Yves Coudert
Guillaume Ferré

L'ESSENTIEL DE L'ALGÈBRE EN L1

MP4

Corrections commentées
de certains exercices en **VIDÉOS**

ellipses

Chapitre 1

Raisonnements

Dans ce chapitre nous allons rencontrer les différents types de raisonnement que l'on peut être amené à utiliser en mathématiques. Dans toutes les situations rencontrées, il s'agira d'appliquer une suite de déductions logiques à partir d'une assertion, c'est-à-dire une affirmation mathématique et qui peut être soit vraie soit fausse, pour prouver la véracité ou non d'une autre assertion.

1. Le raisonnement direct

Définition : On appelle **raisonnement direct** un raisonnement du type « P implique Q » noté $P \implies Q$. Il s'agit ici de démontrer que si P est vraie alors Q est également vraie.

Exemple : Montrons que si m et n sont des entiers de parité différente alors $m + n$ est un entier impair.

Ici l'assertion P est « m et n sont deux entiers de parité différente » et l'assertion Q est « $m + n$ est un entier impair ».

Soient m et n deux entiers de parité différente. Quitte à échanger les rôles de m et n, on peut supposer l'entier m pair et l'entier n impair. Ainsi, il existe des entiers p et q tels que $m = 2p$ et $n = 2q + 1$. En sommant, on obtient le résultat $m + p = 2p + 2q + 1 = 2(p + q) + 1$ qui est donc bien un entier impair.

2. Le raisonnement par contraposée

Définition : On appelle **raisonnement par contraposée** un raisonnement reposant sur l'équivalence suivante :

$$(P \implies Q) \Leftrightarrow \big(non(Q) \Rightarrow non(P)\big)$$

où P, Q désignent des assertions et $non(P), non(Q)$ les négations respectives de ces assertions. Il s'agit de montrer que si $non(Q)$ est vraie alors $non(P)$ est également vraie.

Exemple : Montrons que pour tout entier naturel n, si n^2 est impair (assertion P) alors n est impair (assertion Q). Ici la propriété $non(Q)$ est « n est pair » et la propriété $non(P)$ est « n^2 est pair ».

Soit n un entier naturel pair, il existe un entier naturel p tel que $n = 2p$. Alors, $n^2 = (2p)^2 = 4p^2 = 2(2p^2) = 2p'$ avec $p' = 2p^2$. L'entier n^2 est donc bien un nombre pair.

3. Le raisonnement par disjonction de cas

Définition : On appelle **raisonnement par disjonction de cas** un raisonnement reposant sur l'implication

$$P_1 \text{ ou } P_2 \text{ ou } \dots \text{ ou } P_m \Longrightarrow Q$$

où $P_1, P_2, \dots, P_m$ et Q désignent des assertions et m un entier naturel non nul.

Il s'agit de montrer que, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq m$, on a $P_i \Longrightarrow Q$.

Exemple : Montrons que, pour tout entier n, l'assertion Q suivante :

« $p = n(n-5)(n+5)$ » est divisible par 3.

Pour cela, on va s'intéresser au reste dans la division euclidienne de l'entier n par 3. Celle-ci s'écrit $n = 3q + r$ où q désigne le quotient et r le reste (entier) de la division euclidienne avec $0 \leq r < 3$.

On introduit alors les assertions suivantes :

- P_1 : « le reste de la division euclidienne de n par 3 est 0 » ;
- P_2 : « le reste de la division euclidienne de n par 3 est 1 » ;
- P_3 : « le reste de la division euclidienne de n par 3 est 2 ».

Il s'agit de montrer P_1 ou P_2 ou $P_3 \Longrightarrow Q$. Procédons par disjonction de cas.

- Si P_1 est vraie alors il existe un entier q tel que $n = 3q$ et donc $p = 3q(3q-5)(3q+5) = 3q'$ en posant $q' = q(3q-5)(3q+5)$. L'entier p est bien divisible par 3.
- Si P_2 est vraie alors il existe un entier q tel que $n = 3q+1$ et donc $p = (3q+1)(3q-4)(3q+6) = 3(3q+1)(3q-5)(q+2) = 3q'$ en posant $q' = (3q+1)(3q-4)(q+2)$. L'entier p est divisible par 3.
- Si P_3 est vraie alors il existe un entier q tel que $n = 3q+2$ et $p = (3q+2)(3q-3)(3q+7) = 3(3q+2)(q-1)(3q+7)$ c'est-à-dire $p = 3q'$ en posant $q' = (3q+2)(q-1)(3q+7)$.

Ainsi, p est bien divisible par 3 dans tous les cas. Ceci donc termine la preuve car nous avons bien montré l'implication P_1 ou P_2 ou $P_3 \Longrightarrow Q$.

4. Le raisonnement par l'absurde

Définition : On appelle **raisonnement par l'absurde** un raisonnement pour lequel on va montrer que $P \Longrightarrow Q$ en supposant que l'assertion P est vraie et l'assertion Q est fausse, ce qui aboutit à une contradiction (une absurdité !) avec une proposition qui serait à la fois vraie et fausse.

Exemple : Démontrons le principe des tiroirs affirmant que, pour un entier naturel n non nul, si on doit ranger $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts alors au moins un tiroir contient 2 paires de chaussettes.

Ici, l'assertion P est « il y a $(n+1)$ paires de chaussettes à ranger dans n tiroirs distincts » et l'assertion Q est « au moins un tiroir contient 2 paires de chaussettes ». En réalisant un raisonnement par l'absurde, on suppose que P est vraie et Q fausse, c'est-à-dire que les tiroirs contiennent au plus une paire de chaussettes.

Il y aura alors au plus $1+1+\cdots+1=n$ paires de chaussettes dans les n tiroirs ce qui contredit le fait qu'il y a $(n+1)$ paires de chaussettes à ranger puisque P est vraie. D'où l'absurdité permettant de conclure que $P \Longrightarrow Q$.

5. Le raisonnement par récurrence

Définition : Le **raisonnement par récurrence** est un raisonnement qui s'articule selon les trois étapes données ci-après. On peut l'utiliser pour prouver qu'une assertion $P(n)$, dépendant d'un entier naturel n, est vraie à partir d'un certain entier naturel n_0.

Etape 1 – Initialisation

On prouve que $P(n_0)$ est vraie.

Etape 2 – Hérédité

On suppose que, pour un entier n fixé tel que $n \geq n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie puis on montre que l'assertion $P(n+1)$ est également vraie. On montre donc l'implication $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.

Etape 3 – Conclusion

D'après le principe (ou axiome) de récurrence, pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Exemple : En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que l'assertion « $P(n) : 2^n > n$ » est vraie pour tout entier naturel n.

Initialisation

On a $2^0 = 1 > 0$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité

On suppose que, pour un entier n naturel fixé, $P(n)$ est vraie. On peut alors écrire $2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2^n + 2^n$ or, par hypothèse de récurrence, $2^n > n \geq 0$.

Ainsi, $2^{n+1} > n + 2^n$ et $2^n \geq 1$ ce qui donne $2^{n+1} > n + 1$ et montre que l'assertion $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion

D'après le principe (ou axiome) de récurrence, pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie.

Remarque : La récurrence utilisée ici est appelée récurrence **faible**.

On parle de **récurrence forte** lorsque, dans la preuve de l'hérédité, on suppose que pour un entier $n \geq n_0$ l'assertion $P(k)$ est vraie pour tout entier k tel que $n_0 \leq k \leq n$.

Exercices

Exercice 1.1 : Montrer, par un raisonnement par contraposée, l'implication suivante. Pour tous réels $a + b$,

$a + b$ irrationnel $\Longrightarrow$ a ou b sont irrationnels.

Exercice 1.2 : On rappelle que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, l'implication suivante.

Pour tous entiers relatifs a et b,

$$a + b\sqrt{2} = 0 \implies a = b = 0.$$

Exercice 1.3 : (*) **Vidéo 1.3.** Le but de cet exercice est de démontrer, par contraposition et disjonction de cas, la propriété suivante :

Pour tout entier naturel n non nul, si l'entier $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair.

Exercice 1.4 : (*) Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'assertion $P(n) : 2^n > n^2$.

1. Montrer que l'implication $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie pour tout $n \geq 3$.

2. Pour quelles valeurs de n la propriété $P(n)$ est-elle vraie ?

Correction des exercices

Exercice 1.1 : Soient a et b des réels. On suppose que ces réels a et b sont des rationnels, ce qui correspond à $non(Q)$ c'est-à-dire la négation de l'assertion Q « a ou b sont irrationnels ». Il s'agit de montrer $non(P)$ c'est-à-dire « $a + b$ est un nombre rationnel ».

Comme a et b sont des rationnels, il existe des entiers relatifs p et p' ainsi que des entiers naturels non nuls q et q' tels que $a = \frac{p}{q}$ et $b = \frac{p'}{q'}$. On a donc

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{p \times q' + q \times p'}{q \times q'} = \frac{p''}{q''}.$$

Or p'' est un entier et q'' est un entier naturel non nul, ce qui permet d'affirmer que $a + b$ est rationnel. Par contraposition, on a bien démontré l'implication demandée.

Exercice 1.2 : Dans cet exercice nous avons les assertions P « $a + b\sqrt{2} = 0$ » et Q « $a = b = 0$ ». Ainsi, pour débuter notre raisonnement par l'absurde, nous allons considérer les assertions P et $non(Q)$ « $a^2 + b^2 \neq 0$ ».

Or, $b = 0 \Longrightarrow a = 0$, ce qui n'est pas possible avec $a^2 + b^2 \neq 0$ donc

$$b\sqrt{2} = -a \iff \sqrt{2} = -\frac{a}{b}.$$

Mais alors le réel $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Or, nous savons que $\sqrt{2}$ est irrationnel ce qui est contradictoire et qui permet de conclure.

Exercice 1.3 : Soit un entier naturel non nul n, les assertions P « $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 » et Q « n est pair » donnent $non(Q)$ « n est impair » et $non(P)$ « $n^2 - 1$ est divisible par 8 ».

Si n est impair alors il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$ et alors

$n^2 = (2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1$. Ainsi, $n^2 - 1 = 4p(p + 1)$.

- Si p est pair alors il existe un entier k tel que $p = 2k$ et $n^2 - 1 = 8k(2k + 1) = 8p'$ avec $p' = k(2k + 1)$. Donc $n^2 - 1$ est bien divisible par 8.
- Si p est impair alors il existe un entier k tel que $p = 2k + 1$ et $n^2 - 1 = 8(2k + 1)(k + 1) = 8p'$ avec $p' = (2k + 1)(k + 1)$. Ainsi, $n^2 - 1$ est bien divisible par 8.

On peut alors conclure car $\big(non(Q) \Rightarrow non(P)\big) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$.

<u>Exercice 1.4</u> : Pour un entier naturel n, soit l'assertion $P(n) : 2^n > n^2$.

1. On suppose que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 3$ donné.

On veut montrer que $P(n + 1)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, $2^n > n^2$ donc $2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2n^2$.

Déterminons les conditions pour que

$$2n^2 \geq (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 1 \geq 0.$$

Le discriminant du polynôme du second degré $q(n) = n^2 - 2n - 1$ s'écrit

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8.$$

Nous avons donc deux racines réelles $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$ avec $x_1 < x_2$.

Pour $n \geq 3 > x_2$, $q(n)$ est du signe de $a = 1 > 0$ alors

$q(n) > 0 \Leftrightarrow 2^{n+1} > (n + 1)^2$ donc $P(n + 1)$ est bien vraie pour tout $n \geq 3$.

2. $2^0 = 1 > 0^2$, $2^1 > 1^2$ soit $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

Les trois assertions suivantes ne sont pas vraies :

$P(2) :\ 2^2 > 2^2$, $P(3) : 2^3 = 8 > 3^2 = 9$ et $P(4)$: $2^4 = 16 > 4^2 = 16$.

Toutefois, $P(5) : 2^5 = 32 > 25 = 5^2$ est vraie.

Ainsi, on a l'initialisation et l'hérédité pour $n \geq 5$ et, d'après l'axiome de récurrence, on peut conclure que, pour tout $n \geq 5$, $P(n)$ est vraie.

Chapitre 2

Ensembles

Nous allons aborder dans ce chapitre des notions indispensables sur la théorie des ensembles et qui interviendront dans tous les thèmes traités dans ce livre. Ce chapitre est volontairement bref car, bien qu'ils ne soient pas toujours très approfondis, de nombreux points ont déjà été étudiés au lycée.

1. Description en extension d'un ensemble fini

Définition : La description **en extension** d'un ensemble est réservée à des ensembles finis où l'on écrit, entre des accolades, une liste exhaustive de leurs éléments.

Exemples : $E = \{0,1\}$ est l'ensemble contenant deux éléments 0 et 1.

A partir de ce dernier, on définit l'ensemble des parties de E :

$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, E\}$ où $\emptyset = \{\}$ désigne l'ensemble vide.

Dans cette écriture, l'ordre de l'écriture et les répétitions n'ont pas d'effet : $E = \{0,1\} = \{1,0\}$ et $E = \{1,1,0,0,0,3,2,1\}$.

2. Description en compréhension d'un ensemble

Définition : La description **en compréhension** d'un ensemble consiste à écrire entre accolades une phrase en langage courant et/ou à l'aide de symboles mathématiques qui décrit tous les éléments de cet ensemble.

Exemples :

1. $F = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 / \, x + y = 1\}$ est une description en compréhension de l'ensemble décrit en extension par $F = \{(0,1), (1,0)\}$.

2. $2\mathbb{N} = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$ est une description en compréhension de l'ensemble infini des nombres entiers naturels **pairs**, que l'on pourrait également écrire avec des pointillés, à mi-chemin entre extension et compréhension : $2\mathbb{N} = \{0,2,4, \dots\}$.

3. $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, p$ et q premiers entre eux$\}$ est une description en compréhension de l'ensemble des nombres **rationnels**, dans laquelle $\mathbb{Z}$

désigne l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

3. Opérations sur les ensembles

3.1 Inclusion

<u>Définition</u> : On considère deux ensembles E et F. On dit que l'ensemble E est **inclus** dans F, ou que E est une **partie** de F, que l'on écrit $E \subset F$ ou $E \subseteq F$, lorsque tout élément de E appartient à F.

<u>Exemples</u> :

1. L'inclusion $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

2. $F = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 / \, x + y = 1\} \subset D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x^2 + y^2 \leq 1\}$ où D est le disque de centre $O(0,0)$ et de rayon 1.

<u>Méthodes</u> :

- Pour montrer l'inclusion $E \subset F$, on se donne un élément quelconque de E et il faut prouver qu'il appartient à F.
- Pour montrer l'égalité $E = F$, on montre les deux inclusions $E \subset F$ et $F \subset E$.

<u>Remarque</u> : L'ensemble $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E, s'écrit en compréhension sous la forme $\mathcal{P}(E) = \{A, \, A \subset E\}$.

3.2 Complémentaire

<u>Définition</u> : Soit E un ensemble et A une partie de E. L'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A est appelé **complémentaire de A dans E**. On le note $\complement_E A$ ou $E \setminus A$ ou $\bar{A}$.

<u>Exemples</u> :

1. Si $E = \{1,2,3,4\}$ et $A = \{1,4\}$ alors $E \setminus A = \{2,3\}$.

2. Si $E = \mathbb{Z}$ alors $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers négatifs non nuls.

3.3 Réunion et intersection

<u>**Définitions**</u> **:** Soient E un ensemble, A et B des parties de E.

L'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou B est appelé **réunion** de A et de B. Cette réunion est notée $A \cup B$.

L'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A et B est appelé **intersection** de A et de B. Cette intersection est noté $A \cap B$.

<u>Exemples</u> :

1. Si $E = \{1,2,3,4\}$, $A = \{1,4\}$ et $B = \{1,3\}$ alors

$$A \cup B = \{1,3,4\} \text{ et } A \cap B = \{1\}.$$

2. Si $E = \mathbb{N}$, $A = \{2k, k \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{2k+1, k \in \mathbb{N}\}$ alors

$$A \cup B = \mathbb{N} \text{ et } A \cap B = \emptyset.$$

3.4 Différence symétrique

<u>**Définition**</u> **:** Soit E un ensemble, soient A et B des parties de E. La **différence symétrique** de A et B est le complémentaire de l'intersection de la réunion de A et de B c'est-à-dire $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Elle est alors notée $A\Delta B$.

<u>Exemples</u> :

1. Si $E = \{1,2,3,4\}$, $A = \{1,4\}$ et $B = \{1,3\}$ alors $A\Delta B = \{3,4\}$.

2. Si $E = \mathbb{N}$, $A = \{2k, k \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{2k+1, k \in \mathbb{N}\}$ alors $A\Delta B = \mathbb{N}$.

<u>Remarque</u> : La différence symétrique correspond au « ou exclusif » appelé « xor » en informatique.

3.5 Propriétés

Pour toutes parties A, B et C d'un ensemble E, nous avons tout d'abord deux propriétés :

- $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$; (**Commutativité**)
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ et $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(**Associativité**)

Egalement, deux propriétés de **distributivité** :

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Et enfin les propriétés suivantes :

- $A \cup \emptyset = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$; (**Elément neutre** ou **absorbant**)
- $E \setminus (E \setminus A) = A$; (**Complémentaire**)

et les lois de **Morgan** :

$$E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B) \text{ et } E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B).$$

4. Produit cartésien

Définition : Soient E et F des ensembles, le **produit cartésien** $E \times F$ est l'ensemble des couples formés d'un élément de E et d'un élément de F :

$$E \times F = \{(x, y), x \in E, y \in E\}.$$

Remarques :

1. Lorsque $E = F$, le produit cartésien est noté E^2.

2. Pour tous (x, y) et (x', y') dans $E \times F$, on a l'équivalence :

$$(x, y) = (x', y') \iff x = x' \text{ et } y = y'.$$

Exercices

Exercice 2.1 : Soient A et B des ensembles.

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $A \subset B$ *ii)* $A \cap B = A$ *iii)* $A \cup B = B$.

Exercice 2.2 : Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

Montrer l'équivalence suivante :

$$A \subset B \iff E \setminus B \subset E \setminus A.$$

Exercice 2.3 : (*) **Vidéo 2.3.** Soient A et B des ensembles. Montrer que :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ et } A \Delta B = A \iff B = \emptyset.$$

Exercice 2.4 : (**) Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles.

On raisonnera par l'absurde en introduisant $\mathcal{F} = \{x \in \mathcal{E}, x \notin x\}$ où $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble de tous les ensembles.

Correction des exercices

Exercice 2.1 : Montrons l'enchainement suivant : *i)* $\Longrightarrow$ *ii)* $\Longrightarrow$ *iii)* $\Longrightarrow$ *i)*.

[*i)* $\Longrightarrow$ *ii)*] On a toujours l'inclusion $A \cap B \subset A$. Soit $x \in A$, par hypothèse on a $A \subset B$ donc $x \in B$ et donc $x \in A \cap B$ d'où $A \subset A \cap B$.

Par double inclusion, on obtient bien $A \cap B = A$.

[*ii)* $\Longrightarrow$ *iii)*] On a toujours l'inclusion $B \subset A \cup B$. Soit $x \in A \cup B$, alors :

- Soit $x \in A = A \cap B$ (par hypothèse) donc $x \in B$;
- Ou alors, $x \in B$.

Dans tous les cas, $x \in B$ donc $A \cup B \subset B$ et, par double inclusion, on peut conclure que $A \cup B = B$.

[*iii)* $\Longrightarrow$ *i)*] Soit $x \in A$, alors $x \in A \cup B = B$ donc $A \subset B$.

Exercice 2.2 :

- Montrons d'abord le sens direct $A \subset B \Longrightarrow E \setminus B \subset E \setminus A$.

Supposons que $A \subset B$. Si $x \in E \setminus B$ alors $x \notin B$et donc $x \notin A$.

Ainsi, $x \in E \setminus A$ d'où l'inclusion $E \setminus B \subset E \setminus A$.

- Réciproquement, montrons que $E \setminus B \subset E \setminus A \Longrightarrow\ A \subset B$.

En posant $A^{'} = E \setminus B$ et $B^{'} = E \setminus A$, le sens direct nous donne

$$A' \subset B' \Longrightarrow E \setminus B' \subset E \setminus A'.$$

Or, $E \setminus B^{'} = E \setminus (E \setminus A) = A$ et $E \setminus A^{'} = E \setminus (E \setminus B) = B$.

On a donc le résultat souhaité : $E \setminus B \subset E \setminus A \Longrightarrow\ A \subset B$.

Par double implication, on a bien l'équivalence :

$$A \subset B \Longleftrightarrow E \setminus B \subset E \setminus A.$$

Exercice 2.3 : Montrons la première égalité par double inclusion.

Par définition, $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Si $x \in A\Delta B$ alors $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$. On a deux cas :

- Soit $x \in A$ et $x \notin A \cap B$ et donc $x \notin B$ et ainsi $x \in A \setminus B$;
- Soit $x \in B$ et $x \notin A \cap B$ et donc $x \notin A$ et ainsi $x \in B \setminus A$.

Par conséquent, $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ et $A\Delta B \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Réciproquement, si $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ alors on a deux cas :

- Soit $x \in A \setminus B$ et donc $x \in A$ et $x \notin B$.
  Alors, $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$ donc on a $x \in A\Delta B$.

- Soit $x \in B \setminus A$ et donc $x \in B$ et $x \notin A$.
  Alors, $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$ donc on a $x \in A\Delta B$.

On obtient ainsi la deuxième inclusion $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset A\Delta B$.

Par double inclusion, on a bien $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Montrons à présent l'équivalence par double implication.

[$\Longrightarrow$] On sait que $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A$.

Supposons par l'absurde que $B \neq \emptyset$. Soit $x \in B$, deux cas se présentent :

- Soit $x \in A$ alors $x \in A \cap B$ et donc $x \notin A\Delta B = A$ (Absurde).
- Soit $x \notin A$ alors $x \notin A \cap B$ et $x \in A \cup B$ donc $x \in A\Delta B = A$ (Absurde).

Dans tous les cas nous aboutissons à une contradiction et donc $B = \emptyset$.

[$\Longleftarrow$] Si $B = \emptyset$ alors $A \cup B = A$ et $A \cap B = \emptyset$. Ainsi, $A\Delta B = A$.

On a donc bien montré l'équivalence $A\Delta B = A \Leftrightarrow B = \emptyset$.

Exercice 2.4 : On raisonne par l'absurde en introduisant l'ensemble $\mathcal{F}$.

D'après le principe du tiers exclus, deux cas se présentent :

- Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{F}$ et alors, d'après la définition en compréhension de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \notin \mathcal{F}$… ce qui est absurde !
- Soit $\mathcal{F} \notin \mathcal{F}$ et alors, d'après la définition en compréhension de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{F}$… ce qui est absurde aussi !

Il n'existe donc pas d'ensemble de tous les ensembles.

Chapitre 3

Applications sur les ensembles et cardinalité

Ce chapitre aborde des notions essentielles sur les applications qui serviront de références, aussi bien en algèbre qu'en analyse d'ailleurs. Ce chapitre est également une introduction à la notion de cardinal d'un ensemble.

1. Les applications sur les ensembles

1.1 Définition d'une application

<u>Définition</u> : Soient E et F deux ensembles. Une **application** f de E dans F est une partie du produit cartésien $E \times F$ telle que, pour tout élément $x \in E$, il existe un unique élément $y \in F$ tel que (x, y) soit un élément de f. Ceci se note, compte tenu de l'unicité de y, $y = f(x)$.

<u>Remarques</u> :

1. Par rapport à la définition vue au lycée, où l'on parle d'ensemble de départ E et d'ensemble d'arrivée F, on assimile dans cette définition, basée sur la théorie des ensembles, une application $f: E \rightarrow F$ à son graphe. En d'autres termes, $f = \{(x, y) \in E \times F, y = f(x)\}$.

2. Dans toute la suite, l'ensemble des applications de E dans F sera noté $\mathcal{F}(E, F)$.

<u>Exemple</u> : L'**application identité** $Id_E: E \rightarrow E$ qui, à tout élément x associe x est assimilable à la diagonale de E : $Id_E = \{(x, x), x \in E)\}$.

1.2 Egalité de deux fonctions

<u>Définition</u> : Soient E et F deux ensembles.

On dit que deux applications f et g de E dans F sont **égales** si, pour tout élément $x \in E$, $f(x) = g(x)$.

On écrit alors $f = g$.

1.3 Composition de deux fonctions

<u>Définition</u> : Soient E, F et G des ensembles puis $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(F,G)$. L'**application composée** de f par g, notée $gof \in \mathcal{F}(E,G)$, est une application définie, $x \in E$, par $gof(x) = g\big(f(x)\big)$.

<u>Remarques</u> :

1. gof se lit « g rond f ».

2. Si $E = F = G$ alors, en général, $gof \neq fog$. On dit que la composition dans $\mathcal{F}(E,E)$ n'est pas commutative.

3. La composition est, en revanche, associative. Pour tous $f \in \mathcal{F}(E,F)$, $g \in \mathcal{F}(F,G)$ et $h \in \mathcal{F}(G,H)$, on a $(hog)of = ho(gof)$.

<u>Exemples</u> :

1. Pour tout $f \in \mathcal{F}(E,F)$, $fo\,Id_E = f$ et $Id_F\,o\,f = f$. En particulier, dans le cas où $E = F$, on a $fo\,Id_E = Id_E\,o\,f = f$.

2. Soient $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $f \in \mathcal{F}(E,E)$ définie pour tout $x \in E$ par $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

$\forall\, x \in E, f(x) \neq 1$ car $\frac{x+1}{x-1} = 1 \Leftrightarrow x+1 = x-1 \Leftrightarrow 1 = -1$ ce qui est impossible. Par conséquent, pour tout $x \in E$, $f(x) \in E$ et

$$fof(x) = f\big(f(x)\big) = \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \frac{x+1+x-1}{x+1-(x-1)} = x = Id_E(x).$$

On a donc $fof = Id_E$ et on dit alors que l'application f est une **involution**.

1.4 Image directe d'une application

<u>Définition</u> : Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E,F)$. L'**image directe** d'une partie A de E par l'application f est l'ensemble des images par f des éléments de A. Elle est notée $f(A)$.

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{y \in F, \exists x \in A\,, y = f(x)\}.$$

<u>Remarque</u> : L'ensemble $f(A)$ est une partie de F.

L'ensemble $f(E) = Im(f)$ est appelé **image** de f.

<u>Exemple</u> : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ la fonction carrée définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2.$$

Si $A = [-1,2]$ alors $f(A) = [0,4]$.

1.5 Image réciproque

Définition : Soient E et F des ensembles et $f \in \mathcal{F}(E,F)$. L'**image réciproque** (ou **inverse**) d'une partie B de F par l'application f, notée $f^{-1}(B)$, est l'ensemble des antécédents des éléments de B par f.

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}.$$

Remarque : L'ensemble $f^{-1}(B)$ est une partie de E.

Si $B = \{b\}$ avec $b \in F$ alors $f^{-1}(B)$ est appelé la **fibre** de b.

On parle également de l'**ensemble des antécédents** de b.

Exemple : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ la fonction carrée définie plus haut.

Alors $f^{-1}([1,2]) = \left[-\sqrt{2},-1\right] \cup \left[1,\sqrt{2}\right]$ et $f^{-1}(\{4\}) = \{-2,2\}$.

2. Injection, surjection et bijection

2.1 Injection

Définition : Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

On dit que l'application f est une **injection**, ou que f est **injective**, lorsque

$$\forall\, (x,y) \in E^2, \qquad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y.$$

Remarques :

1. f est une injection si tout élément de F admet au plus un antécédent.

2. Par contraposition de la définition, on a le résultat suivant :

$$f \text{ est une injection} \Longleftrightarrow \forall\, (x,y) \in E^2,\ x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y).$$

Méthodes :

- Pour montrer qu'une application f est injective, on fixe deux éléments de E et on résout l'équation $f(x) = f(y)$ pour montrer que $x = y$.

- Pour montrer qu'une application f n'est pas injective, il suffit de trouver un couple $(x, y) \in E^2$ tel que $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$.

Exemples :

1. La fonction carrée est une injection sur $\mathbb{R}^+$ car, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$.

2. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ définie, pour tout $x \in \mathbb{N}$, par $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Montrons que f est injective. Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$,

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+y} \Leftrightarrow 1 + x = 1 + y \Leftrightarrow x = y.$$

La fonction f est donc bien injective.

3. Reprenons l'exemple de la fonction carrée, cette fois-ci définie sur $\mathbb{R}$.

On a $f^{-1}(\{4\}) = \{-2,2\}$ donc 4 possède 2 antécédents et ainsi l'application f n'est pas injective.

2.2 Surjection

Définition : Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

On dit que l'application f est une **surjection**, ou que f est **surjective**, lorsque

$$\forall\, y \in F, \qquad \exists\, y \in E, \qquad y = f(x).$$

Remarques :

1. f est une surjection si tout élément de F admet au moins un antécédent.

2. f est surjective si est seulement si $f(E) = F$.

Méthodes :

- Pour montrer qu'une application f est surjective, on fixe un élément $y \in F$ et on montre qu'il existe au moins un $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
- Pour montrer qu'une application f n'est pas surjective, il suffit d'exhiber un élément $y \in F$ qui n'admet aucun antécédent.

Exemples :

1. La fonction carrée est une surjection sur $\mathbb{R}^+$ car, pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, en prenant $x = \sqrt{y}$ on a $f(x) = (\sqrt{y})^2 = y$.

2. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ définie pour tout $x \in \mathbb{N}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Montrons que f n'est pas surjective.

$0 \in \mathbb{Q}$ n'a pas d'antécédent car

$$\forall\, x \in \mathbb{N}\,, \qquad f(x) = \frac{1}{1+x} \neq 0.$$

3. Soient E et F deux ensembles avec $F \neq \emptyset$ et $f \in \mathcal{F}(E \times F, E)$ définie par

$$\forall\, (x,y) \in E \times F\,, \qquad f\big((x,y)\big) = x.$$

L'application f est surjective car, pour tout $x \in E$, comme $F \neq \emptyset$ il existe au moins un $y \in F$ tel que $f\big((x,y)\big) = x$.

2.3 Bijection

Définition : Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E,F)$. On dit que l'application f est une **bijection** ou que f est **bijective** lorsque f est une injection et une surjection.

Remarques :

1. f est une bijection si tout élément de F admet un **unique** antécédent.

2. Si $f \in \mathcal{F}(E,F)$ est injective alors l'application $\hat{f} \in \mathcal{F}\big(E, Im(f)\big)$ définie par $\forall\, x \in E\,,\ \hat{f}(x) = f(x)$ est une bijection.

Méthodes :

- Pour montrer qu'une application f est bijective, on fixe un élément $y \in F$ et on montre qu'il existe un unique élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
- Pour montrer qu'une application f n'est pas bijective, il suffit de montrer que f n'est pas injective ou surjective.

Théorème :

- **Bijectivité par existence d'une réciproque**

Soient E et F deux ensembles. L'application $f \in \mathcal{F}(E,F)$ est bijective si et seulement si il existe une application $g \in \mathcal{F}(F,E)$ telle que $fog = gof = Id_E$.

L'application g est unique. Elle est notée f^{-1} et appelée **application réciproque** ou **inverse** de f.

- **Composée de bijections**

Soient E, F et G des ensembles et deux bijections $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(F,G)$. Alors gof est une bijection et $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$.

Remarque : L'image réciproque $f^{-1}(B)$ d'un ensemble $B \subset F$ par une application $f \in \mathcal{F}(E,F)$ est définie même si f n'est pas bijective.

Exemples :

1. La fonction carrée est une bijection sur $\mathbb{R}^+$ car elle est à la fois injective et surjective (voir les exemples des paragraphes 2.1 et 2.2).

2. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{Q})$ définie pour tout $x \in \mathbb{N}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$. L'application f n'est pas bijective car f n'est pas surjective (voir l'exemple du paragraphe 2.2).

3. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \mathbb{R} \setminus \{0\})$ définie pour tout $x \neq -1$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Montrons que f est une bijection.

Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on cherche $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ tel que

$$y = f(x) = \frac{1}{1+x} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = 1 + x \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} - 1.$$

Ceci fournit l'existence et l'unicité de $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ car $\frac{1}{y} \neq 0$.

Ainsi, f est bien une bijection. Sa fonction réciproque f^{-1} est un élément de l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ et définie par

$$\forall\, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad f^{-1}(y) = \frac{1}{y} - 1.$$

4. (a) Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction affine définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$f(x) = mx + p$ avec $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $p \in \mathbb{R}$. Montrons que f est une bijection.

Soit $y \in \mathbb{R}$, on cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que

Cours

$$y = f(x) = mx + p \Leftrightarrow mx = y - p \Leftrightarrow x = \frac{1}{m}y - \frac{p}{m}.$$

Ceci donne l'existence et l'unicité de x. Ainsi f est une bijection et sa fonction réciproque $f^{-1} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est définie par

$$\forall\, y \in \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(y) = \frac{1}{m}y - \frac{p}{m}.$$

4. (b) Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions affines définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ et $g(x) = m'x + p'$ avec $m, m' \in \mathbb{R}^*$ et $p, p' \in \mathbb{R}$.

D'après la question 4. (a), les deux fonctions sont bijectives et, par conséquent, gof est également bijective.

$$\forall\, y \in \mathbb{R}, \qquad (gof)^{-1}(y) = f^{-1}og^{-1}(y) = f^{-1}\big(g^{-1}(y)\big) = \frac{1}{m}g^{-1}(y) - \frac{p}{m}.$$

Donc

$$(gof)^{-1}(y) = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m'}y - \frac{p'}{m'}\right) - \frac{p}{m} = \frac{1}{mm'}y - \frac{p'}{mm'} - \frac{p}{m}.$$

3. Cardinal d'un ensemble

3.1 Ensembles équipotents et cardinalité

Définitions : Soient E et F deux ensembles. On dit que E est **équipotent** à F lorsqu'il existe une bijection de E dans F.

On dit qu'ils ont alors le même **cardinal**.

Remarque :

Un ensemble E est équipotent à lui-même en prenant Id_E comme bijection (on parle de *réflexivité*).

De plus, si un ensemble E est équipotent à un ensemble F alors F est équipotent à E (on parle de *symétrie*) car si $f \in \mathcal{F}(E, F)$ est une bijection alors $f^{-1} \in \mathcal{F}(F, E)$ est également une bijection.

Enfin, si un ensemble E est équipotent à un ensemble F et si F est équipotent à un autre ensemble G alors E est équipotent à G (on parle de *transitivité*).

La conjonction des trois propriétés ci-dessus permet de dire que la relation « être équipotent » définit une **relation d'équivalence** dans laquelle les classes d'équivalence sont formées des ensembles de même cardinal.

Exemple : On considère l'application $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$ définie par

- $f(n) = -\frac{n}{2} \in \mathbb{Z}$ si $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$;
- $f(n) = \frac{n+1}{2} \in \mathbb{Z}$ si $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$.

Montrons que f est injective.

Soient n et m des entiers naturels tels que $f(n) = f(m)$.

Puisque $f(n)$ et $f(m)$ sont de même signe, n et m sont de même parité :

- S'ils sont pairs alors $-\frac{n}{2} = -\frac{m}{2} \Leftrightarrow n = m$;
- S'ils sont impairs alors $\frac{n+1}{2} = \frac{m+1}{2} \Leftrightarrow n = m$.

Dans tous les cas, $f(n) = f(m) \Longrightarrow n = m$ donc f est bien injective.

Montrons à présent que f est surjective.

Soit $k \in \mathbb{Z}$,

- Si $k \in \mathbb{N}^*$ alors $2k - 1 \in \mathbb{N}$ est impair et $f(2k - 1) = \frac{2k-1+1}{2} = k$.
- Si $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$, $-2k \in \mathbb{N}$ est pair et $f(-2k) = -\frac{-2k}{2} = k$.

L'application f est bijective : $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont équipotents et donc de même cardinal.

3.2 Ensembles infinis et finis

Définitions : Un ensemble E est dit **infini** s'il est équipotent à une partie de E différente de E tout entier. Dans le cas contraire, on dit que l'ensemble est **fini**.

Un ensemble est dit **dénombrable** lorsqu'il est équipotent à $\mathbb{N}$.

Théorème :

Soit E un ensemble non vide en bijection avec l'ensemble $F = \{1, \dots, n\}$ où n est un entier naturel non nul.

On note $card(E) = card(F) = n$ le cardinal de E et F.

Alors l'ensemble E est fini et $card(E)$ est le nombre d'éléments de E.

Remarque : L'ensemble vide est fini car il n'est équipotent à aucune partie stricte. On écrit alors $card(\emptyset) = 0$.

Propriétés :

- Pour toute partie A d'un ensemble E fini,
  $$card(A) \leq card(E) \quad \text{et} \quad card(A) = card(E) \Leftrightarrow E = A \, ;$$

- Si E et F sont des ensembles finis alors
  $$card(E \times F) = card(E) \times card(F) \, ;$$

- Si A et B sont des parties d'un ensemble fini E alors
  $$card(A \cup B\,) = card(A) + card(B) - card(A \cap B) \, ;$$

- Si E et F sont des ensembles finis et $f \in \mathcal{F}(E, F)$,
  Si f est injective alors $card(E) \leq card(F)$
  Si f est surjective alors $card(E) \geq card(F)$;

- Si E et F sont des ensembles finis non vides alors
  $$card\big(\mathcal{F}(E, F)\big) = card(E)^{card\,(F)} \, ;$$

- Si E et F sont des ensembles finis non vides et de même cardinal,
  Si $f \in \mathcal{F}(E, F)$ alors on a les équivalences suivantes :
  f bijective $\Leftrightarrow$ f injective $\Leftrightarrow$ f surjective ;

- Si E et F sont des ensembles finis de cardinal $n > 0$ alors il existe $n\,! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$ bijections de E dans F ;

- Si E et F sont des ensembles finis avec $card(E) = k$, $card(F) = n$ et $k \leq n$ alors il existe $\frac{n\,!}{(n-k)!}$ injections de E dans F.

Exemples :

1. $\mathbb{Z}$ est un ensemble infini et dénombrable car il est en bijection avec $\mathbb{N}$ qui est une partie stricte de $\mathbb{Z}$ (voir l'exemple du paragraphe 3.1).

2. $\mathbb{N}$ est infini car il est en bijection avec $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ en considérant $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N}^*)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = n + 1$.

3. Si E est un ensemble fini alors on associe, à toute partie $A \subset E$, une application $\chi_A \in \mathcal{F}(E, \{0,1\})$ définie par

- Si $x \in A$ alors $\chi_A(x) = 1$;
- Si $x \notin A$ alors $\chi_A(x) = 0$.

χ_A est appelée **fonction caractéristique** de A.

L'application $g : A \longrightarrow \chi_A$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E, vers $\mathcal{F}(E, \{0,1\})$.

En effet, soit $f \in \mathcal{F}(E, \{0,1\})$. On considère $A = f^{-1}(\{1\})$ et il y a alors existence et unicité de l'ensemble A tel que $g(A) = \chi_A = f$.

On obtient alors $card\big(\mathcal{P}(E)\big) = card\big(\mathcal{F}(E, \{0,1\})\big)$.

Nous avons alors $card\big(\mathcal{P}(E)\big) = card(\{0,1\})^{card\,(E)} = 2^{card\,(E)}$.

Enfin, d'après le paragraphe 1.5 du chapitre 1, pour tout entier naturel n,

$$2^n > n.$$

Par conséquent, $card\big(\mathcal{P}(E)\big) > card(E)$.

Exercices

Exercice 3.1 : Soient $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ et $g \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ définies par :

$$\forall\, x \in \mathbb{N},\ f(x) = 2x \ \text{ et } g(x) = \frac{x}{2} \text{ si } x \text{ est pair et } g(x) = 0 \text{ sinon.}$$

1. Déterminer gof et fog.

2. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et g.

Exercice 3.2 : Soient E, F et G des ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors gof est également injective.

2. Montrer que si f et g sont surjectives alors gof est également surjective.

3. Montrer que si gof est injective alors f est également injective.

4. Montrer que si gof est surjective alors g est également surjective.

Exercice 3.3 : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \mathbb{Q})$ définie, pour tout $(n, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par

$$f\big((n, d)\big) = \frac{n}{d}.$$

1. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f.

2. Déterminer une partie $A \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$ telle que l'application $f \in \mathcal{F}(\mathbb{Z} \times A, \mathbb{Q})$ soit injective.

<u>Exercice 3.4</u> : (*) Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ un polynôme du second degré défini, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x + 1$.

1. Ecrire ce polynôme sous forme canonique.

2. Déterminer l'image directe et l'image réciproque de l'intervalle $[0,1]$ par f.

3. Montrer que f n'est pas injective.

4. Trouver un intervalle $K \subset \mathbb{R}$ tel que $f \in \mathcal{F}(K, \mathbb{R})$ soit injective.

5. L'application $f \in \mathcal{F}(K, \mathbb{R})$ est-elle surjective ?

6. Trouver un intervalle $L \subset \mathbb{R}$ pour que $f \in \mathcal{F}(K, L)$ soit bijective et déterminer l'application réciproque $f^{-1} \in \mathcal{F}(L, K)$.

<u>Exercice 3.5</u> : (*) **Vidéo 3.5.** Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ et définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\big((x, y)\big) = (x - y, ax + y).$$

1. Déterminer l'ensemble A des valeurs de a telles que f soit une injection.

2. Soit $a \in A$. Montrer que f est bijective et déterminer l'application f^{-1}.

3. Soit $a \notin A$. Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(\{(0,0)\})$.

<u>Exercice 3.6</u> : (**) Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par

$$f\big((x, y)\big) = x^2 - y^2.$$

1. Etudier l'injectivité et la surjectivité de l'application f.

2. Déterminer $f(\mathbb{R} \times \{0\})$ et $f^{-1}(\{0\})$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2, x^2 - y^2 = n\}$.

Déterminer l'ensemble F des valeurs de n telles que A_n soit fini.

4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus F$*. L'ensemble A_n est-il dénombrable ?

<u>Exercice 3.7</u> : (**) Soit E un ensemble. Prouver le **théorème de Cantor** affirmant qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$ et, en particulier, que E et $\mathcal{P}(E)$ ne sont pas équipotents.

Procéder par l'absurde en supposant qu'il existe une telle surjection

$f \in \mathcal{F}\big(E, \mathcal{P}(E)\big)$ *puis introduire l'ensemble* $D = \{x \in E,\ x \notin f(x)\}$*).*

Correction des exercices

<u>Exercice 3.1</u> : Soient $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ et $g \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ définies par :

$$\forall\, x \in \mathbb{N},\ f(x) = 2x \text{ et } g(x) = \frac{x}{2} \text{ si } x \text{ est pair et } g(x) = 0 \text{ sinon.}$$

1. D'une part,

$\forall\, x \in \mathbb{N}$, $gof(x) = g(2x) = \frac{2x}{2} = x$ ainsi $gof = Id_{\mathbb{N}}$.

D'autre part,

$fog(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(\frac{x}{2}\right) = 2\left(\frac{x}{2}\right) = x$ si x est pair ;

$fog(x) = f\big(g(x)\big) = f(0) = 2(0) = 0$ sinon.

2. Etudions l'injectivité et la surjectivité de f et g.

Pour tous $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$, on a $f(x) = f(y) \Leftrightarrow 2x = 2y \Leftrightarrow x = y$ donc l'application f est injective.

Par ailleurs, $g(1) = g(3) = 0$ donc l'application g n'est pas injective.

De plus, $f(x) = 1 \Leftrightarrow 2x = 1$ et cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$ donc 1 n'a pas d'antécédent. L'application f n'est donc pas surjective.

Enfin, si $y \in \mathbb{N}$ alors $x = 2y \in \mathbb{N}$ et $g(x) = g(2y) = \frac{2y}{2} = y$.

L'application g est donc surjective.

<u>Exercice 3.2</u> : Soient E, F et G des ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(G, H)$.

1. Montrons que si f et g sont injectives alors gof l'est également.

Soit $x \in E$ et $y \in E$,

$$gof(x) = gof(y) \Leftrightarrow g\big(f(x)\big) = g\big(f(y)\big) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

car f et g sont injectives.

2. Montrons que si f et g sont surjectives alors gof l'est aussi.

Soit $z \in H$. Puisque g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$.

Or, f est surjective donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

On a donc $z = g(y) = g\big(f(x)\big) = gof(x)$ et gof est donc bien surjective.

3. Montrons que si gof est injective alors f l'est également.

On suppose que gof est injective. Soient $x \in E$ et $y \in E$,

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow g\big(f(x)\big) = g\big(f(y)\big) \Longrightarrow x = y.$$

L'application f est bien une injection.

4. Montrons que si gof est surjective alors g l'est aussi.

Soit $z \in H$. Il existe $x \in E$ tel que $gof(x) = z$. On pose $y = f(x) \in F$ et on a alors $g(y) = z$.

L'application g est bien une surjection.

<u>Exercice 3.3</u> : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}, \mathbb{Q})$ définie par :

$$\forall\, (n,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\},\ f\big((n,d)\big) = \tfrac{n}{d}.$$

1. f n'est pas injective car $f\big((4{,}2)\big) = \frac{4}{2} = 2 = f\big((2{,}1)\big)$.

Mais f est surjective car $q = \frac{n}{d} = f((n,d)) \in \mathbb{Q}$ où $(n,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

2. Soit $A = \{1\}$ une partie de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. L'application $f \in \mathcal{F}(\mathbb{Z} \times A, \mathbb{Q})$ est injective car pour tous $(n,1) \in \mathbb{Z} \times A$ et $(n',1) \in \mathbb{Z} \times A$ on a

$$f\big((n,1)\big) = f\big((n',1)\big) \Leftrightarrow n = n'.$$

<u>Exercice 3.4</u> : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ un polynôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 + x + 1.$$

1. f est un polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = b = c = 1$. Il admet donc une forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$ et $\beta = f(\alpha) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$.

Finalement, $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Déterminons l'image directe $f([0{,}1])$. Nous pouvons écrire :

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

Comme la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \leq \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leq \frac{9}{4} + \frac{3}{4}.$$

Par conséquent, $1 \leq f(x) \leq 3$ et ainsi on obtient $f([0,1]) = [1,3]$.

Déterminons à présent l'image réciproque de $[0,1]$ par f :

$$0 \leq f(x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}.$$

- D'une part, $x + \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$ et $0 \leq -x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq -1$.
  Donc $-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$.
- D'autre part, $x + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ et $0 \leq x + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 0$.

Donc $f^{-1}([0,1]) = \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}, 0\right] = [-1,0]$.

3. f n'est pas injective car $f(0) = f(-1) = 1$.

4. On cherche un intervalle $K \subset \mathbb{R}$ tel que $f \in \mathcal{F}(K, \mathbb{R})$ soit injective.

Soient $x \in K$ et $y \in K$,

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow (x + y + 1)(x - y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ \text{ou} \\ x = y \end{cases}.$$

Si $K = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ alors $x + y = -1 \Longrightarrow x = y = -\frac{1}{2}$.

Donc $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$ et, par conséquent, $f \in \mathcal{F}(K, \mathbb{R})$ est injective.

5. Soit $f \in \mathcal{F}(K, \mathbb{R})$ avec $K = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ alors $f(x) = 0$ n'admet pas de solution car $f(x) \geq \frac{3}{4}$. Par conséquent, $f \in \mathcal{F}(K, \mathbb{R})$ n'est pas surjective.

6. Soit $K = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et $L = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$ alors $f \in \mathcal{F}(K, L)$ est bijective.

En effet, pour tout $y \in L$,

$$f(x) = y \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = y \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = y - \frac{3}{4} \geq 0$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{3}{4}} \geq -\frac{1}{2}.$$

L'application réciproque $f^{-1} \in \mathcal{F}(L, K)$ est alors définie de la façon suivante :

$$\forall\, y \in \left[\frac{3}{4}, +\infty\right[, \qquad f^{-1}(y) = -\frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{3}{4}}.$$

<u>Exercice 3.5</u> : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ définie par :

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f\big((x, y)\big) = (x - y, ax + y).$$

1. Déterminons l'ensemble A des valeurs de a telles que f soit une injection.

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$,

$$f\big((x, y)\big) = f\big((x', y')\big) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = x' - y' \\ ax + y = ax' + y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + a)x = (1 + a)x' \\ ax + y = ax' + y' \end{cases}.$$

- Si $a \neq -1$ alors $f\big((x, y)\big) = f\big((x', y')\big) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.
  L'application f est donc injective.
- Si $a = -1$ alors $f\big((1,1)\big) = f\big((2,2)\big) = (0,0)$.
  On peut donc en conclure que f n'est pas injective.

Finalement, l'ensemble cherché est $A = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2. Soit $a \in A = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, montrons que f est surjective.

Soit $(r, s) \in \mathbb{R}^2$,

$$f\big((x, y)\big) = (r, s) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = r \\ ax + y = s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + a)x = r + s \\ y = s - ax \end{cases}$$

donc

$$f\big((x, y)\big) = (r, s) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{r + s}{1 + a} \\ y = s - a\left(\dfrac{r + s}{1 + a}\right) = \dfrac{s(1 + a) - a(r + s)}{1 + a} = \dfrac{s - ar}{1 + a} \end{cases}.$$

On peut donc en conclure que f est bien surjective.

L'application f est donc une bijection pour tout $a \in A$ et, dans ce cas :

$$\forall\,(r,s) \in \mathbb{R}^2, \qquad f^{-1}\big((r,s)\big) = \left(\frac{r+s}{1+a}, \frac{s-ar}{1+a}\right).$$

3. Pour $a \notin A$ c'est-à-dire $a = -1$.

$$f^{-1}(\{(0,0)\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f((x,y)) = 0\}$$

donc

$$f^{-1}(\{(0,0)\}) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x-y=0 \\ -x+y=0 \end{cases}\right\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = x\}.$$

Il s'agit de la droite de $\mathbb{R}^2$ dont une équation cartésienne est $y = x$.

<u>Exercice 3.6</u> : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f\big((x,y)\big) = x^2 - y^2.$$

1. Montrons que f n'est pas injective.

D'une part, $f\big((1,0)\big) = 1^2 - 0^2 = 1$.

D'autre part, $f\big((-1,0)\big) = (-1)^2 - 0^2 = 1 = f\big((1,0)\big)$.

Or, $(1,0) \neq (-1,0)$ donc f n'est pas injective.

Montrons à présent que f est surjective. Soit $z \in \mathbb{R}$,

- Si $z \in \mathbb{R}^+$ alors $f\left(\big(\sqrt{z}, 0\big)\right) = (\sqrt{z})^2 - 0^2 = z$;
- Si $z \in \mathbb{R}^-$ alors $f\left(\big(0, \sqrt{-z}\big)\right) = 0^2 - (\sqrt{-z})^2 = z$.

Dans les deux cas, il existe un couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f\big((x,y)\big) = z$.

L'application f est donc surjective.

2. Déterminons $f(\mathbb{R} \times \{0\})$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R} \times \{0\}$. Alors $y = 0$ et $f\big((x,0)\big) = x^2 - 0^2 = \mathrm{x}^2 \in \mathbb{R}^+$.

Nous avons donc $f(\mathbb{R} \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^+$.

Réciproquement, si $z \in \mathbb{R}^+$ nous avons vu que $f\left(\big(\sqrt{z}, 0\big)\right) = (\sqrt{z})^2 - 0^2 = z$.

Donc $\mathbb{R}^+ \subset f(\mathbb{R} \times \{0\})$.

Par double inclusion, nous avons montré que $f(\mathbb{R} \times \{0\}) = \mathbb{R}^+$.

Déterminons à présent $f^{-1}(\{0\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y^2 = 0\}$.

$$f^{-1}(\{0\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x-y)(x+y) = 0\}$$

donc $f^{-1}(\{0\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = x\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = -x\}$.

Il s'agit de la réunion de deux droites de $\mathbb{R}^2$ l'une d'équation cartésienne $y = x$ et l'autre d'équation cartésienne $y = -x$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2, x^2 - y^2 = n\}$ donc

$$A_n = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2, (x-y)(x+y) = n\}.$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$. On pose $x - y = p$ et $x + y = q$ et l'on veut que $p \times q = n$.

p et q sont des diviseurs de n de même signe donc si $n \in \mathbb{N}^*$ il y a un nombre fini de de possibilités pour les couples (p,q).

Pour un couple $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ donné, on a le système :

$$\begin{cases} x - y = p \\ x + y = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = p + q \\ y = q - x \end{cases}.$$

On peut constater qu'il y aura également un nombre fini de possibilités pour x et y, ce qui permet de conclure que A_n est un ensemble fini.

<u>Exemples</u> :

- $A_1 = \{(-1,0),(1,0)\}$;
- $A_2 = \emptyset$;
- $A_3 = \{(-2,-1),(-2,1),(2,1),(2,-1)\}$.

Dans le cas où $n = 0$, on a $A_0 \subset f^{-1}(\{0\})$ donc d'après la question (b), $A_0 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2, y = x\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2, y = -x\}$ c'est-à-dire

$$A_0 = \{(x,x) \in \mathbb{Z}^2, x \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x,-x) \in \mathbb{Z}^2, x \in \mathbb{Z}\}.$$

Soient $g \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, g(\mathbb{Z}))$ et $h \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, h(\mathbb{Z}))$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ g(x) = (x,x) \text{ et } h(x) = (x,-x).$$

Les fonctions g et h sont injectives car, pour $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$ on a bien

$$g(x) = (x,x) = g(y) = (y,y) \Longrightarrow x = y$$

et

$$h(x) = (x, -x) = h(y) = (y, -y) \Longrightarrow x = y.$$

Ainsi, g et h sont bijectives donc les ensembles $g(\mathbb{Z}) = \{(x, x) \in \mathbb{Z}^2, x \in \mathbb{Z}\}$ et $h(\mathbb{Z}) = \{(x, -x) \in \mathbb{Z}^2, x \in \mathbb{Z}\}$ sont équipotents à $\mathbb{Z}$ qui est dénombrable (d'après l'exemple vu au paragraphe 2.2 de ce chapitre).

Ainsi, on peut conclure que $A_0 = g(\mathbb{Z}) \cup h(\mathbb{Z})$ est dénombrable.

Exercice 3.7 : Soit E un ensemble. On veut montrer qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$. Pour cela, nous allons raisonner par l'absurde en supposant l'existence d'une surjection $f \in \mathcal{F}\big(E, \mathcal{P}(E)\big)$ et introduire l'ensemble

$$D = \{x \in E,\ x \notin f(x)\}.$$

Comme f est surjective, il existe $a \in E$ tel que $f(a) = D$.

Deux cas se présentent alors :

- Soit $a \in D$ et, par définition de D, $a \notin f(a) = D$ ce qui est contradictoire.
- Soit $a \notin D = f(a)$ et, par définition de D, $a \in D$ ce qui est aussi contradictoire.

Dans les deux cas nous aboutissons donc à une contradiction.

L'hypothèse de départ est fausse : il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$.

Remarquons que l'ensemble E peut être fini ou infini. Cela traduit, en particulier, que $\mathcal{P}(E)$ n'a pas la même cardinalité que E et qu'il possède « strictement plus d'éléments » que E car $g \in \mathcal{F}\big(E, \mathcal{P}(E)\big)$ définie par, pour tout $x \in E$, $g(x) = \{x\}$ est une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$.

Chapitre 4

Structures de groupe, anneau et corps

Ce chapitre présente les structures importantes de groupe, d'anneau et de corps en abordant quelques définitions et propriétés essentielles pour une meilleure compréhension des chapitres suivants. En effet, ces premières structures fondamentales servent de cadres généraux à l'intérieur desquels tout mathématicien – et donc tout étudiant ! – évolue dans son travail quotidien.

1. Les groupes

Définitions : Un **groupe** $(G,*)$ est un ensemble G non vide muni d'une application $*$ de $\mathcal{F}(G^2, G)$ appelée **loi de composition interne** et vérifiant, avec la notation simplifiée suivante,

$$\forall\,(x,y) \in G^2, *\big((x,y)\big) = x * y \in G$$

les propriétés suivantes :

- $*$ est une loi **associative** :

$$\forall\,(x,y,z) \in G^3, (x*y)*z = x*(y*z)\ ;$$

- Il existe $e \in G$, dit **élément neutre**, tel que :

$$\forall\, x \in G, x*e = e*x = x\ ;$$

- $\forall\, x \in G, \exists\, x' \in G, x*x' = x'*x = e$;

  x' est alors appelé **élément inverse** de x et noté x^{-1}.

De plus, si la loi $*$ est **commutative**, c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\forall\,(x,y) \in G^2, x*y = y*x$$

alors on dit que G est un **groupe commutatif** ou **abélien**.

Notations : Soient $(G,*)$ un groupe et n un entier naturel non nul.

On note alors, pour tout $x \in G$,

$$x^n = x*x*\ldots*x \in G \ \text{ et } \ x^{-n} = x^{-1}*x^{-1}*\ldots*x^{-1} \in G.$$

Par convention, $x^0 = e$.