PRÉPAS SCIENTIFIQUES
1er semestre

1001 EXERCICES CORRIGÉS DE MATHÉMATIQUES

Konrad Renard

POUR RÉUSSIR SA PRÉPA

ellipses

Chapitre 1

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

1.1 Rappel de cours

Définitions 1 : soit f une application de E dans F
• Si A est une partie de E, on appelle **image directe** de A par f l'ensemble $f(A) = \{f(x),\ x \in A\}$.
• Si B est une partie de F, on appelle **image réciproque** de B par f l'ensemble
$f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}$.

Définitions 2 : soit f une application de E dans F
• f est **injective** si pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet **au plus une** solution $x \in E$.
• f est **surjective** si pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet **au-moins une** solution $x \in E$.
• f est **bijective** si pour tout $y \in F$, 'équation $y = f(x)$ admet **exactement une** solution $x \in E$.

Définitions 3 : soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E
• $\mathcal{R}$ est **réflexive** si $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$
• $\mathcal{R}$ est **symétrique** si $\forall (x,\ y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$
• $\mathcal{R}$ est **anti-symétrique** si $\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ alors $x = y$
• $\mathcal{R}$ est **transitive** si $\forall (x, y, z) \in E^3,\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$
• Si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive, alors $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence**.
• Si $\mathcal{R}$ est réflexive, anti-symétrique et transitive, alors $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre**.

1.2 Application du cours

EXERCICE 1 **5 minutes**

Exprimer à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes puis donner leur négation.

1. Soit f une application du plan dans lui-même.

- **a.** f est l'identité du plan.
- **b.** f a au moins un point fixe.

2. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- **a.** f est l'application nulle.
- **b.** L'équation $f(x) = 0$ admet une solution.
- **c.** L'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution.

3. Soit (u_n) une suite réelle.

- **a.** La suite (u_n) est majorée.
- **b.** La suite (u_n) est bornée.
- **c.** La suite (u_n) est croissante.

EXERCICE 2 **5 minutes**

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$.

1. $x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4 \ \ldots\ldots \ x = 2$;
2. $z \in \mathbb{C} \quad z = \overline{z} \ \ldots\ldots \ z \in \mathbb{R}$;
3. $x \in \mathbb{R} \quad x = \pi \ \ldots\ldots e^{2ix} = 1$.

EXERCICE 3 **10 minutes**

1. Ecrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions.

- **a.** $P \Rightarrow Q$,
- **b.** P et non Q,
- **c.** P et (Q et R),
- **d.** P ou (Q et R),
- **e.** (P et Q) $\Rightarrow$ ($R \Rightarrow S$).

2. Ecrire la négation des phrases suivantes :

- **a.** $(\forall x)(\exists n)/(x \leq n)$.
- **b.** $(\exists M)/(\forall n)(|u_n| \leq M)$.
- **c.** $(\forall x)(\forall y)(xy = yx)$.
- **d.** $(\forall x)(\exists y)/(yxy^{-1} = x)$.
- **e.** $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})/(\forall n \geq N)(|u_n| < \epsilon)$.
- **f.** $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha > 0)/(\forall f \in \mathcal{F})(\forall y \in \mathbb{R})(\left|x - y\right| < \alpha \Rightarrow \left|f(x) - f(y)\right| < \epsilon)$.

EXERCICE 4 **5 minutes**

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Etablir la négation des énoncés suivants :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq 1$.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe $x \in \mathbb{R}^{+}$ tel que $f(x) \leq 0$.
5. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

EXERCICE 5 **5 minutes**

Démontrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

EXERCICE 6 **10 minutes**

Dans un plan sont placés 66 points distincts. On trace toutes les droites déterminées par deux de ces points et on en compte 2012 distinctes.
Justifier que parmi ces 66 points, 4 au moins sont alignés.

EXERCICE 7 **5 minutes**

Montrer par contraposition les assertions suivantes, E étant un ensemble :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$,
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.

EXERCICE 8 **5 minutes**

1. Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.
2. Trouver une démonstration directe.

EXERCICE 9 **5 minutes**

Ecrire en extension $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0\}))$

EXERCICE 10 **5 minutes**

Soit $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ et $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$.
Etablir le produit cartésien $A \times B$. Quel est le nombre de parties de $A \times B$?

EXERCICE 11 **5 minutes**

Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E.

1. Montrer que $(A \Delta B = A \cap B) \iff (A = B = \emptyset)$.
2. Montrer que $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

EXERCICE 12 **15 minutes**

On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 4x \end{array} \right.$

1. Déterminer l'image directe de $f(\{0,\ 1,\ 4\})$.
2. Déterminer soigneusement l'image directe de $f([1,\ 5])$.

3. Déterminer l'image réciproque $f^{-1}\left(]-\infty,\ 5[\right)$.

EXERCICE 13 **5 minutes**

Soit une application $f : E \to F$. Déterminer :

1. $f(\emptyset)$
2. $f^{-1}(\emptyset)$
3. $f^{-1}(F)$.

EXERCICE 14 **10 minutes**

Soit l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x+1)^2-4 \end{cases}$

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Déterminer $f(\mathbb{R})$.
4. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$.
5. Déterminer $f^{-1}\left(\mathbb{R}^+\right)$.

EXERCICE 15 **20 minutes**

On appelle *équation fonctionnelle* la recherche des fonctions vérifiant certaines conditions.

1. On cherche les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$(1) \quad \forall (x\ ,\ y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) = f(x)+f(y)$$

a. *Analyse*

i. En supposant y constante réelle, déterminer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x+y)$.
ii. En prenant $x = 0$, déterminer $f'(y)$.
iii. En déduire l'expression de f.

b. *Synthèse*
Vérifier que la solution précédente est bien solution du problème.

2. En s'inspirant de la question précédente, trouver les fonctions f de $\mathbb{R}^{+\star}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et telles que :

$$\forall (x\ ,\ y) \in {\mathbb{R}^{+\star}}^2, \qquad f(xy) = f(x)+f(y)$$

EXERCICE 16 **10 minutes**

1. Déterminer les solutions réelles de l'équation $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.
2. Déterminer les solutions, $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, de l'équation $\left(x^x\right)^x = x^{x^x}$.

EXERCICE 17 **10 minutes**

Soit A une partie de E, on appelle fonction caractéristique de A l'application f de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0,1\}$, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Soit A et B deux parties de E, f et g leurs fonctions caractéristiques.
Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

1. $1-f$.
2. fg.
3. $f+g-fg$.

EXERCICE 18 **10 minutes**
Soient E un ensemble, A et B des sous-ensembles de E, démontrer les propriétés des fonctions indicatrices suivantes :

1. $A=\left\{x\in E \mid \mathbb{1}_A(x)=1\right\}$.
2. $\mathbb{1}_{A\cap B}=\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.
3. $\mathbb{1}_{\overline{A}}=1-\mathbb{1}_A$.
4. Si A et B sont disjoints, $\mathbb{1}_{A\cup B}=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B$.
5. Dans le cas général, $\mathbb{1}_{A\cup B}=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_{A\cap B}=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.

EXERCICE 19 **5 minutes**
Dans chacun des cas suivants, déterminer $f(I)$ puis vérifier que f réalise une bijection de I sur $J=f(I)$ puis préciser f^{-1} :

1. $f(x)=x^2-4x+3$, $I=]-\infty,2]$.
2. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$, $I=]-2,+\infty[$.
3. $f(x)=\sqrt{2x+3}-1$, $I=\left[-\frac{3}{2},+\infty\right[$.
4. $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$, $I=\mathbb{R}$.

EXERCICE 20 **10 minutes**
Soit (u_n) la suite définie par $u_0=2,\ u_1=3$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n$.
Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=1+2^n$.

EXERCICE 21 **10 minutes**
Le but de l'exercice est de démontrer par contraposition la propriété, pour $n\in\mathbb{N}^\star$: « Si l'entier $\left(n^2-1\right)$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair ».

1. Ecrire la contraposée de la propriété précédente.
2. Justifier qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n=4p+r$ avec $p\in\mathbb{N}$ et $r\in\{1;\ 3\}$.
3. Prouver la contraposée.
4. A-t-on démontré la propriété de l'énoncé ?

EXERCICE 22 **5 minutes**
Soit $(a,\ b,\ c)$ un triplet pythagoricien, c'est-à-dire un élément de $\left(\mathbb{N}^\star\right)^3$ tel que $a^2+b^2=c^2$.
On suppose que a, b et c n'ont pas de diviseur commun.
Montrer que c est impair.

EXERCICE 23 **10 minutes**
Démontrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ |x-1|\leqslant x^2-x+1$.

EXERCICE 24 **10 minutes**

Démontrer que si n est la somme de deux carrés alors le reste de la division euclidienne de n par 4 est toujours différent de 3.

EXERCICE 25 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$.

Montrer que f est bijective de $\left[-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ dans $\left[\ln\left(\frac{3}{4}\right)\ ;\ +\infty\right[$. et déterminer sa fonction réciproque.

EXERCICE 26 **10 minutes**

Soit $f :\ (x, y) \mapsto \left(x + 2y\ ,\ 2x - 5y\right)$.

Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa fonction réciproque.

EXERCICE 27 **10 minutes**

Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\mathcal{R}y \iff xe^y = ye^x$ est une relation d'équivalence.

EXERCICE 28 **10 minutes**

Soit $(E\ ,\ \leqslant)$ un ensemble ordonné. On définit sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ la relation $\prec$ par :

$$X \prec Y \text{ si et seulement si } \left(X = Y \text{ ou } \forall x \in X, \forall y \in Y, x \leqslant y\right)$$

1.3 Approfondissement

EXERCICE 29 **15 minutes**

Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E indexée par un ensemble I et $(B_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble F indexée par un ensemble I.

Soit f une application de E vers F. Comparer du point de vue de l'inclusion les parties suivantes :

1. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$ et $\bigcup_{i\in I} f(A_i)$.

2. $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$ et $\bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

3. $f(E \setminus A_i)$ et $F \setminus f(A_i)$.

4. $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)$ et $\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

5. $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$ et $\bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

6. $f^{-1}(F \setminus B_i)$ et $E \setminus f^{-1}(B_i)$.

EXERCICE 30 **10 minutes**

Soient E et F deux ensembles, $f :\ E \mapsto F$ une application, A et B deux parties de E.

Montrer que, si f est injective : $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

EXERCICE 31 **15 minutes**

Soient un ensemble E et quatre parties A_1, A_2, B_1, B_2 de E telles que $A_1 \cup B_1 = A_2 \cup B_2 = E$. Montrer que $(A_1 \cup A_2) \cup (B_1 \cap B_2) = E$.

EXERCICE 32 **15 minutes**

Soient E un ensemble et A un sous-ensemble non vide de E. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation binaire : $\forall (X,\ Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E),\ (X \mathcal{R} Y) \iff (X \cap A) = (Y \cap A)$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.
2. Justifier que $(X \mathcal{R} Y) \iff (A \cap (X \Delta Y) = \emptyset)$

EXERCICE 33 **10 minutes**

Soit x un réel tel que $x + \dfrac{1}{x}$ soit un entier relatif.

Montrer par une récurrence double que $\forall n \geqslant 1,\ x^n + \dfrac{1}{x^n}$ est aussi un entier relatif.

EXERCICE 34 **10 minutes**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Démontrer par une récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = 2^{n-1}$.

EXERCICE 35 **10 minutes**

Prouver par une récurrence forte, que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \exists!(a, b) \in \mathbb{N}^2, n = 2^a\,(2b+1)$

EXERCICE 36 **10 minutes**

Soit E l'ensemble des droites du plan. Le parallélisme et l'orthogonalité sont-elles des relations réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives ?

EXERCICE 37 **5 minutes**

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f : x \mapsto x^2$.

1. Déterminer les ensembles suivants :
   $f([-4;-2])$, $f([-3;2])$, $f([-4;-2] \cup [-3;2])$ et $f([-4;-2] \cap [-3;2])$.
2. Déterminer les ensembles suivants :
   $f^{-1}(]-\infty;3])$, $f^{-1}([1;+\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty;3] \cap [1;+\infty[)$.

EXERCICE 38 **10 minutes**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1\ ;\ 1]$.
3. Montrer que la restriction $g :\ [-1;1] \to [-1;1],\ g(x) = f(x)$ est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.

EXERCICE 39 **5 minutes**

Soient $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ y & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & y=0 \\ y-1 & \text{si} & y \geqslant 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$

Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$.

EXERCICE 40 **15 minutes**

Soient E, F et G trois ensembles. Soient les f une application de E dans F et g une application de F dans G.

1. Montrer que si $\left(g \circ f\right)$ injective alors f injective.
2. Montrer que si $\left(g \circ f\right)$ injective et f surjective alors g injective.
3. Montrer que si $\left(g \circ f\right)$ surjective alors g surjective.
4. Soient f et g bijectives.
   a. Justifier l'existence de $\left(g \circ f\right)^{-1}$.
   b. Donner la réciproque de $\left(g \circ f\right)$ en fonction de f^{-1} et g^{-1}.

EXERCICE 41 **10 minutes**

Parmi les applications $f \circ g \circ h$, $g \circ h \circ f$ et $h \circ f \circ g$ deux sont injectives et une est surjective. Montrer que f, g et h sont bijectives.

EXERCICE 42 **15 minutes**

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes (f est une application d'un ensemble E dans lui-même) :

1. f est injective.
2. $\forall X \in \mathcal{P}(E),\ f^{-1}(f(X)) = X$.
3. $\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2,\ f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.
4. $\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2,\ X \cap Y = \varnothing \Rightarrow f(X) \cap f(Y) = \varnothing$.
5. $\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2,\ Y \subset X \Rightarrow f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$.

EXERCICE 43 **15 minutes**

1. Soit $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{R}$ par $(a, b)\mathcal{R}(a', b') \iff a + b' = b + a'$.
   Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Même question avec $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $(p, q)\mathcal{R}(p', q') \iff pq' = p'q$.

EXERCICE 44 **10 minutes**

1. Donner la négation de l'assertion :
   $\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}, \left|x - y\right| \leqslant \alpha \implies \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \epsilon$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner la forme contraposée de l'assertion :

$$\left(f(x) \leqslant 1\right) \implies (x \geqslant 3)$$

EXERCICE 45 **30 minutes**

Soient E et F deux ensembles. On dit que E est équipotent à F s'il existe une bijection de E sur F. On note alors $E \sim F$.

1. Montrer que $\phi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^\star \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$ est bijective. Quelle est sa fonction réciproque ?

2. a. Par récurrence forte, montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe deux entiers m et p tels que $n = 2^m \left(2p+1\right)$.

b. On considère l'application $\phi_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N}^\star \\ (m,p) & \mapsto & 2^m \left(2p+1\right) \end{array} \right.$. Montrer que ϕ_2 est injective.

3. En déduire que $\mathbb{N}^2$ est équipotent à $\mathbb{N}$.

4. On note $\phi_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $\phi_3(n) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{n}{2} & \text{si} & n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si} & n \text{ est impair} \end{array} \right.$

a. Montrer que ϕ_3 est surjective.

b. Montrer que ϕ_3 est injective.

5. a. Soit E un ensemble. Montrer que $E \sim E$.

b. Soient E et F deux ensembles. Montrer que si $E \sim F$ alors $F \sim E$.

c. Soient E, F et G trois ensembles. Montrer que si $E \sim F$ et $F \sim G$ alors $E \sim G$.

d. Soient E, F, G et H quatre ensembles. Montrer que si $E \sim G$ et $F \sim H$ alors $E \times F \sim G \times H$.

On admet le théorème de Cantor-Berstein qui sera démontré dans l'exercice suivant.

Soient E et F deux ensembles. S'il existe une injection de E dans F et un injection de F dans E alors il existe une bijection de E sur F.

6. a. Construire une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$.

b. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (p,q) & \mapsto & 2^p 3^q \end{array} \right.$. Montrer que f est injective.

c. Quel résultat déjà établi retrouve-t-on ? La fonction f est-elle surjective ?

7. Montrer que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont équipotents.

EXERCICE 46 **30 minutes**

Dans cet exercice, on prouve le théorème de Cantor-Bernstein :

Soient E et F deux ensembles. S'il existe une injection de E dans F et un injection de F dans E alors il existe une bijection de E sur F.

On considère deux ensembles E et F ainsi que deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to E$ injectives.

On définit par récurrence une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E en posant $C_0 = E \setminus g(F)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = g \circ f\,(C_n)$. Enfin, on note $C = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

1. Justifier que tout $x \in E \setminus C$ admet un et un seul antécédent par g dans F. On note $\widetilde{g}(x)$ cet antécédent.

☞ *On pourra utiliser l'ensemble* C_0

2. On définit une application $h : E \to F$ par $h : x \mapsto \left\{ \begin{array}{lll} f(x) & \text{si} & x \in C \\ \widetilde{g}(x) & \text{si} & x \in E \setminus C \end{array} \right.$

a. Montrer que h est injective.

b. Montrer que h est surjective.

☞ *On pourra commencer par traiter le cas $y \notin f(C)$ et montrer qu'alors $g(y) \notin C$.*

La fonction h ainsi construite est une bijection de E sur F.

EXERCICE 47 **30 minutes**

Soit E un ensemble. Pour tous $(A,B) \in \mathcal{P}^2(E)$, on appelle **différence symétrique** de A et B, notée $A\Delta B$, la partie de E définie par :

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)$$

On remarque que $\forall (A,B) \in \mathcal{P}^2(E),\ A\Delta B = B\Delta A$. *On dit que l'opération Δ est commutative.*

1. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Déterminer les ensembles $A\Delta E$, $A\Delta A$, $A\Delta\varnothing$ et $A\Delta\overline{A}$.

2. Montrer que $\forall (A,B) \in \mathcal{P}^2(E),\ A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

3. Soient $(A,B) \in \mathcal{P}^2(E)$.

a. Montrer que $\overline{A\Delta B} = \overline{A}\Delta B = A\Delta\overline{B}$.

b. Que peut-on dire de $\overline{A}\Delta\overline{B}$?

4. **Associativité de l'opération Δ**

Soient $(A,B,C) \in \mathcal{P}^3(E)$

a. Justifier que $(A\Delta B)\Delta C = \left((A\Delta B) \cap \overline{C}\right) \cup \left(\left(\overline{A}\Delta B\right) \cap C\right)$.

b. En déduire que :

$$(A\Delta B)\Delta C = \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup (A \cap B \cap C)$$

c. Conclure que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$. On dit que la différence symétrique est une opération associative, et on note $A\Delta B\Delta C$ l'ensemble $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

5. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On considère l'application $\phi_A : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto & A\Delta B \end{cases}$

a. Soit $C \in \mathcal{P}(E)$. En utilisant les propriétés de l'opération Δ, expliciter l'ensemble $A\Delta C\Delta A$.

b. En déduire que l'application ϕ_A est surjective.

6. Montrer que l'application ϕ_A est injective.

1.4 Préparer sa colle

EXERCICE 48 : Lois de Morgan **5 minutes**

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que :

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ **2.** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

EXERCICE 49 **10 minutes**

Montrer les équivalences suivantes :

1. $A \subset B \iff A \cup B = B$ **2.** $A = B \iff A \cup B = A \cap B$

EXERCICE 50 **15 minutes**

Soient E un ensemble, A et B deux parties de E. Soit :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right\}$$

Etudier la surjectivité, l'injectivité, la bijectivité de f.

EXERCICE 51 **10 minutes**

Soit E un ensemble et f une application de E dans E telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.

EXERCICE 52 **15 minutes**

Soit E un ensemble et f une application de E dans F.
Montrer que f est bijective si et seulement si pour toute partie A de E, $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$.

EXERCICE 53 **20 minutes**

Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même. Montrer que :

1. **a.** f est injective $\iff \forall X \in \mathcal{P}(E),\ f^{-1}\left(f(X)\right) = X$.
   b. f est injective $\iff \forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2,\ f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.
2. f est surjective $\iff \forall X \in \mathcal{P}(E),\ f\left(f^{-1}(X)\right) = X$.

EXERCICE 54 **10 minutes**

Soient E un ensemble et X, Y deux sous-ensembles de E. Simplifier l'ensemble suivant :
$Z = (X \cup Y) \cap \left(\overline{X} \cup Y\right) \cup \left(X \cap \overline{Y}\right)$.

EXERCICE 55 **10 minutes**

On considère $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois assertions logiques.
Montrer que les assertions suivantes sont vraies :

1. $\mathcal{A} \implies (non(\mathcal{A}) \implies \mathcal{B})$.
2. $(\mathcal{A} \implies \mathcal{B}) \implies \left[(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{C}) \implies (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C})\right]$.

EXERCICE 56 **10 minutes**

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Traduire symboliquement l'assertion $\mathcal{A}$: « La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ ».
2. On suppose f strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Peut-on en déduire les deux propositions suivantes ?
   a. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) \leqslant f(y) \implies x \geqslant y$.
   b. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) < f(y) \implies x > y$.
3. Traduire symboliquement l'assertion $non(\mathcal{A})$.

EXERCICE 57 **5 minutes**

Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers strictement supérieurs à 2. On définit sur $\mathbb{P}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante :

$a\mathcal{R}b \iff \dfrac{a+b}{2}$ est un nombre premier.

$\mathcal{R}$ est-elle une relation d'équivalence ?

1.5 Préparer un devoir

EXERCICE 58 **10 minutes**

Enoncer à l'aide de quantificateurs les propriétés suivantes :

1. Tout nombre entier est un nombre réel.
2. La fonction f est de signe constant sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$
3. La suite (u_n) est périodique (la période n'étant pas fixée).
4. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5. La réciproque et la contraposée (en précisant bien laquelle est laquelle ...) de la proposition : $\big(\exists p \in \mathbb{N},\ p^2 = n\big) \implies \big(n$ n'est pas un entier premier$\big)$.
   Donner un contre-exemple montrant que la réciproque énoncée est fausse.

EXERCICE 59 **20 minutes**

On considère E_1 et E_2 deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Pour tout $i \in \{1\ ,\ 2\}$, on note m_i (respectivement M_i) le plus petit élément (respectivement le plus grand élément) de E_i.
Autrement dit : $m_i = min(E_i)$ et $M_i = max(E_i)$.

1. Justifier l'existence des réels m_1, m_2, M_1 et M_2.
2. Montrer que $E_1 \cup E_2$ admet $M = max(M_1, M_2)$ pour plus grand élément (c'est-à-dire pour maximum).
3. Justifier que $E_1 \cup E_2$ admet un plus petit élément que l'on précisera.
4. Dans cette partie, on suppose que les parties E_1 et E_2 ne sont pas disjointes.
   Justifier que $E_1 \cap E_2$ admet un plus grand élément puis le comparer à m_1, m_2, M_1 et M_2.

EXERCICE 60 **25 minutes**

Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble E, on appelle différence symétrique de A et B l'ensemble noté $A\Delta B$ et défini par $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$.

1. Montrer qu'on a également $A\Delta B = (A\setminus B) \cup (B\setminus A)$.
2. Montrer que la différence symétrique est une opération associative.
3. Montrer que l'intersection est distributive par rapport à la différence symétrique : si A, B et C sont trois sous-ensembles de E, alors $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\,\Delta\,(A \cap C)$.
4. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que l'union n'est pas distributive par rapport à la différence symétrique.
5. Montrer que, l'ensemble A étant fixé, il existe un unique ensemble B tel que $A\Delta B = \emptyset$.
6. Montrer de même qu'il existe un unique B tel que $A\Delta B = E$.

7. Plus généralement, montrer que l'application $B \mapsto A \Delta B$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même. Quelle est la réciproque de cette application ?

EXERCICE 61 **15 minutes**

Si P et Q sont deux propositions mathématiques, on définit un nouveau connecteur logique « non et », symbolisé par la notation $P \uparrow Q$, par $P \uparrow Q = \neg(P \wedge Q)$. Autrement dit, la proposition $P \uparrow Q$ est vraie si et seulement si $P \wedge Q$ est fausse.

1. Ecrire la table de vérité de $P \uparrow Q$.
2. Si P, Q et R sont trois propositions, est-ce que $(P \uparrow Q) \uparrow R$ est équivalent à $P \uparrow (Q \uparrow R)$?
3. Montrer qu'on peut exprimer $\neg P$ uniquement à l'aide de P et du symbole $\uparrow$.
4. Exprimer $P \vee Q$ et $P \wedge Q$ uniquement en fonction de P, Q et $\uparrow$.
5. Exprimer l'implication $P \Longrightarrow Q$ et l'équivalence $P \Longleftrightarrow Q$ uniquement à l'aide de P, Q et $\uparrow$.

EXERCICE 62 **15 minutes**

Soit E un ensemble, pour toutes parties A et B de E,
on définit l'ensemble $A \uparrow B = \left\{x \in E / (x \notin A) \vee (x \notin B)\right\}$.

1. Exprimer $A \uparrow B$ en fonction de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.
2. Soient A et B deux parties de E :
   a. Simplifier successivement : $A \uparrow A$ puis $A \uparrow E$ puis $A \uparrow \emptyset$.
   b. Montrer que $A \cap B = (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$.
   c. Montrer que $A \cup B = (A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)$.
3. Soient A, B et C trois parties de E.
   a. A-t-on $(A \uparrow B) \uparrow C = A \uparrow (B \uparrow C)$? On justifiera à l'aide d'une table de vérité.
   b. Montrer que $(A \cup B) \uparrow C = (A \uparrow C) \cap (B \uparrow C)$.
   c. Montrer que $(A \cap B) \uparrow C = (A \uparrow C) \cup (B \uparrow C)$.
   d. Montrer que $(A \uparrow B) \uparrow C = (A \cap B) \cup \overline{C}$.