;

– si n est impair, $\overline{AA_n} = (n-1)d + 2x$.

On peut donc (en théorie) observer une infinité d'images.