

Table des matières

PREMIÈRE PARTIE

Généralités

CHAPITRE 1 Avant-propos 11

- 1.1 Objectifs de cet ouvrage 11
 - 1.1.1 Le constat 11
 - 1.1.2 Ce que ce livre peut pour vous 12
 - 1.1.3 Ce que ce livre ne vous apportera pas 12
- 1.2 Organisation 13
 - 1.2.1 Partie 1 13
 - 1.2.2 Parties 2 et 3 13
 - 1.2.3 Quand et comment travailler ce cours ? 14

CHAPITRE 2 Logique et méthodologie 15

- 2.1 La rédaction 15
 - 2.1.1 Les bases 15
 - 2.1.2 Rédaction de chaque question 16
 - 2.1.3 Les erreurs à éviter 16
- 2.2 Éléments de logique 18
 - 2.2.1 Propositions 18
 - 2.2.2 Connecteurs logiques 19
 - 2.2.3 Quantificateurs 20
 - 2.2.4 Négations 20
- 2.3 Ensembles 21
 - 2.3.1 Définition 21
 - 2.3.2 Ensemble vide 21
 - 2.3.3 Sous-ensemble 21
 - 2.3.4 Réunion 22
 - 2.3.5 Intersection 22
 - 2.3.6 Complémentaire 22
 - 2.3.7 Propriétés 22
 - 2.3.8 Produit cartésien 23

2.4	Alors, ces démonstrations !	23
2.4.1	Le désarroi de l'étudiant	23
2.4.2	Les grandes méthodes	24
2.4.3	Choisir la bonne méthode	28
2.4.4	Partir de la conclusion (le plus souvent)	29
2.5	Exercices corrigés.....	34
CHAPITRE 3	Ensembles de nombres.....	37
3.1	Ensembles de nombres.....	37
3.1.1	Ensemble \mathbb{N} des entiers naturels	37
3.1.2	Ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs	40
3.1.3	Ensemble \mathbb{D} des nombres décimaux	41
3.1.4	Ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels	41
3.1.5	Ensemble \mathbb{R} des nombres réels	42
3.1.6	Ensemble \mathbb{C} des nombres complexes	44
3.1.7	Bilan de ces "constructions"	44
3.2	Exercices corrigés.....	46
CHAPITRE 4	Algèbre et analyse	51
4.1	Considérations générales	51
4.1.1	Algèbre	51
4.1.2	Analyse	51
4.2	Relations binaires.....	52
4.2.1	Propriétés	52
4.2.2	Relation d'équivalence	54
4.2.3	Relation d'ordre	54
4.3	Applications.....	62
4.3.1	Fonction et application	62
4.3.2	Image directe d'une partie A de E	63
4.3.3	Image réciproque d'une partie B de F	63
4.3.4	Suites	63
4.3.5	Restriction d'une application	63
4.3.6	Opérations sur les applications	64
4.3.7	Injection-Surjection-Bijection	64
4.4	Exercices corrigés.....	69

DEUXIÈME PARTIE**Analyse réelle**

CHAPITRE 5	Suites réelles	85
5.1	Définition	85
5.1.1	Notations et terminologie	85
5.1.2	Exemples	86
5.2	Étude d'une suite.....	86
5.3	Majoration-Minoration	87
5.4	Monotonie.....	89
5.5	Limites	90
5.5.1	Premières définitions	90
5.5.2	Deuxièmes définitions	91
5.5.3	Unicité de la limite	92
5.5.4	Quelques résultats basiques	93
5.5.5	Suites bornées et suites convergentes	99
5.5.6	Opérations sur les limites	101
5.5.7	Théorème des gendarmes	104
5.5.8	Un théorème très utile	105
5.5.9	Suites adjacentes (très important)	107
5.5.10	Théorème de Bolzano-Weierstrass	108
5.5.11	Suites récurrentes	110
5.5.12	Théorème du point fixe de Picard	115
5.6	Exercices corrigés.....	117
CHAPITRE 6	Fonctions à variables réelles.....	137
6.1	Ensemble de définition	137
6.2	Limites	138
6.2.1	Topologie de \mathbb{R}	138
6.2.2	Limite en un point	139
6.2.3	Limite à droite	141
6.2.4	Limite à gauche	141
6.2.5	Formes indéterminées $\frac{0}{0}$	153
6.3	Continuité	157
6.3.1	Globalisation	158
6.3.2	Continuité sur un intervalle	158
6.3.3	Remarques importantes	159
6.3.4	Prolongement par continuité	160
6.3.5	Composition d'applications continues	161

6.3.6	Suites et continuité	162
6.3.7	Théorème I : Théorème des valeurs intermédiaires	163
6.3.8	Théorème II	164
6.3.9	Continuité uniforme	164
6.3.10	Continuité simple et continuité uniforme sur un intervalle I	164
6.3.11	Théorème	165
6.3.12	Théorème de Heine	166
6.3.13	Fonction k-Lipschitzienne	166
6.4	Exercices corrigés.....	168
6.5	Dérivabilité	172
6.5.1	Proposition	173
6.5.2	Monotonie et dérivée	174
6.5.3	Théorème de Rolle	174
6.5.4	Théorème des accroissements finis	175
6.5.5	Corollaire	176
6.6	Fonctions réciproques	176
6.6.1	Continuité monotone	176
6.6.2	Dérivée de la fonction réciproque	179
6.6.3	1- Fonction exponentielle	180
6.6.4	2- Fonction Arcsin	181
6.6.5	3- Fonction Arccos	182
6.6.6	4- Fonction Arctan	183
6.7	Exercices corrigés.....	185

TROISIÈME PARTIE

Algèbre linéaire

Avertissement	202
CHAPITRE 7 Espaces vectoriels	203
7.1 Définition	203
7.2 Quelques exemples classiques	207
7.2.1 L'ensemble \mathbb{R} des réels	207
7.2.2 L'ensemble \mathbb{R}^2 des couples de réels	208
7.2.3 L'ensemble \mathbb{R}^n des n-uplets de réels	212
7.2.4 $\mathcal{H}(E, F)$	212
7.2.5 $\mathcal{L}(E, F)$	220
7.3 Sous-espaces vectoriels	220
7.3.1 Loi induite	220
7.3.2 Critères des sous-espaces vectoriels	221
7.4 Familles de vecteurs	222
7.5 Combinaison linéaire	223
7.5.1 Sous-espace engendré	223
7.5.2 Rang d'une famille finie de vecteurs	225
CHAPITRE 8 Bases et dimension	227
8.1 Familles libres	227
8.1.1 Conséquences	227
8.1.2 Conséquence	229
8.2 Familles génératrices	229
8.3 Bases-Dimension	233
8.3.1 Base	233
8.3.2 Dimension	233
8.3.3 Définition	234
8.3.4 Théorème 1 d'extraction	235
8.3.5 Théorème 2 de la base incomplète	235
8.3.6 Coordonnées d'un vecteur dans une base	238
CHAPITRE 9 Applications linéaires	241
9.1 Définition	241
9.1.1 Exemples	242
9.1.2 Vocabulaire	242
9.1.3 Remarque 1	243
9.1.4 Remarque 2	243

9.2	Théorème fondamental	246
9.3	Matrice d'un morphisme	246
9.3.1	Remarques très importantes	246
9.3.2	Expression analytique d'un morphisme	247
9.4	Image d'un vecteur par un morphisme	250
9.5	Opérations sur les matrices	252
9.6	Noyau et image d'un morphisme	255
9.6.1	Noyau	255
9.6.2	Image	257
CHAPITRE 10	Exercices d'algèbre linéaire	261
10.1	Exos sur les espaces vectoriels.....	262
10.2	Exercices sur dimension et bases.....	269
10.3	Exos sur les applications linéaires.....	276