

Table des matières

PREMIÈRE PARTIE Généralités

CHAPITRE 1	Avant-propos	11
1.1	Objectifs de cet ouvrage	11
1.1.1	Le constat	11
1.1.2	Ce que ce livre peut pour vous	12
1.1.3	Ce que ce livre ne vous apportera pas	12
1.2	Organisation	13
1.2.1	Partie 1	13
1.2.2	Parties 2 et 3	13
1.2.3	Quand et comment travailler ce cours ?	14
CHAPITRE 2	Logique et méthodologie	15
2.1	La rédaction	15
2.1.1	Les bases	15
2.1.2	Rédaction de chaque question	16
2.1.3	Les erreurs à éviter	16
2.2	Éléments de logique	18
2.2.1	Propositions	18
2.2.2	Connecteurs logiques	19
2.2.3	Quantificateurs	20
2.2.4	Négations	20
2.3	Ensembles	21
2.3.1	Définition	21
2.3.2	Ensemble vide	21
2.3.3	Sous-ensemble	21
2.3.4	Réunion	22
2.3.5	Intersection	22
2.3.6	Complémentaire	22
2.3.7	Propriétés	22
2.3.8	Produit cartésien	23

2.4	Alors, ces démonstrations !	23
2.4.1	Le désarroi de l'étudiant	23
2.4.2	Les grandes méthodes	24
2.4.3	Choisir la bonne méthode	28
2.4.4	Partir de la conclusion (le plus souvent)	29
2.5	Exercices corrigés.....	34
C A P I T R E 3 Ensembles de nombres		37
3.1	Ensembles de nombres	37
3.1.1	Ensemble \mathbb{N} des entiers naturels	37
3.1.2	Ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs	40
3.1.3	Ensemble \mathbb{D} des nombres décimaux	41
3.1.4	Ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels	41
3.1.5	Ensemble \mathbb{R} des nombres réels	42
3.1.6	Ensemble \mathbb{C} des nombres complexes	44
3.1.7	Bilan de ces "constructions"	44
3.2	Exercices corrigés.....	46
C A P I T R E 4 Algèbre et analyse		51
4.1	Considérations générales	51
4.1.1	Algèbre	51
4.1.2	Analyse	51
4.2	Relations binaires.....	52
4.2.1	Propriétés	52
4.2.2	Relation d'équivalence	54
4.2.3	Relation d'ordre	54
4.3	Applications.....	62
4.3.1	Fonction et application	62
4.3.2	Image directe d'une partie A de E	63
4.3.3	Image réciproque d'une partie B de F	63
4.3.4	Suites	63
4.3.5	Restriction d'une application	63
4.3.6	Opérations sur les applications	64
4.3.7	Injection-Surjection-Bijection	64
4.4	Exercices corrigés.....	69

DEUXIÈME PARTIE

Analyse réelle

CHAPITRE 5	Suites réelles	85
5.1	Définition	85
5.1.1	Notations et terminologie	85
5.1.2	Exemples	86
5.2	Étude d'une suite.....	86
5.3	Majoration-Minoration	87
5.4	Monotonie.....	89
5.5	Limites	90
5.5.1	Premières définitions	90
5.5.2	Deuxièmes définitions	91
5.5.3	Unicité de la limite	92
5.5.4	Quelques résultats basiques	93
5.5.5	Suites bornées et suites convergentes	99
5.5.6	Opérations sur les limites	101
5.5.7	Théorème des gendarmes	104
5.5.8	Un théorème très utile	105
5.5.9	Suites adjacentes (très important)	107
5.5.10	Théorème de Bolzano-Weierstrass	108
5.5.11	Suites récurrentes	110
5.5.12	Théorème du point fixe de Picard	115
5.6	Exercices corrigés.....	117
CHAPITRE 6	Fonctions à variables réelles.....	137
6.1	Ensemble de définition	137
6.2	Limites	138
6.2.1	Topologie de \mathbb{R}	138
6.2.2	Limite en un point	139
6.2.3	Limite à droite	141
6.2.4	Limite à gauche	141
6.2.5	Formes indéterminées $\frac{0}{0}$	153
6.3	Continuité	157
6.3.1	Globalisation	158
6.3.2	Continuité sur un intervalle	158
6.3.3	Remarques importantes	159
6.3.4	Prolongement par continuité	160
6.3.5	Composition d'applications continues	161

6.3.6	Suites et continuité	162
6.3.7	Théorème I : Théorème des valeurs intermédiaires	163
6.3.8	Théorème II	164
6.3.9	Continuité uniforme	164
6.3.10	Continuité simple et continuité uniforme sur un intervalle I	164
6.3.11	Théorème	165
6.3.12	Théorème de Heine	166
6.3.13	Fonction k-Lipschitzienne	166
6.4	Exercices corrigés.....	168
6.5	Dérivabilité	172
6.5.1	Proposition	173
6.5.2	Monotonie et dérivée	174
6.5.3	Théorème de Rolle	174
6.5.4	Théorème des accroissements finis	175
6.5.5	Corollaire	176
6.6	Fonctions réciproques	176
6.6.1	Continuité monotone	176
6.6.2	Dérivée de la fonction réciproque	179
6.6.3	1- Fonction exponentielle	180
6.6.4	2- Fonction Arcsin	181
6.6.5	3- Fonction Arccos	182
6.6.6	4- Fonction Arctan	183
6.7	Exercices corrigés.....	185

TROISIÈME PARTIE

Algèbre linéaire

Avertissement	202
CHAPITRE 7 Espaces vectoriels	203
7.1 Définition	203
7.2 Quelques exemples classiques	207
7.2.1 L'ensemble \mathbb{R} des réels	207
7.2.2 L'ensemble \mathbb{R}^2 des couples de réels	208
7.2.3 L'ensemble \mathbb{R}^n des n-uplets de réels	212
7.2.4 $\mathcal{F}[E,F]$	212
7.2.5 $\mathcal{L}[E,F]$	220
7.3 Sous-espaces vectoriels.....	220
7.3.1 Loi induite	220
7.3.2 Critères des sous-espaces vectoriels	221
7.4 Familles de vecteurs	222
7.5 Combinaison linéaire.....	223
7.5.1 Sous-espace engendré	223
7.5.2 Rang d'une famille finie de vecteurs	225
CHAPITRE 8 Bases et dimension	227
8.1 Familles libres.....	227
8.1.1 Conséquences	227
8.1.2 Conséquence	229
8.2 Familles génératrices	229
8.3 Bases-Dimension.....	233
8.3.1 Base	233
8.3.2 Dimension	233
8.3.3 Définition	234
8.3.4 Théorème 1 d'extraction	235
8.3.5 Théorème 2 de la base incomplète	235
8.3.6 Coordonnées d'un vecteur dans une base	238
CHAPITRE 9 Applications linéaires.....	241
9.1 Définition	241
9.1.1 Exemples	242
9.1.2 Vocabulaire	242
9.1.3 Remarque 1	243
9.14 Remarque 2	243

9.2	Théorème fondamental	246
9.3	Matrice d'un morphisme	246
9.3.1	Remarques très importantes	246
9.3.2	Expression analytique d'un morphisme	247
9.4	Image d'un vecteur par un morphisme	250
9.5	Opérations sur les matrices	252
9.6	Noyau et image d'un morphisme	255
9.6.1	Noyau	255
9.6.2	Image	257
C HIPIERRE 10	Exercices d'algèbre linéaire	261
10.1	Exos sur les espaces vectoriels.....	262
10.2	Exercices sur dimension et bases.....	269
10.3	Exos sur les applications linéaires.....	276