Mohammed El Amrani

Analyse complexe

Une approche progressive et enrichie de nombreux exercices entièrement corrigés

Licence
Master
Agrégation

ellipses

Chapitre 1

Nombres et fonctions complexes

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et propriétés classiques sur les nombres et les fonctions complexes. Nous présentons également quelques éléments d'analyse fondamentale et de topologie dans le plan complexe, et précisons des notations qui serviront tout le long de cet ouvrage.

1 Algèbre et géométrie des nombres complexes

1.1. Le corps des nombres complexes

L'ensemble $\mathbf{R}^2$ muni des opérations d'addition et de multiplication définies par

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

$$(x, y) \times (u, v) = (xu - yv, xv + yu)$$

est noté $\mathbf{C}$. On a clairement

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \times (y, 0) \;;$$

$$(0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0) \;;$$

$$(x, 0) \times (y, 0) = (xy, 0).$$

Ainsi, en écrivant i pour $(0, 1)$ et en identifiant x avec $(x, 0)$, on peut écrire chaque élément de $\mathbf{C}$, de manière unique, sous la **forme algébrique** $x + iy$ avec $i^2 = -1$. Il est clair que $\mathbf{C}$ est un espace vectoriel réel de dimension 2 et que $(1, i)$ en constitue une base.
Les éléments de $\mathbf{C}$ sont appelés les **nombres complexes**. Dans $z = x + iy$, les réels x et y sont appelés respectivement **partie réelle** et **partie imaginaire** de z, notées $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.
Les opérations dans $\mathbf{C}$ peuvent donc se traduire simplement par

$$(x + iy) + (u + iv) = x + u + i(y + v),$$

$$(x+iy)\times(u+iv) \;=\; xu-yv \;+\; i(xv+yu).$$

On vérifie sans peine que, pour tous $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$:

$$z_1+z_2 \;=\; z_2+z_1\ ,\quad (z_1+z_2)+z_3 \;=\; z_1+(z_2+z_3),$$

$$z_1\times z_2 \;=\; z_2\times z_1\ ,\ (z_1\times z_2)\times z_3 \;=\; z_1\times(z_2\times z_3).$$

Par ailleurs, tout nombre complexe non nul $z = x+iy$ admet un **inverse** donné par

$$z^{-1} \;=\; \frac{1}{z} \;=\; \frac{x}{x^2+y^2} \;+\; i\,\frac{-y}{x^2+y^2}. \tag{1.1}$$

Ce qui précède permet de vérifier sans peine le résultat suivant.

1.2. Théorème *Muni des lois internes* $+$ *et* $\times$ *définies ci-dessus, l'ensemble* $\mathbf{C}$ *des nombres complexes est un corps commutatif.*

1.3. Remarque Nous montrerons plus loin (section 4.6 du chapitre 7) que le corps $\mathbf{C}$ est **algébriquement clos** (c'est-à-dire que tout polynôme non constant à coefficients complexes admet une racine dans $\mathbf{C}$).

1.4. Conjugaison et module

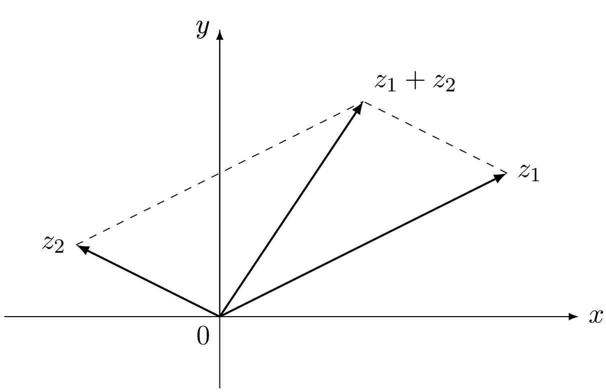
Désormais, le produit $z_1\times z_2$ sera noté simplement z_1z_2.
Le **conjugué complexe** de $z = x+iy$ est noté $\overline{z}$ et défini par $\overline{z} = x-iy$.
Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, on a clairement

$$\overline{\overline{z_1}} = z_1\ ,\quad \overline{z_1+z_2} \;=\; \overline{z_1}+\overline{z_2}\ ,\quad \overline{z_1z_2} \;=\; \overline{z_1}\;\overline{z_2}\ ,\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} \;=\; \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2\neq 0).$$

De même, pour tout $z\in\mathbf{C}$:

$$\mathrm{Re}(z) \;=\; \frac{z+\overline{z}}{2} \quad\text{et}\quad \mathrm{Im}(z) \;=\; \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

Géométriquement, l'addition des nombres complexes correspond à l'addition des vecteurs dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$:



La multiplication, quant à elle, consiste en une rotation suivie d'une dilatation, un fait qui va devenir intuitivement évident une fois qu'on a rappelé la notion de représentation polaire d'un nombre complexe non nul.

Le **module** d'un nombre complexe $z = x + iy$ est le nombre réel positif noté $|z|$ et défini par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ de sorte que $|z|$ est précisément la distance euclidienne entre l'origine $(0,0)$ et le point (x,y) de $\mathbf{R}^2$.
Évidemment, $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$, et on a

$$|\mathrm{Re}(z)| \leq |z| \quad \text{et} \quad |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|.$$

De même, on a

$$|\overline{z}| = |z| \,,\ |zw| = |z| \times |w| \,,\ |z|^2 = z\,\overline{z} \,,\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0),$$

ainsi que l'**inégalité triangulaire** :

$$|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \tag{1.2}$$

et l'inégalité triangulaire dite *inverse* :

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|. \tag{1.3}$$

Les inégalités (1.2) et (1.3) font l'objet de l'exercice 1.3.
On dispose également de l'**identité de Lagrange** [1] :
Pour tous $z_1, z_2, \ldots, z_n$ et $w_1, w_2, \ldots, w_n$ dans $\mathbf{C}$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right) - \sum_{1 \leq k < j \leq n} \left|z_k \overline{w_j} - z_j \overline{w_k}\right|^2 \tag{1.4}$$

d'où l'on déduit l'incontournable **inégalité de Cauchy** [2]**-Schwarz** [3] :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right). \tag{1.5}$$

L'identité (1.4) et l'inégalité (1.5) font l'objet de l'exercice 1.7.

1. LAGRANGE Joseph-Louis (1736-1813). Mathématicien, mécanicien et astronome italien. Il jeta les bases du calcul variationnel. Surtout connu pour avoir introduit la méthode analytique en géométrie, il n'en a pas moins étudié toutes les branches des mathématiques et a laissé d'importants travaux tant en géométrie qu'en trigonométrie et en mécanique.

2. CAUCHY Augustin-Louis (1789-1857). Mathématicien français. Remarqué pour sa précocité par Lagrange et Laplace. Membre de l'Académie des Sciences, il fut aussi professeur à l'École Polytechnique et à la Sorbonne. Il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de la première moitié du XIX[e] siècle.

3. SCHWARZ Hermann (1843-1921). Mathématicien allemand. Travailla sur les surfaces minimales, le calcul des variations et les fonctions analytiques.

1.5. Représentation polaire

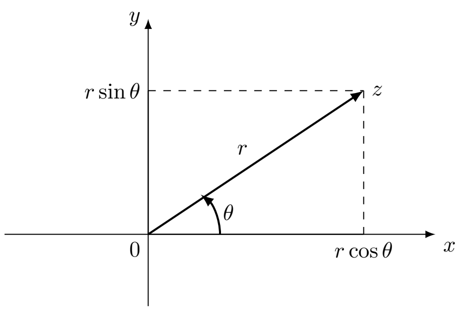
Si z est un nombre complexe non nul, on peut toujours le représenter sous **forme polaire** (ou **forme trigonométrique**) :

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\,\sin\theta) \tag{1.6}$$

où θ est un nombre réel ; pour cela il suffit de choisir n'importe quel θ vérifiant

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}.$$

Chaque nombre réel θ pour lequel on a (1.6) est appelé **un argument** de z. Géométriquement, θ fournit une mesure en radians de l'angle entre l'axe réel positif et le vecteur représentant le point d'affixe z dans le plan complexe :



On désignera par arg$z$ l'ensemble de tous les arguments de z.
Si l'on connait un argument θ_0 de z, alors $\arg z = \{\theta_0 + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbf{Z}\}$.
Le réel θ dans (1.6) n'est donc déterminé qu'à un multiple entier de 2π près.
Par exemple, $\arg(-1) = \{(2k+1)\pi\ ;\ k \in \mathbf{Z}\}$.
Il est d'usage en analyse complexe d'écrire $\arg z = \theta$ plutôt que $\theta \in \arg z$.

1.6. Définition La valeur de θ qui se trouve dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ s'appelle **la détermination principale de l'argument** de z, on la notera $\mathrm{Arg}\,z$.

1.7. Exemple $\mathrm{Arg}\,i = \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Arg}\,(1-i) = -\frac{\pi}{4}$, $\mathrm{Arg}\,(-\pi) = \pi$.

Soient z et w deux nombres complexes non nuls de forme polaire :

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\,\sin\theta) \quad \text{et} \quad w = |w|\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi).$$

D'après (1.1), on a alors

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\,(\cos\theta - i\,\sin\theta) = \frac{1}{|z|}\,(\cos(-\theta) + i\,\sin(-\theta)). \tag{1.7}$$

De même,

$$\begin{aligned} zw &= |z| \times |w|\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) \\ &= |z| \times |w|\,\big[\cos\theta\,\cos\varphi - \sin\theta\,\sin\varphi + i\,(\cos\theta\,\sin\varphi + \sin\theta\,\cos\varphi)\big], \end{aligned}$$

d'où

$$zw = |z| \times |w| \ \big(\cos(\theta+\varphi) + i \sin(\theta+\varphi)\big). \tag{1.8}$$

La relation (1.8) montre que le nombre complexe zw est de module $|z| \times |w|$ et admet $\theta+\varphi$ comme un de ses arguments.

Comme conséquence directe des relations (1.7) et (1.8), on observe que

$$\arg(1/z) = -\arg z \ \text{ et } \ \arg(zw) = \arg z + \arg w,$$

dans le sens où l'ensemble des arguments de $1/z$ est constitué de tous les opposés des arguments de z, tandis que toutes les sommes des arguments de z et w contituent l'ensemble des arguments de zw.

1.8. Remarque Il n'est pas vrai que $\mathrm{Arg}(1/z) = -\mathrm{Arg}\, z$ ou encore que $\mathrm{Arg}(zw) = \mathrm{Arg}\, z + \mathrm{Arg}\, w$. Par exemple,

$$\mathrm{Arg}\,(-1/2) = \pi \neq -\pi = -\mathrm{Arg}\,(-2)$$

et

$$\mathrm{Arg}\,(-1) = \pi \neq -\pi = \mathrm{Arg}\,(-i) + \mathrm{Arg}\,(-i).$$

À l'aide des relations (1.7) et (1.8) et par une récurrence directe sur $n \in \mathbf{N}$, on obtient

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta). \tag{1.9}$$

À l'aide de (1.7), on voit aussitôt que la relation (1.9), appelée **formule de de Moivre** [4], est encore vraie pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

1.9. Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $z \in \mathbf{C}$. On dit qu'un nombre complexe w est une **racine n-ième** de z si $w^n = z$. Les racines n-ièmes de z sont donc précisément les racines du polynôme $w^n - z$. Comme ce polynôme est de degré n, z admet au plus n racines n-ièmes. Si $z \neq 0$, alors z admet exactement n racines n-ièmes que nous explicitons ci-dessous grâce à la formule de de Moivre.

1.10. Proposition *Soient z un nombre complexe non nul et n un entier strictement positif. Alors z admet exactement n racines n-ièmes complexes distinctes données sous forme polaire par*

$$|z|^{1/n} \left(\cos\left(\frac{\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

4. MOIVRE Abraham de – (1667-1754). Mathématicien français. Il se consacra essentiellement à «la théorie des fluxions». Cette notion est une alternative à celle des infiniment petits proposée par Leibniz pour traiter le calcul différentiel.

Démonstration. Écrivons $z = |z|\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$, avec $\theta = \operatorname{Arg} z$. On recherche tous les nombres complexes $w = |w|\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$ vérifiant $w^n = z$. D'après la formule de de Moivre, cette équation devient

$$|w|^n \big(\cos(n\varphi) + i\,\sin(n\varphi)\big) = |z|\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

d'où l'on déduit que

$$|w|^n = |z|\,, \ \cos(n\varphi) = \cos\theta \ \text{ et } \ \sin(n\varphi) = \sin\theta,$$

ou encore

$$|w| = |z|^{1/n} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad \text{pour} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

En prenant $k = 0, 1, \ldots, n-1$, on obtient les n racines n-ièmes distinctes du nombre complexe non nul z. □

1.11. Exemple Déterminons les quatre racines 4-ièmes de -16.
On a $16^{1/4} = 2$ et $\operatorname{Arg}(-16) = \pi$. D'après la proposition 1.10, les racines 4-ièmes de -16 sont

$$2\big(\cos(\pi/4) + i\,\sin(\pi/4)\big)\ , \ 2\big(\cos(3\pi/4) + i\,\sin(3\pi/4)\big)$$
$$2\big(\cos(5\pi/4) + i\,\sin(5\pi/4)\big)\ , \ 2\big(\cos(7\pi/4) + i\,\sin(7\pi/4)\big),$$

que l'on peut ici expliciter sous forme algébrique :

$$\sqrt{2} + i\sqrt{2}\ ,\ -\sqrt{2} + i\sqrt{2}\ ,\ -\sqrt{2} - i\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

2 Exponentielles et logarithmes d'un nombre complexe

2.1. Élever e à une puissance complexe

L'objet de ce paragraphe est de définir la quantité e^z pour un nombre complexe z et en donner quelques propriétés élémentaires. L'introduction de cette notion peut paraître prématurée (la fonction $z \mapsto e^z$ sera étudiée au chapitre 2) mais il nous a paru avantageux et finalement pas très difficile de disposer dès à présent de la notion d'exponentielle d'un nombre complexe donné.

Rappelons que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $t \mapsto e^t$ admet un développement de Taylor :

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots$$

Si on remplace t par iy ($y \in \mathbf{R}$) dans cette série et qu'on calcule formellement, c'est-à-dire sans considération de problème de convergence, on trouve

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots \\ &= \Big(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\Big) + i\Big(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\Big). \end{aligned}$$

On observe alors que les deux séries de la dernière ligne ne sont autres que les développements en série de Taylor de $\cos y$ et $\sin y$, respectivement. En d'autres termes, ce constat suggère que la formule $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ représente la bonne interprétation de la quantité e^{iy} pour $y \in \mathbf{R}$.
Comme de plus $e^{s+t} = e^s e^t$ pour tous $s, t \in \mathbf{R}$, il semble raisonnable de suggérer que $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}$. Pour $z = x + iy$, on est donc naturellement amené à définir e^z par la formule :

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y). \tag{1.10}$$

On ainsi : $e^0 = 1$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{1+(i\pi/2)} = ei$ et $e^i = \cos 1 + i \sin 1$.
Il sera souvent plus commode de noter $\exp(z)$ au lieu de e^z, notamment lorsqu'on substituera à z une expression plus compliquée.
De la formule (1.10), on déduit que, pour tout $z \in \mathbf{C}$:

$$e^z \neq 0 \ , \ |e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \ \text{ et } \ \arg(e^z) = \mathrm{Im}(z).$$

De plus, la formule de de Moivre (1.9) implique directement que

$$\forall n \in \mathbf{Z} \ , \ (e^z)^n = e^{nz}. \tag{1.11}$$

En particulier, $(e^z)^{-1} = e^{-z}$.
Soient $z = x + iy$ et $w = u + iv$ où $x, y, u, v \in \mathbf{R}$. D'après (1.10),

$$\begin{aligned} e^z e^w &= e^x (\cos y + i \sin y)\, e^u (\cos v + i \sin v) \\ &= e^{x+u} [\cos(y+v) + i \sin(y+v)] = e^{z+w}, \end{aligned}$$

ce qui fournit la relation fondamentale :

$$\forall z, w \in \mathbf{C} \ , \ e^z e^w = e^{z+w}. \tag{1.12}$$

• Examinons à présent l'équation $e^z = 1$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.
Si z est une solution , alors nécessairement $|e^z| = e^{\mathrm{Re} z} = 1$, donc $\mathrm{Re}(z) = 0$. On a ensuite, $e^{iy} = \cos y + i \sin y = 1$ si et seulement si $\cos y = 1$ et $\sin y = 0$. Les deux conditions sont simultanément vérifiées si et seulement si $y = 2k\pi$ pour $k \in \mathbf{Z}$. On en conclut que

$$e^z = 1 \iff z = 2k\pi i \ , \ k \in \mathbf{Z}.$$

Maintenant, en utilisant les relations (1.11) et (1.12), on voit que l'égalité $e^z = e^w$ est équivalente à $e^{z-w} = 1$ et on a finalement

$$e^z = e^w \iff w = z + 2k\pi i \ , \ k \in \mathbf{Z}. \tag{1.13}$$

2.2. Remarque On a représenté plus haut tout nombre complexe non nul z sous forme polaire :

$$z \;=\; r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta),$$

où $r = |z|$ et θ est un argument quelconque de z. Cette représentation de z peut donc à présent s'exprimer plus succinctement sous la forme dite *exponentielle* :

$$z \;=\; r\,e^{i\theta}. \tag{1.14}$$

Dans la plupart des situations, c'est (1.14) que nous privilégierons comme représentation d'un nombre complexe z non nul.

2.3. Logarithmes d'un nombre complexe

Si $\ln t$ désigne le logarithme népérien d'un réel strictement positif t, on sait que $s = \ln t$ signifie que $e^s = t$. Cela suggère de dire qu'un nombre complexe w est le logarithme d'un nombre complexe non nul z si $e^w = z$, et que tout nombre complexe vérifiant cette propriété est **un logarithme** de z.
Contrairement au cas réel où $e^t = s$ est vérifié pour un unique réel s, dans le cas complexe, il y a une infinité de valeurs de w pour lesquelles $e^w = z$. Par exemple, $e^w = 1$ est vérifiée pour tout $w = 2ik\pi$ où $k \in \mathbf{Z}$, et chacun de ces w est donc un logarithme de 1 !
Comme nous l'avons fait avec les arguments d'un nombre complexe non nul z, nous allons privilégier un des logarithmes de z comme étant

$$w \;=\; \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z,$$

où $\mathrm{Arg}z \in]-\pi, \pi]$ désigne la détermination principale de $\arg z$.
Grâce à la relation (1.12), on obtient

$$e^w \;=\; e^{\ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z} \;=\; e^{\ln|z|}\,e^{i\,\mathrm{Arg}\,z} \;=\; |z|\,e^{i\,\mathrm{Arg}\,z} \;=\; z$$

confirmant ainsi le fait que w est bien un logarithme de z.
On dit que w est **la détermination principale** (ou **branche principale**) du logarithme de z et on la notera $\mathrm{Log}\,z$. Ainsi,

$$\mathrm{Log}\,z \;=\; \ln|z| \,+\, i\,\mathrm{Arg}\,z. \tag{1.15}$$

De même, $\log z$ désignera simplement l'ensemble de toutes les déterminations du logarithme de z.

2.4. Remarque La définition (1.15) donne $\mathrm{Log}\,x = \ln x$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$. C'est pourquoi, nous écrirons parfois $\mathrm{Log}\,x$ au lieu de $\ln x$ pour $x > 0$.

2.5. Exemple $\mathrm{Log}\,(ei) \;=\; 1 + \frac{\pi}{2}\,i$, $\mathrm{Log}\,(1-i) \;=\; \ln(\sqrt{2}) \;-\; \frac{\pi}{4}\,i.$

Puisque tout logarithme w de z vérifie $e^w = z = e^{\operatorname{Log} z}$, il résulte de (1.15) que

$$w = \operatorname{Log} z + 2ik\pi = \operatorname{Log}|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Si w_1 est un logarithme de z_1 et si w_2 est un logarithme de z_2, alors

$$e^{w_1+w_2} = e^{w_1}\, e^{w_2} = z_1\, z_2,$$

ce qui prouve que $w_1 + w_2$ est un logarithme de $z_1\, z_2$. On peut donc écrire

$$\log(z_1\, z_2) = \log z_1 + \log z_2,$$

qu'il faut interpréter de la manière suivante : l'ensemble des logarithmes de $z_1\, z_2$ est constitué de toutes les sommes des logarithmes de z_1 et des logarithmes de z_2.

2.6. Remarque En général, $\operatorname{Log}(z_1\, z_2) \neq \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2$ puisque, par exemple,

$$\operatorname{Log}(-i) = -\frac{\pi}{2}\, i \neq \frac{3\pi}{2}\, i = \operatorname{Log}(-1) + \operatorname{Log} i.$$

Autrement dit, $\operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2$ est bien un logarithme de $z_1\, z_2$, mais n'est pas nécessairement la détermination principale du logarithme de ce produit.

2.7. Puissance complexe d'un nombre complexe

De ce qui précède, on déduit la définition naturelle suivante.

2.8. Définition Soient z et λ deux nombres complexes, $z \neq 0$. On appelle z **à la puissance** λ, et on note z^λ, tout nombre complexe $e^{\lambda \log z}$ où $\log z$ désigne une détermination quelconque du logarithme de z.

2.9. Remarque Sauf mention du contraire, z^λ désignera désormais le nombre complexe $e^{\lambda \operatorname{Log} z}$ où Log est la détermination principale du logarithme.

2.10. Exemple $i^{2\pi} = e^{2\pi \operatorname{Log} i} = e^{i\pi^2} = \cos(\pi^2) + i \sin(\pi^2)$.

2.11. Remarque Puisque toute détermination du logarithme de z est de la forme $\operatorname{Log} z + 2k\pi i$ pour $k \in \mathbf{Z}$, il en résulte aussitôt que z à la puissance λ sera un nombre complexe de la forme $e^{2k\pi\lambda i}\, e^{\lambda \operatorname{Log} z}$ où $k \in \mathbf{Z}$. Deux cas sont particulièrement importants :

- Cas où $\lambda = n \in \mathbf{Z}$:

On a alors $e^{2k\pi\lambda i} = 1$, et donc z à la puissance λ n'est autre que z^n.

- Cas où $\lambda = 1/n$ avec $n \in \mathbf{N}^*$:

On a

$$\begin{aligned}
e^{2k\pi\lambda i}\ z^{\lambda} &= \exp\left(\frac{2k\pi i}{n}\right)\ \exp\left(\frac{\operatorname{Log} z}{n}\right) \\
&= \exp\left(\frac{\operatorname{Log}|z|}{n} + i\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}\right)\right) \\
&= \exp\left(\operatorname{Log}|z|^{1/n}\right)\ \exp\left(i\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}\right)\right) \\
&= |z|^{1/n}\ \exp\left(i\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que z à la puissance $1/n$ désigne a priori une quelconque des racines n-ièmes de z.

2.12. Remarque Pour tous $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$, on a $z^{\lambda+\mu} = z^{\lambda}\, z^{\mu}$, mais d'autres formules peuvent ne plus être valides. Par exemple,

$$(-i)^{1/2} = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} \neq (-1)^{1/2}\, i^{1/2} = \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}.$$

3 Éléments de topologie du plan

3.1. Disques du plan complexe

Commençons par fixer la notation pour un nombre d'ensembles standard qui seront utilisés tout le long de l'ouvrage.
Si z_0 est un point du plan complexe et si $r \in \mathbf{R}_+^*$, on note

$$\begin{aligned}
D(z_0, r) &= \left\{z \in \mathbf{C}\ ;\ |z - z_0| < r\right\}\ ; \\
\overline{D}(z_0, r) &= \left\{z \in \mathbf{C}\ ;\ |z - z_0| \le r\right\}\ ; \\
C(z_0, r) &= \left\{z \in \mathbf{C}\ ;\ |z - z_0| = r\right\}.
\end{aligned}$$

Les ensembles $D(z_0, r)$ et $\overline{D}(z_0, r)$ sont appelés respectivement le **disque ouvert** et le **disque fermé** de centre z_0 et de rayon r, tandis que $C(z_0, r)$ n'est autre que le **cercle** de centre z_0 et de rayon r. L'ensemble $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ est appelé le **disque épointé**.

3.2. Points intérieurs et ensembles ouverts

3.3. Définitions Soient A une partie de $\mathbf{C}$ et $z_0 \in A$. On dit que z_0 est un **point intérieur** de A s'il existe un nombre $r > 0$ tel que le disque ouvert $D(z_0, r)$ soit contenu dans A. On dit que A est un **ouvert** (de $\mathbf{C}$) s'il est vide ou si tout point de A est un point intérieur de A.

3.4. Exemples 1) L'ensemble vide $\varnothing$ et $\mathbf{C}$ sont des ouverts.

2) Tout disque ouvert $D(z_0, r)$ est un ouvert.

3) Le complémentaire $\mathbf{C} \setminus \overline{D}(z_0, r)$ de tout disque fermé est un ouvert.

4) Le **demi-plan de Poincaré**[5] $\mathbb{H} = \{z \in \mathbf{C}\ ;\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ est un ouvert.

Sauf mention explicite du contraire, tout ouvert sera désormais supposé *non vide.*

Le résultat suivant donne deux propriétés fondamentales des ensembles ouverts.

3.5. Proposition (1) *Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

(2) *Toute réunion (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert.*

Démonstration. (1) Soient $A_1, \ldots, A_n$ des ouverts. Posons $A = A_1 \cap \cdots \cap A_n$. Soit $z_0 \in A$. Pour chaque i, il existe $r_i > 0$ tel que $D(z_0, r_i) \subset A_i$. Comme les r_i sont en nombre fini, on peut prendre leur valeur minimale r. Alors, pour tout i, on a $D(z_0, r_i) \subset A$, donc $D(z_0, r) \subset A$ avec $r > 0$.

(2) Résulte immédiatement de la définition d'un ouvert. □

3.6. Définition On appelle **recouvrement ouvert** d'une partie A de $\mathbf{C}$, toute famille (U_α) d'ouverts de $\mathbf{C}$ (non nécessairement dénombrable) telle que $A \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$.

La connexité est une notion de topologie qui formalise le concept d'«objet d'un seul tenant».

3.7. Définition Une partie A de $\mathbf{C}$ est dite **connexe** si elle n'est pas l'union de deux ouverts de A disjoints et non vides (les ouverts de A étant les parties de A de la forme $A \cap U$ où U est un ouvert de $\mathbf{C}$). En d'autres termes, il n'existe pas de partition de A par deux ouverts (de A) disjoints et non vides.

3.8. Exemples 1) Tout disque ouvert $D(z_0, r)$ est connexe.

2) $\{z \in \mathbf{C}\,;\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$ est connexe.

3) $\{z \in \mathbf{C}\,;\ \mathrm{Re}(z) \neq 0\}$ n'est pas connexe.

4) $\{z \in \mathbf{C}\,;\ |\mathrm{Im}(z)| > 1\}$ n'est pas connexe.

3.9. Définition On appelle **domaine**, tout ouvert connexe (non vide) de $\mathbf{C}$.

3.10. Exemple Tout disque ouvert $D(z_0, r)$ et $\mathbf{C}$ sont des domaines.

5. POINCARÉ Henri (1854-1912). Considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de son temps, il a apporté des contributions essentielles ouvrant plusieurs champs nouveaux. Il a renouvelé la théorie des équations différentielles et des fonctions fuchsiennes. Ses études sur la physique mathématique ont eu un large impact en mécanique des solides et des fluides, l'optique et l'électromagnétisme. Il est considéré comme un précurseur de la relativité restreinte.