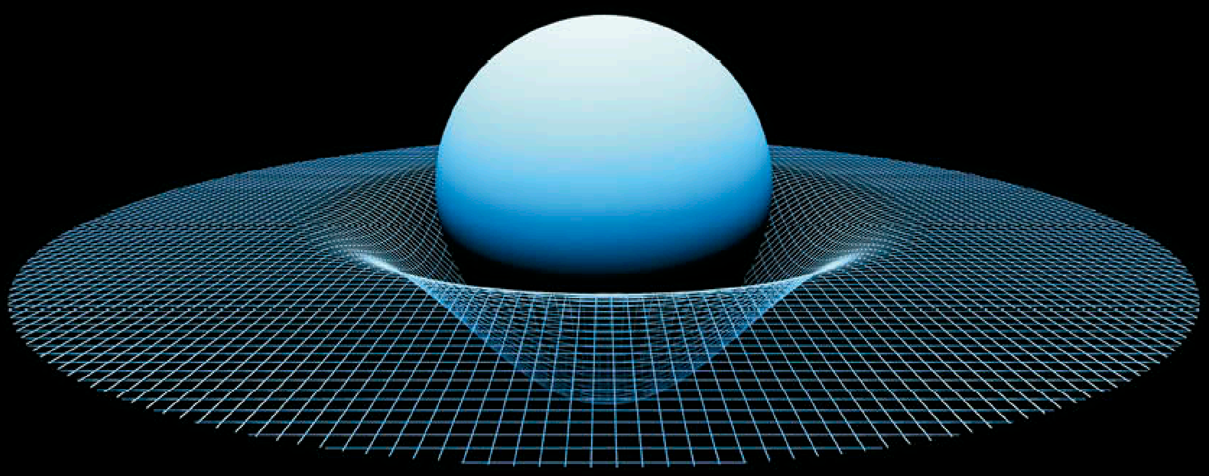
LA RELATIVITÉ POUR LES INGÉNIEURS

Une immersion dans les équations de la physique moderne

$$\delta S = 0$$



Yann **Bruère**

ellipses

CHAPITRE 1

Mécanique lagrangienne

La mécanique Lagrangienne, bien que n'apportant rien de fondamentalement nouveau par rapport à la mécanique Newtonienne, se trouve être dans les faits un formalisme extrêmement puissant dans de nombreux domaines de la physique théorique. On retrouve la notion de *Lagrangien* dans toute une série de théories (relativité, électromagnétisme, théorie quantique des champs…), à commencer par le théorème de Noether que nous dévoilerons au chapitre 1.7.

1.1. Coordonnées généralisées

Soit un système constitué de N particules[2], chacune étant repérée dans l'espace par son vecteur position $\vec{r}_n$. La vitesse et l'accélération de la nième particule sont définies par les dérivées consécutives de son vecteur position par rapport au temps.

$$\vec{v}_n = \frac{d\vec{r}_n}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{a}_n = \frac{d^2\vec{r}_n}{dt^2}$$

Pour décrire l'évolution d'un tel système en mécanique Newtonienne il faut appliquer le principe fondamental de la dynamique à chaque particule, ce qui aboutit à un système de N équations différentielles du type :

$$m_n \frac{d^2\vec{r}_n}{dt^2} = \vec{F}_{\to n} \qquad \text{(Eq. 1.1)}$$

L'exemple classique d'utilisation de coordonnées généralisées est celui d'un double pendule évoluant dans le plan. Deux particules de masses respectives m_1 et m_2 sont reliées par des tiges rigides de masses négligeables et de longueurs respectives l_1 et l_2 (Figure 1.1).

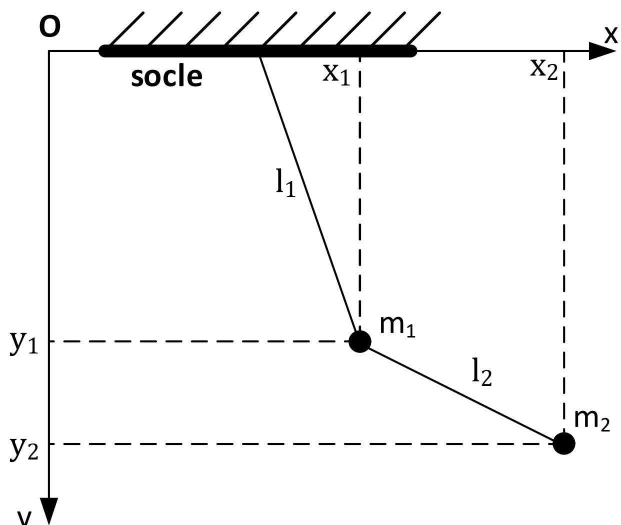


Figure 1.1

---

[2] Le terme « particule » sera utilisé pour désigner tout type objet, quelle que soit sa taille ou sa masse.

Pour décrire le mouvement des deux particules on peut par exemple repérer leurs positions dans un repère cartésien (O, x, y), soit 4 coordonnées en tout : (x_1, y_1) pour la particule 1, et (x_2, y_2) pour la particule 2. Cependant les tiges auxquelles sont rattachées les particules peuvent être modélisées comme des *contraintes* imposant une certaine relation entre leurs positions. Il existe, dans ce système de double pendule, deux contraintes : la liaison l_1 qui impose une distance fixe entre le socle et la particule 1, et la liaison l_2 qui impose une autre distance fixe entre les deux particules. Il n'existe donc que deux coordonnées qui soient réellement indépendantes que l'on nommera *coordonnées généralisées* du système.

Le système de coordonnées généralisées le plus naturel pour ce double pendule est de repérer les particules 1 et 2 par les angles θ_1 et θ_2 qu'elles décrivent par rapport à la verticale du lieu (Figure 1.2).

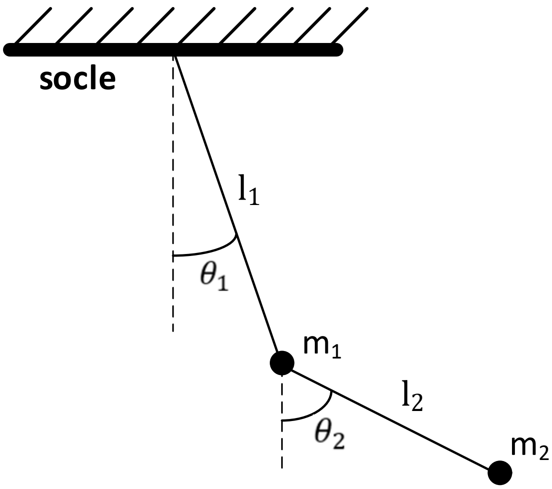


Figure 1.2

D'une manière générale, un système composé de N particules qui évoluent dans un espace à p dimensions et soumises à k contraintes possède $s = pN - k$ *degrés de libertés*, et on notera q_i $(i = 1..s)$ ses s coordonnées généralisées. Le nombre de coordonnées généralisées est optimal car il s'agit du nombre minimal de variables nécessaires à la mise en équation du système. La propriété fondamentale des s coordonnées généralisées est qu'elles sont toutes indépendantes deux à deux, autrement dit que leurs dérivées partielles s'annulent deux-à-deux :

$$\forall (i \neq j) \quad \frac{\partial q_i}{\partial q_j} = 0$$

Il est facile de montrer que cette propriété d'indépendance n'est pas vérifiée par le système de coordonnées cartésiennes (x_1, y_1, x_2, y_2) car la liaison entre le socle et la particule 1 impose la relation ${x_1}^2 + {y_1}^2 = {l_1}^2$ (cf. Figure 1.1), ce qui implique :

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = \frac{\partial\left(\sqrt{{l_1}^2 - {y_1}^2}\right)}{\partial y_1} = \frac{-y_1}{\sqrt{{l_1}^2 - {y_1}^2}} \neq 0$$

Grâce à leur relation d'indépendance les coordonnées généralisées q_i et les *vitesses généralisées* $\dot{q}_i = dq_i/dt$ offrent les sympathiques propriétés suivantes (δ_j^i est le symbole de Kronecker tel que $\delta_j^i = 0$ si $i \neq j$, et $\delta_i^i = 1$).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_j^i \\ \dfrac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} = \delta_j^i \\ \dfrac{\partial q_i}{\partial \dot{q}_j} = 0 \end{cases} \qquad \text{(Eq. 1.2)}$$

On utilisera parfois le vecteur $\boldsymbol{q} = (q_i , \cdots , q_s)$ qui regroupe les s coordonnées généralisées du système.

1.2. Principe de moindre action

Le principe de moindre action postule qu'il existe une fonction scalaire $\mathcal{L}$ qui dépend des coordonnées, des vitesses généralisées et éventuellement du temps, telle que la quantité

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\boldsymbol{q} , \dot{\boldsymbol{q}} , t)\, dt \qquad \text{(Eq. 1.3)}$$

soit minimale durant l'évolution du système entre les instants t_1 et t_2. La quantité S est appelée *l'action*, et la fonction $\mathcal{L}$ est le *Lagrangien* du système.

1.3. Équations d'Euler-Lagrange

Nous pouvons transformer la condition que l'action soit minimale en une équation différentielle. Supposons que $\boldsymbol{q}(t)$ représente la trajectoire effectivement suivie par le système. Considérons une autre trajectoire $\left(\boldsymbol{q}(t) + \delta\boldsymbol{q}(t)\right)$ telle que $\delta\boldsymbol{q}(t)$ soit une variation infinitésimale de trajectoire ayant les mêmes points de départ et d'arrivée (voir Figure 1.3 pour un système à deux degrés de libertés ayant pour coordonnées généralisées $q_1(t)$ et $q_2(t)$).

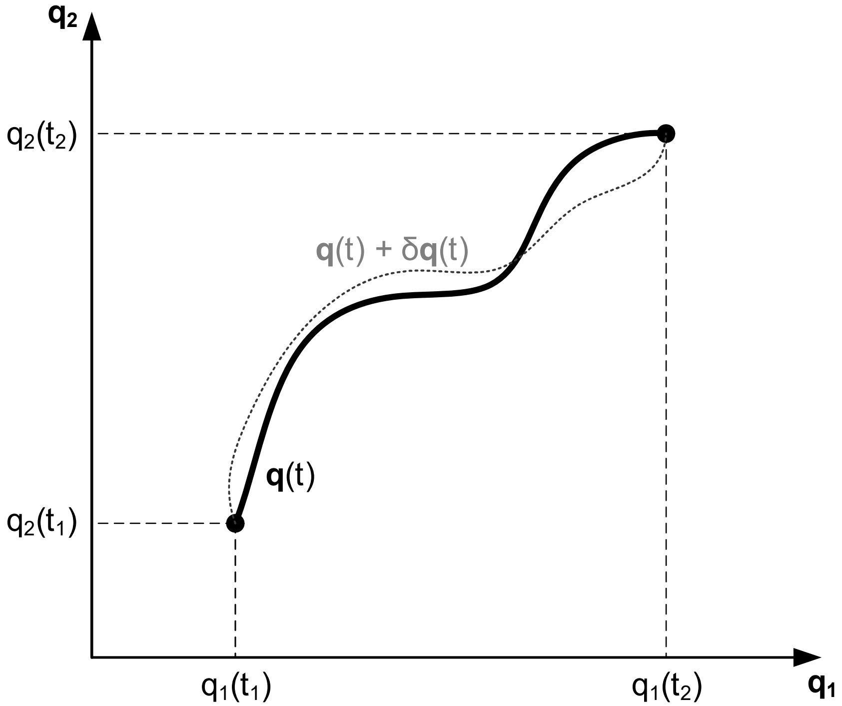


Figure 1.3

La variation infinitésimale d'action δS que produit une variation infinitésimale de trajectoire $\delta\boldsymbol{q}(t)$ s'écrit comme la différence entre l'action de la trajectoire $\left(\boldsymbol{q}(t)+\delta\boldsymbol{q}(t)\right)$ et l'action de la trajectoire $\boldsymbol{q}(t)$.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\boldsymbol{q}+\delta\boldsymbol{q}\,,\dot{\boldsymbol{q}}+\delta\dot{\boldsymbol{q}}\,,t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\boldsymbol{q}\,,\dot{\boldsymbol{q}}\,,t)\,dt \qquad \text{(Eq. 1.4)}$$

La variation de trajectoire $\delta\boldsymbol{q}$ étant infinitésimale, l'approximation de $\mathcal{L}(\boldsymbol{q}+\delta\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}+\delta\dot{\boldsymbol{q}},t)$ au premier ordre pour $\delta\boldsymbol{q}$ s'écrit :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{q}+\delta\boldsymbol{q}\,,\dot{\boldsymbol{q}}+\delta\dot{\boldsymbol{q}}\,,t) \approx \mathcal{L}(\boldsymbol{q}\,,\dot{\boldsymbol{q}}\,,t) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{q}}\delta\boldsymbol{q} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}}\delta\dot{\boldsymbol{q}} \qquad \text{(Eq. 1.5)}$$

En reportant (Eq. 1.5) dans (Eq. 1.4) il vient :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{q}}\delta\boldsymbol{q}dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}}\delta\dot{\boldsymbol{q}}dt \qquad \text{(Eq. 1.6)}$$

En intégrant par partie la seconde intégrale dans (Eq. 1.6) on trouve

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}}\delta\dot{\boldsymbol{q}}dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}}\frac{\delta\boldsymbol{q}}{dt}\right)dt = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}}\delta\boldsymbol{q}\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}}\right)\delta\boldsymbol{q}dt \qquad \text{(Eq. 1.7)}$$

ce qui injecté dans (Eq. 1.6) donne

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{q}} \delta \boldsymbol{q} dt + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \delta \boldsymbol{q}\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) \delta \boldsymbol{q} dt$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)\right) \delta \boldsymbol{q} dt + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \delta \boldsymbol{q}(t_2) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \delta \boldsymbol{q}(t_1)\right] \quad \text{(Eq. 1.8)}$$

Les deux trajectoires $\boldsymbol{q}(t)$ et $\left(\boldsymbol{q}(t) + \delta \boldsymbol{q}(t)\right)$ ayant les mêmes points de départ et d'arrivée à t_1 et t_2 on a $\delta \boldsymbol{q}(t_1) = \delta \boldsymbol{q}(t_2) = 0$. Le second terme du membre de gauche de (Eq. 1.8) doit par conséquent être nul, et il reste :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)\right) \delta \boldsymbol{q} dt \quad \text{(Eq. 1.9)}$$

Pour que le principe de moindre action soit satisfait il faut que l'action soit minimale le long de la trajectoire suivie par le système, ce qui revient à poser $\delta S = 0$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)\right) \delta \boldsymbol{q} dt = 0 \quad \text{(Eq. 1.10)}$$

Dans les calculs précédents la variation de trajectoire $\delta \boldsymbol{q}(t)$ a été pris quelconque, ce qui veut dire que l'intégrale dans (Eq. 1.10) doit être nulle quel que soit $\delta \boldsymbol{q}$. L'application du lemme fondamental du calcul des variations nous dit alors que :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) = 0 \quad \text{(Eq. 1.11)}$$

(Eq. 1.11) est l'équation d'Euler-Lagrange. Il s'agit en réalité de s équations <u>indépendantes</u> : une pour chaque coordonnée généralisée.

$$\forall i = 1..s \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \quad \text{(Eq. 1.12)}$$

1.4. Liberté de jauge

Imaginons un Lagrangien $\mathcal{L}'$ défini en fonction d'un autre Lagrangien $\mathcal{L}$ et de la dérivée temporelle d'une fonction $\varphi(\boldsymbol{q}, t)$ qui ne dépend que des positions et du temps.

$$\mathcal{L}'(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = \mathcal{L}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) + \frac{d\varphi(\boldsymbol{q}, t)}{dt} \quad \text{(Eq. 1.13)}$$

L'action S' de ce Lagrangien $\mathcal{L}'$ s'écrit :

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}'(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) dt$$

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\varphi(\boldsymbol{q}, t)}{dt} dt$$

$$S_1 = S + [\varphi(\boldsymbol{q}, t)]_{t_1}^{t_2}$$

$$S' = S + [\varphi(\boldsymbol{q}(t_2), t_2) - \varphi(\boldsymbol{q}(t_1), t_1)] \qquad \text{(Eq. 1.14)}$$

L'action du Lagrangien $\mathcal{L}'$ est donc égale à celle du Lagrangien $\mathcal{L}$ plus une constante $K = [\varphi(\boldsymbol{q}(t_2), t_2) - \varphi(\boldsymbol{q}(t_1), t_1)]$ qui ne dépend que des conditions de départ et d'arrivée à t_1 et t_2. On remarque que cette constante K ne dépend pas de la trajectoire effectivement suivie entre t_1 et t_2. Le principe de moindre action appliqué à l'action S' donne :

$$\delta S' = 0$$

$$\delta S + \delta K = 0$$

$$\delta S = 0 \qquad \text{(Eq. 1.15)}$$

Le principe de moindre action que nous avons présenté au chapitre 1.3 s'écrit :

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = 0 \qquad \text{(Eq. 1.16)}$$

En appliquant (Eq. 1.16) au résultat obtenu dans Eq. 1.15 on trouve

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = 0 \qquad \text{(Eq. 1.17)}$$

L'équivalence dans (Eq. 1.17) nous dit que les équations d'Euler-Lagrange restent valides lorsque l'on ajoute au Lagrangien la dérivée temporelle d'une fonction $d\varphi(\boldsymbol{q}, t)/dt$. En d'autres termes, la trajectoire suivie par le système est invariante même si on ajoute au Lagrangien une fonction $d\varphi(\boldsymbol{q}, t)/dt$, et l'équivalence dans (Eq. 1.17) est appelée *liberté de jauge*.

Nous aurons l'occasion au chapitre 3.4 d'expliquer plus concrètement cette notion un peu abstraite de jauge lorsque nous nous pencherons sur l'électromagnétisme relativiste.

1.5. Lagrangien d'une particule libre

Commençons par le système le plus simple : celui d'une particule libre qui n'est soumise à aucune force. Toute théorie physique se doit d'être en accord avec l'expérience. Puisqu'une particule libre suit un mouvement rectiligne uniforme, on s'efforcera de trouver un Lagrangien dont l'équation d'Euler-Lagrange implique $\ddot{\boldsymbol{q}} = 0$. Un Lagrangien qui serait une fonction λ de $\dot{\boldsymbol{q}}^2$ répond à ce besoin car (Eq. 1.11) donne dans ce cas :

$$\frac{\partial \lambda(\dot{\boldsymbol{q}}^2)}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \lambda(\dot{\boldsymbol{q}}^2)}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = 0$$

$$0 - \frac{d(2\dot{\boldsymbol{q}})}{dt} = 0$$

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = 0 \qquad \text{(Eq. 1.18)}$$

Nous souhaitons d'autre part que le Lagrangien satisfasse au principe de relativité que nous présenterons au chapitre 2. Selon ce principe, la fonction $\mathcal{L}$ doit s'écrire de la même façon dans deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$ en translation uniforme l'un par rapport à l'autre. Notons δv la vitesse infinitésimale de translation entre deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$. On a donc dans ce cas $\mathcal{L} = \lambda(\dot{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{2}})$ dans le référentiel $\mathcal{R}$, et $\mathcal{L}_1 = \lambda((\dot{\boldsymbol{q}} + \delta v)^{\boldsymbol{2}})$ dans l'autre référentiel $\mathcal{R}_1$.

En partant de $\mathcal{L}_1 = \lambda(\dot{\boldsymbol{q}}^2 + 2\dot{\boldsymbol{q}}\delta v + \delta v^2)$, et puisqu'on a pris une vitesse de translation infinitésimale δv entre les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$, l'approximation de $\mathcal{L}_1$ au premier ordre en δv nous autorise à négliger le terme δv^2 et on trouve :

$$\mathcal{L}_1 = \lambda(\dot{\boldsymbol{q}}^2) + \frac{d\lambda}{d\dot{\boldsymbol{q}}^2} 2\dot{\boldsymbol{q}}\delta v \qquad \text{(Eq. 1.19)}$$

Au chapitre précédent nous avons démontré que les équations d'Euler-Lagrange offrent une liberté de jauge lorsqu'on ajoute au Lagrangien la dérivée temporelle d'une fonction $\varphi(\boldsymbol{q}, t)$ (voir Eq. 1.13 et Eq. 1.17). Il suffit donc d'identifier le second terme du membre de gauche de (Eq. 1.19) comme étant une jauge du système pour que les équations d'Euler-Lagrange aient la même forme dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$. Cela revient à poser :

$$\frac{d\lambda}{d\dot{\boldsymbol{q}}^2} 2\dot{\boldsymbol{q}}\delta v = \frac{d\varphi(\boldsymbol{q})}{dt} \qquad \text{(Eq. 1.20)}$$

Le choix le plus simple est: $\lambda = (\alpha/2)\dot{\boldsymbol{q}}^2$, ce qui donne :

$$\frac{d}{d\dot{\boldsymbol{q}}^2}\left(\frac{\alpha}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^2\right) 2\dot{\boldsymbol{q}}\delta v = \frac{d\varphi(\boldsymbol{q})}{dt}$$

$$\alpha\delta v \frac{d\boldsymbol{q}}{dt} = \frac{d\varphi(\boldsymbol{q})}{dt}$$

$$\varphi(\boldsymbol{q}) = \alpha\delta v\boldsymbol{q} \qquad \text{(Eq. 1.21)}$$

et on tombe bien sur une fonction φ qui ne dépend que des $\boldsymbol{q}$, ce qui est une condition suffisante pour être une jauge (cf. §1.4). En posant $\mathcal{L} = (\alpha/2)\dot{\boldsymbol{q}}^2$ nous avons construit le Lagrangien d'une particule libre qui d'une part satisfait le principe de relativité, et d'autre part aboutit à une équation d'Euler-Lagrange qui donne $\ddot{\boldsymbol{q}} = 0$. La touche finale consiste à poser $\alpha = m$, où m est la masse de la particule, pour aboutir au Lagrangien :

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_2{}^2 + \dot{q}_3{}^2\right) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \qquad \text{(Eq. 1.22)}$$

qui se trouve être l'énergie cinétique de la particule.

On aurait bien sûr pu trouver d'autres Lagrangiens, plus complexes, qui respectent le principe de relativité et donnant une trajectoire rectiligne uniforme, mais on préférera toujours les expressions les plus simples !

1.6. Lagrangien de particules soumises à des forces conservatives

Considérons un système composé de N particules, chacune étant repérée dans l'espace par son vecteur position $\vec{r}_n$. Nous utiliserons un système de coordonnées cartésien défini par les vecteurs de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. La position de chaque particule est représentée par ses trois coordonnées cartésiennes, et le système possède $3N$ coordonnées généralisées. Le vecteur des coordonnées généralisées est de la forme $\boldsymbol{q} = (q_1, \dots, q_{3N})$, où les (q_1, q_2, q_3) représentent les trois coordonnées cartésiennes (x_1, y_1, z_1) de la première particule, les (q_4, q_5, q_6) représentent les trois coordonnées cartésiennes (x_2, y_2, z_2) de la seconde particule, et ainsi de suite jusqu'à la N-ième particule.

1.6.1. Gradient spatial

Par définition, une *force conservative* dérive d'un potentiel qui ne dépend que de la position des particules. L'énergie potentielle est définie par une fonction $U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ qui dépend de la position des N particules du système, et telle que la force $\vec{F}_{\to n}$ exercée sur la particule n dérive du gradient spatial de l'énergie potentielle pris au point où la particule n se situe :

$$\vec{F}_{\to n} = -grad_{\vec{r}_n}(U) \qquad \text{(Eq. 1.23)}$$

Développons un peu cette notion de gradient : dans un espace à une dimension muni du vecteur de base $\vec{e}_x$, la force exercée sur une particule située au point x_0 s'écrit :

$$\vec{F} = -\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_0} \vec{e}_x \qquad \text{(Eq. 1.24)}$$

Étudions, pour fixer les idées, l'énergie potentielle de gravitation : $U(x) = -\,GMm/x$ (la masse M étant située au point $x = 0$). En injectant cette énergie potentielle dans (Eq. 1.24) on retrouve l'expression familière de la force de gravitation :

$$\vec{F} = -\left.\frac{\partial(-\,GMm/x)}{\partial x}\right|_{x=x_0} \vec{e}_x$$

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{{x_0}^2}\vec{e}_x$$

Prenons un autre exemple dans un espace à deux dimensions. Sur le cercle de la Figure 1.4 les différents niveaux de gris symbolisent la température (T) : plus le gris est foncé, plus la température est basse. La densité de flux thermique s'écrit peu ou prou comme le gradient spatial de température :

$$\overrightarrow{Flux} \approx -grad(T) = -\frac{\partial T}{\partial r}\vec{e}_r$$

où $\vec{e}_r$ est le vecteur radial dirigé vers l'extérieur du cercle. Le signe moins signifie que le transfert de chaleur s'effectue des régions chaudes vers les régions froides.

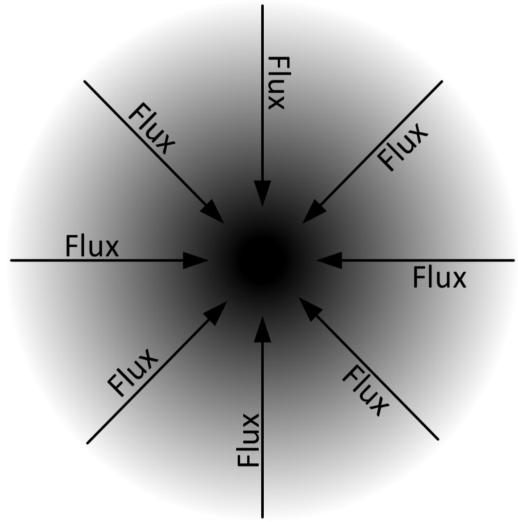


Figure 1.4

Dans un espace à trois dimensions muni d'une base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, la force que le potentiel U exerce sur une particule située au point $\vec{r}_n = (x_n\,, y_n\,, z_n)$ est :

$$\vec{F}_{\to n} = -\left(\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{\vec{r}_n} \vec{e}_x + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{\vec{r}_n} \vec{e}_y + \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{\vec{r}_n} \vec{e}_z \right)$$

$$\Leftrightarrow \vec{F}_{\to n} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_n} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_n} U = -grad_{\vec{r}_n}(U) \qquad \text{(Eq. 1.25)}$$

On a utilisé dans (Eq. 1.25) l'opérateur *nabla*, noté $\vec{\nabla}$, qui permet une écriture plus compacte du gradient. Il s'agit d'un vecteur dont les composantes évaluées au point $\vec{r}$ sont

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} = \left(\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{\vec{r}} \ ; \ \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{\vec{r}} \ ; \ \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_{\vec{r}} \right) \qquad \text{(Eq. 1.26)}$$

1.6.2. Construction du Lagrangien

La notion de gradient spatial étant clarifiée, nous pouvons nous consacrer à l'identification du Lagrangien en présence d'une force conservative. Partons dans un premier temps d'un Lagrangien $\mathcal{L}_0$ égal à l'énergie cinétique totale de notre système à N particules.

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{n=1..N} \frac{1}{2} m_n \left\| \frac{d\vec{r}_n}{dt} \right\|^2 \qquad \text{(Eq. 1.27)}$$

Portons un instant notre attention sur le terme $d\vec{r}_n/dt$ qui se trouve être le vecteur vitesse de la particule n. Le vecteur position de la particule n ne dépend évidemment que de ses trois coordonnées dans l'espace qui sont *rangées* quelque part dans le vecteur $\boldsymbol{q} = (q_1, \cdots, q_{3N})$ des coordonnées généralisées. Bien que le vecteur $\vec{r}_n$ ne dépende que de trois coordonnées généralisées parmi toutes celles du système, rien ne nous empêche d'utiliser l'ensemble des $s = 3N$ coordonnées généralisées pour écrire sa dérivée par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{r}_n}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_{3N}}\frac{dq_{3N}}{dt} = \sum_{i=1..s} \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} = \sum_{i=1..s} \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_i}\dot{q}_i \qquad \text{(Eq. 1.28)}$$

En effet, les dérivées partielles de $\vec{r}_n$ par rapport aux coordonnées q_i dont il ne dépend pas sont tout simplement nulles et n'ont par conséquent aucun effet sur la somme.

Continuons en développant le terme $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{q}_i}$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{n=1..N} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}m_n \left\|\frac{d\vec{r}_n}{dt}\right\|^2\right)\right]$$

Attention à ne pas se mélanger les pinceaux dans les indices de l'équation ci-dessus ! L'indice i correspond à l'une des s coordonnées généralisées du système, tandis que l'indice n parcourt les N particules du système.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{n=1..N} m_n \frac{d\vec{r}_n}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d\vec{r}_n}{dt}\right)\right]$$

Insérons-y maintenant le résultat obtenu dans (Eq. 1.28).

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{n=1..N} m_n \frac{d\vec{r}_n}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\sum_{j=1..s} \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)\right]$$

En appliquant la règle de Leibniz sur la dérivée partielle du produit $\frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_j}\dot{q}_j$ par rapport à $\dot{q}_i$ on trouve :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{n=1..N} m_n \frac{d\vec{r}_n}{dt}\cdot\sum_{j=1..s}\left(\frac{\partial^2 \vec{r}_n}{\partial \dot{q}_i \partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_i}\right)\right] \qquad \text{(Eq. 1.29)}$$

Puisque le vecteur position $\vec{r}_n$ ne dépend que des coordonnées généralisées q_i, et pas des vitesses généralisées $\dot{q}_i$, nous pouvons écrire que

$$\frac{\partial \vec{r}_n}{\partial \dot{q}_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{r}_n}{\partial \dot{q}_i \partial q_j}\dot{q}_j = 0$$

et ainsi simplifier (Eq. 1.29) en :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{n=1..N} m_n \frac{d\vec{r}_n}{dt}\cdot\sum_{j=1..s}\left(\frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]$$

Puis, en insérant la relation d'indépendance entre les vitesses généralisées $\partial \dot{q}_j / \partial \dot{q}_i = \delta_i^j$ (cf. Eq. 1.2) il vient :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{n=1..N} m_n \frac{d\vec{r}_n}{dt}\cdot \sum_{j=1..s}\left(\frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_j}\delta_i^j\right)\right]$$

Dans la dernière somme sur l'indice j, seul le terme $j = i$ est non nul car $\delta_i^j = 0$ pour $j \neq i$. Ne reste plus alors que :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{n=1..N} m_n \frac{d\vec{r}_n}{dt}\cdot \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_i}\right]$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{n=1..N} m_n \left(\frac{d^2\vec{r}_n}{dt^2}\cdot\frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_i} + \frac{d\vec{r}_n}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_i}\right)\right) \qquad \text{(Eq. 1.30)}$$

Montrons rapidement qu'on peut intervertir la dérivée totale et la dérivée partielle dans le dernier terme de (Eq. 1.30).

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\vec{r}_n}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{j=1..s}\frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{j=1..s}\frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\vec{r}_n}{dt}\right) = \sum_{j=1..s}\left(\dot{q}_j\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_j}\right) + \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}\right)$$

Le dernier terme à droite étant clairement nul car les vitesses généralisées $\dot{q}_j$ sont indépendantes de coordonnées généralisées q_i (cf. Eq. 1.2, $\partial \dot{q}_j/\partial q_i = 0$), on se retrouve avec :

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\vec{r}_n}{dt}\right) = \sum_{j=1..s}\frac{dq_j}{dt}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_j}\right)$$

On reconnaît dans le membre de droite la définition de la dérivée totale de $\partial\vec{r}_n/\partial q_i$ par rapport au temps, ce qui prouve que :

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\vec{r}_n}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_i}\right) \qquad \text{(Eq. 1.31)}$$

Nous pouvons donc utiliser l'interversion de (Eq. 1.31) dans (Eq. 1.30) :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{n=1..N} m_n \left(\frac{d^2\vec{r}_n}{dt^2}\cdot\frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_i} + \frac{d\vec{r}_n}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\vec{r}_n}{dt}\right)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{n=1..N} m_n \frac{d\vec{r}_n}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\vec{r}_n}{dt}\right) = \sum_{n=1..N} m_n \frac{d^2\vec{r}_n}{dt^2}\cdot\frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_i} \qquad \text{(Eq. 1.32)}$$

Remarquons que, compte tenu de la forme (Eq. 1.27) que nous avions posée pour le Lagrangien, sa dérivée partielle par rapport à la coordonnée généralisée q_i est :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{n=1..N}\frac{1}{2}m_n\left(\frac{d\vec{r}_n}{dt}\right)^2\right) = \sum_{n=1..N} m_n \frac{d\vec{r}_n}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\vec{r}_n}{dt}\right)$$

ce qui en remplaçant dans (Eq. 1.32) donne :