

Gianni Pascoli

Licence  
CAPES  
Agrégation

# Problèmes généraux de physique

avec rappels de cours, corrigés et formulaire  
de mathématiques

2<sup>e</sup> édition





# Chapitre 1

## Dynamique des solides

### 1.1 Rappels de cours

#### 1.1.1 Formules de changement de référentiel. Cinématique

Soit un réseau d'observateurs immobiles les uns par rapport aux autres. On suppose que chacun de ces observateurs est muni d'une règle rigide, de longueur invariable, et d'une horloge débitant un temps uniforme. Les règles ont même longueur (par ex. 1 mètre) et les horloges sont synchronisées entre elles. Par définition, un tel réseau constitue un **référentiel**. Afin de concrétiser un référentiel, on lui associe un repère formé de trois axes, en général orthogonaux (mais pas forcément), d'origine commune  $O$ , soit  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ . Chacun de ces axes est orienté par un vecteur unitaire  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ . La **base** (supposée directe) formée par ce trièdre de vecteurs auquel on associe l'origine  $O$  constitue le **repère**  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . L'origine  $O$  étant arbitraire, ainsi que les orientations des vecteurs de base, il existe une infinité de repères distincts que l'on peut associer à un référentiel donné. On choisit en général celui qui est le mieux adapté au système physique que l'on étudie. En mécanique newtonienne (mécanique classique), Le référentiel fondamental est le **référentiel de Copernic** dont un repère privilégié, d'origine confondue avec le barycentre du système solaire, est constitué de trois axes orthogonaux, chacun d'eux pointant vers une étoile dite fixe<sup>1</sup>.

---

1. Le barycentre du système solaire décrit en réalité une orbite quasi-circulaire autour du centre de la Galaxie avec une vitesse de l'ordre de 250 km/s. Les étoiles se déplacent dans la Galaxie avec des vitesses similaires. En toute rigueur, le concept de fixité est vide en physique !

Considérons un tétraèdre formé du Soleil et de trois étoiles voisines (repère concrétisant le référentiel de Copernic). Les étoiles (dont le Soleil fait partie) sont séparées en moyenne d'une distance de l'ordre de quelques années lumière (on rappelle que l'année lumière est la

Le référentiel de Copernic est un référentiel étalon, mais son utilisation n'est pas très commode quand on désire mesurer les positions, vitesses et accélérations des particules composant un corps donné. Comme tout étalon, on en réalise des copies d'usage plus naturel (élimination des mouvements d'ensemble dans le cas d'un système de particules). On introduit ainsi une classe particulière de référentiels, tous équivalents entre eux, appelés **référentiels d'inertie** ou **référentiels galiléens**, en translation rectiligne et uniforme par rapport au référentiel de Copernic.

Soit deux référentiels  $\mathcal{R}_g$  et  $\mathcal{R}$ . Le référentiel  $\mathcal{R}_g$  sera appelé **référentiel absolu** (on peut le supposer galiléen d'où l'indice  $g$ ) et le référentiel  $\mathcal{R}$  **référentiel relatif** (en mouvement quelconque). On considère un point fixe  $O_g$  pris comme origine dans le référentiel  $\mathcal{R}_g$ . On prend de même dans  $\mathcal{R}$  un point fixe  $O$  ainsi qu'un trièdre cartésien  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un point  $M$  quelconque a pour coordonnées  $x, y, z$ . Chacun des deux référentiels est muni d'une horloge pour mesurer le temps. Les deux horloges sont supposées synchronisées.

Soit  $\vec{v}_a \equiv \vec{v}(M/\mathcal{R}_g)$  la vitesse de  $M$  mesurée dans  $\mathcal{R}_g$  (**vitesse absolue**),  $\vec{v}_r \equiv \vec{v}(M/\mathcal{R})$  la vitesse de  $M$  mesurée dans  $\mathcal{R}$  (**vitesse relative**) et  $\vec{v}_e$  la **vitesse d'entraînement** (vitesse d'un point  $P$  fixe dans  $\mathcal{R}$  et coïncidant avec  $M$  à l'instant  $t$ ).

### Relations pour les vitesses

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

et

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{O_g O}}{dt} \bigg|_{\mathcal{R}_g} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

---

distance parcourue par la lumière en une année, soit environ  $10^{16}$  m). Elles sont d'autre part affectées de mouvements propres (mouvements relatifs des unes par rapport aux autres)  $\sim 10$  km/s. Les étoiles formant les sommets du tétraèdre se déplacent donc de  $3 \cdot 10^7 \times 10^4 = 3 \cdot 10^{11}$  m par an, soit un rapport angulaire (parallaxe) de l'ordre de  $10^{-5}$  radian/an ou 2 secondes d'arc/an (l'étoile de Barnard a, quant à elle, un mouvement propre de 10 secondes d'arc/an). Le tétraèdre de référence va donc se déformer peu à peu au cours du temps. À noter que le **satellite astrométrique Hipparcos**, lancé par l'Agence Spatiale Européenne, et qui a fonctionné de 1989 à 1993, avait une résolution angulaire d'une milliseconde d'arc. Son successeur, le **satellite Gaia**, lancé en 19 décembre 2013, atteint quant à lui une résolution angulaire d'une dizaine de microsecondes d'arc, soit une précision équivalente à la mesure du diamètre d'un cheveu à 1000 km (pour les astres ayant une luminosité supérieure ou égale à  $10^{-4}$  celle de l'étoile Véga (Alpha Lyrae), c'est-à-dire la limite des lunettes 7 × 50). La mission Gaia devrait se poursuivre jusqu'en fin 2025 et le traitement des données reçues jusqu'en 2030.

Le vecteur axial  $\vec{\Omega}$  représente le **vecteur rotation** du référentiel  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\mathcal{R}_g$ , soit  $\vec{\Omega} \equiv \vec{\Omega} (\mathcal{R}/\mathcal{R}_g)$  (ce vecteur dépend en général du temps). Pour la vitesse relative, on a

$$\vec{v}_r = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k}$$

(ici et dans la suite on désignera toujours par une lettre surmontée d'un point la dérivée par rapport au temps, soit  $\frac{d}{dt} \equiv \cdot$ ).

Soit  $\vec{a}_a \equiv \vec{a}(M/\mathcal{R}_g)$  l'accélération de  $M$  mesurée dans  $\mathcal{R}_g$  (**accélération absolue**),  $\vec{a}(M/\mathcal{R})$  l'accélération de  $M$  mesurée dans  $\mathcal{R}$  (**accélération relative**),  $\vec{a}_e$  l'**accélération d'entraînement** (accélération d'un point  $P$  fixe dans  $\mathcal{R}$  et confondu avec  $M$  à l'instant  $t$ ) et  $\vec{a}_c$  l'**accélération complémentaire (Coriolis)**.

### Relations pour les accélérations

$$\begin{aligned} \vec{a}_a &= \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \\ \vec{a}_e &= \frac{d^2 \overrightarrow{O_g O}}{dt^2} \Big|_{\mathcal{R}_g} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) \\ \vec{a}_c &= 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r \end{aligned}$$

#### 1.1.2 Cinétique

Soit  $\mathcal{R}$  un référentiel quelconque et  $O$  un point arbitraire (pas nécessairement fixe dans  $\mathcal{R}$ ).

**Éléments cinétiques** associés à une particule d'indice  $i$  : **masse**  $m_i$ , **vitesse**  $\vec{v}_i$  et **accélération**  $\vec{a}_i$  mesurées dans  $\mathcal{R}$ , **quantité de mouvement**  $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ , **moment cinétique** rapporté à  $O$   $\vec{\sigma}_{iO} = m_i \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{v}_i \equiv \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{p}_i$ , **énergie cinétique**  $e_{ci} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$

#### Équation de la dynamique

Soit  $\vec{f}_i$  la force appliquée à la particule  $i$

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \vec{f}_i + \vec{f}_{i,inertie}$$

$$\vec{f}_{i,inertie} = -m_i (\vec{a}_{i,e} + \vec{a}_{i,c})$$

avec  $\vec{a}_{i,e}$  accélération d'entraînement et  $\vec{a}_{i,c}$  accélération de Coriolis de la particule  $i$ .

**Système physique** composé de  $N$  particules ( $i = 1, \dots, N$ ) : masse totale  $M = \sum_{i=1}^N m_i$ , impulsion  $\vec{P} = M \vec{v}_G = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$ , moment cinétique  $\vec{\Sigma}_O = \sum_{i=1}^N \vec{\sigma}_{iO}$ , énergie cinétique  $T = \sum_{i=1}^N e_{ci} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2$ .

**Barycentre<sup>2</sup> (centre de gravité)  $G$  du système**

$$\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{OM}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

ou

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{GM}_i = \vec{0}$$

**Référentiel barycentrique  $\mathcal{R}_B$**

On prend comme origine le barycentre  $G$  et un système d'axes qui restent constamment parallèles deux à deux aux axes d'un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$

$$\vec{\Omega} \quad (\mathcal{R}_B / \mathcal{R}_g) \equiv \vec{0}$$

### 1.1.3 Théorème du barycentre

(mouvement du barycentre évalué dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ )

$$M \frac{d\vec{v}_G}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_g} = \vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i$$

où  $M$  désigne la masse totale du système,  $\vec{R}$  est la résultante des forces appliquées (forces extérieures et forces de contact ou de liaison seules prises en compte, les forces intérieures s'annulant deux à deux dans la sommation).

---

2. Les termes de **centre de masse** ou de **centre d'inertie** semblent plus appropriés car ces derniers ne sont pas liés à la notion très particulière de poids (le terme de barycentre, issu de  $\beta\alpha\rho\upsilon\varsigma$  : pesant, est consacré par l'usage depuis Archimède).

### 1.1.4 Théorème du moment cinétique

(mouvements du système évalués dans le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}_B$ )

$$\frac{d}{dt} \vec{\Sigma}_G \Big|_{\mathcal{R}_B} = \vec{\mathcal{M}}_G \equiv \sum_{i=1}^N \overrightarrow{GM}_i \wedge \vec{f}_i$$

où le vecteur  $\vec{\Sigma}_G$  représente le moment cinétique du système rapporté au barycentre  $G$  et  $\vec{\mathcal{M}}_G$  le moment résultant des forces appliquées (calculé par rapport à  $G$ ).

### 1.1.5 Théorèmes de König

Moment cinétique et énergie cinétique d'un système (masse totale  $M$ ) mesurés dans  $\mathcal{R}_g$  :  $\vec{\Sigma}_O$  et  $T/\mathcal{R}_g$ , puis mesurés dans  $\mathcal{R}_B$  :  $\vec{\Sigma}_G$  et  $T/\mathcal{R}_B$ , on a

$$\vec{\Sigma}_O = \vec{\Sigma}_G + \overrightarrow{OG} \wedge M \vec{v}_G$$

$$T/\mathcal{R}_g = T/\mathcal{R}_B + \frac{1}{2} M v_G^2$$

### 1.1.6 Tenseur d'inertie

#### Corps solide

Système physique où les distances entre les particules sont invariables. On lie généralement au corps solide un **référentiel tournant**  $\mathcal{R}_S$ . La rotation du corps perçue dans le référentiel barycentrique est définie par un vecteur rotation, unique,  $\vec{\Omega}$  tel que

$$\vec{\Omega} \equiv \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_B)$$

#### Tenseur d'inertie

$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

exprimé dans un repère quelconque  $(Gx, Gy, Gz)$  avec  $I_{xx} = \int_V dm(y^2 + z^2)$  **moment d'inertie** par rapport à l'axe  $Gx, \dots$ ;  $I_{xy} = -\int_V dm xy, \dots$  **produits d'inertie**,  $V$  est le volume du corps.

### Moment cinétique d'un solide

$$\vec{\Sigma}_G = \vec{I} \cdot \vec{\Omega}$$

### Énergie cinétique de rotation d'un solide

$$T = \frac{1}{2}^T \vec{\Omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\Omega}$$

Vecteur rotation  $\vec{\Omega} \left| \begin{array}{c} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{array} \right.$  vecteur transposé  ${}^T \vec{\Omega} \left| \begin{array}{ccc} \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \end{array} \right.$

On introduit un repère particulier, appelé **repère principal**  $(G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , lié à  $\mathcal{R}_S$  (référentiel du corps tournant), dans lequel le tenseur d'inertie est diagonal, soit

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Exemples : boule homogène (rayon  $R$ ) :  $A = B = C = \frac{2}{5}MR^2$ ; cylindre homogène (rayon  $R$  et hauteur  $H$ ) :  $A = B = \frac{1}{12}M(3R^2 + H^2)$ ,  $C = \frac{1}{2}MR^2$ ; tige homogène de longueur  $L$  :  $A = B = 0$ ,  $C = \frac{1}{12}ML^2$  ( $M$  désigne dans chacun de ces exemples la masse totale du corps).

On pose usuellement

$$\vec{\Omega} = p \vec{i} + q \vec{j} + r \vec{k}$$

ce qui donne

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

#### 1.1.7 Théorème de Huygens

Soit  $z'z$  un axe quelconque passant par le barycentre  $G$  et  $u'u$  un axe parallèle à  $z'z$  et distant de  $\Delta$ , on a

$$I_{u'u} = I_{z'z} + M\Delta^2$$

-----

## 1.2 Énoncés des problèmes

### Problème 1 : cylindre roulant sur un plan incliné mobile

Un cylindre homogène, de rayon  $r$  et de masse  $m$ , roule sans glisser sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. L'angle de rotation du cylindre sera dénoté par  $\theta$  (origine des angles arbitraire) et l'abscisse de son barycentre  $G$  le long du plan incliné sera désignée par  $x$ . Le plan incliné est la face hypoténuse d'un prime rectangulaire mobile, de masse  $M$ , qui glisse sans frottement sur une table horizontale fixe.

- 1/ Écrire la condition de non-glissement du cylindre sur le plan.
- 2/ Soit  $\mathcal{R}_g$  un référentiel galiléen (repère associé  $O, X, Y$ ) et  $\mathcal{R}$  le référentiel du prisme. Calculer l'énergie cinétique du cylindre mesurée dans  $\mathcal{R}_g$ .
- 3/ Établir l'expression du lagrangien du système *cylindre + prisme* soumis à un champ de pesanteur vertical et uniforme  $\vec{g}'$ .
- 4/ En déduire les équations de la dynamique. Déterminer les accélérations respectives du cylindre et du prisme.

### Problème 2 : effet draw shot

On analyse ici le mouvement d'une boule homogène et indéformable, de masse  $M$  et de rayon  $a$ , se déplaçant sur un plan horizontal.

1/ Rappeler sans démonstration le théorème du centre de masse et le théorème du moment cinétique. On fera intervenir le poids  $\vec{P}$  (champ de pesanteur uniforme  $\vec{g}'$ ) et la réaction du plan  $\vec{R}$ . On admet, en outre, l'existence d'une force  $\vec{F}$ , localisée au point  $Q$  situé à la périphérie de la boule (fig. 1).

2/ Lorsque la force  $\vec{F}$  en question n'agit que sur une durée très courte  $\tau$  (comparée à un intervalle de temps caractéristique du mouvement ultérieur de la boule), la **percussion**  $\vec{\Delta p}$  (agissant en  $Q$ ) est définie par la relation suivante

$$\vec{\Delta p} = \int_{-\tau}^0 dt \vec{F}$$

i/ Compléter la figure 1 avec toutes les données du problème. On décomposera la réaction du plan  $\vec{R}$  en ses composantes horizontale  $\vec{T}$  et verticale  $\vec{N}$ .

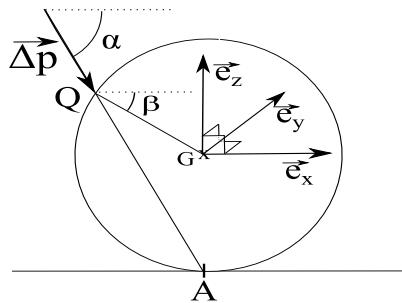


Figure 1

ii/ Écrire les conditions initiales pour les deux équations précédentes.

3/ Intégrer les deux équations établies à la question 1/ en admettant que le mouvement est horizontal et rectiligne suivant l'axe  $Ox$ . La première phase du mouvement s'effectuant avec glissement, on utilisera la **relation de Coulomb**, soit  $|\vec{T}| = fN$ ,  $f$  étant le coefficient de frottement.

4/ Discuter les différentes phases possibles du mouvement.

### Problème 3 : équations d'Euler et polhodie

1/ Soit  $\mathcal{R}$  un référentiel quelconque. La vitesse d'une particule  $M$ , de masse  $m$ , évaluée dans ce référentiel est  $\vec{v}$ . Rappeler l'expression de son moment cinétique  $\vec{\sigma}_O$  par rapport à une origine arbitraire, non nécessairement fixe  $O$ .

2/ On s'intéresse au cas d'un système composé de  $N$  particules ( $M_{i=1, 2, \dots, N}$ , masses  $m_i$ , vitesses  $\vec{v}_i$ ). Calculer la dérivée du moment cinétique total du système, soit  $\vec{\Sigma}_O$ , par rapport au temps. Montrer que si  $O$  est confondu avec le barycentre  $G$  du système, l'expression trouvée se simplifie.

3/ Rappeler la définition du référentiel barycentrique (que l'on dénotera  $\mathcal{R}_B$ ). Établir, dans  $\mathcal{R}_B$ , la relation suivante

$$\left. \frac{d\vec{\Sigma}_G}{dt} \right|_{\mathcal{R}_B} = \vec{\mathcal{M}}_G$$

où  $\vec{\mathcal{M}}_G$  désigne le moment résultant des forces appliquées au système (on en appellera également la définition).

4/ On suppose que le système précédent est assimilé à un corps solide (distance  $M_i M_j$  invariable pour tout couple de points  $M_i, M_j$ ). Si l'on admet que ce corps tourne dans le référentiel  $\mathcal{R}_B$ , il existe dès lors un vecteur rotation unique  $\vec{\Omega}$  qui peut dépendre du temps  $t$  mais est indépendant du point. On considère alors un second référentiel  $\mathcal{R}_S$ , dans lequel le corps est supposé fixe.

On associe à ce référentiel un repère cartésien  $(G, x, y, z)$ . Montrer que l'on peut dès lors écrire

$$\vec{\Sigma}_G = \bar{\bar{I}} \cdot \vec{\Omega}$$

où  $\bar{\bar{I}}$  désigne le tenseur d'inertie défini matriciellement par

$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

avec  $I_{xx} = \int_V dm(y^2 + z^2)$  moment d'inertie par rapport à l'axe  $Gx, \dots$ ;  $I_{xy} = - \int_V dm xy, \dots$  produits d'inertie ( $V$  volume du corps). Le tenseur  $\bar{\bar{I}}$  dépend-il du temps ?

5/ Dans le repère principal, d'axes  $Gx, Gy, Gz$ , de vecteurs unitaires respectifs  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , le tenseur d'inertie  $\bar{\bar{I}}$  prend une forme diagonale (moments d'inertie  $A, B, C$ , les produits d'inertie sont quant à eux tous nuls). On dénotera par  $p, q, r$  les projections de  $\vec{\Omega}$  sur les axes de ce repère. Établir que les équations permettant de calculer  $p, q$  et  $r$  sont

$$A \frac{dp}{dt} = (C - B)qr + \mathcal{M}_{Gx}$$

$$B \frac{dq}{dt} = (A - C)pr + \mathcal{M}_{Gy}$$

$$C \frac{dr}{dt} = (B - A)pq + \mathcal{M}_{Gz}$$

#### (équations d'Euler-Poinsot)

6/ On suppose désormais que  $\vec{\mathcal{M}}_G = \vec{0}$  et que  $r \gg p, q$ . Discuter les solutions des équations d'Euler-Poinsot dans les deux cas suivants :

i/  $C > A$  et  $C > B$  (ou  $C < A$  et  $C < B$ ). On examinera plus particulièrement le cas où  $A = B$  (corps de révolution autour de l'axe des  $z$ ).

ii/  $A < C < B$  (ou  $B < C < A$ )

Conclusion.

7/ Application à l'astronomie : pour la Terre,  $A \simeq B \frac{C}{C-A} = 305, \Omega = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . Calculer la période d'oscillation dans le cas i/.

**Problème 4 : angles d'Euler. Mouvement gyroscopique de la toupie**

1/ Rappeler, sans démonstration, l'expression du moment cinétique  $\vec{\Sigma}_G$  d'un corps rigide, rapporté au barycentre  $G$  et exprimé dans le repère des axes principaux  $(G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Le vecteur rotation  $\vec{\Omega}$ , est mesuré dans le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}_B$  et a pour composantes, dans le repère principal  $p, q, r$ . Montrer que l'énergie cinétique du corps peut s'écrire

$$T = \frac{1}{2} \vec{\Omega}^T \bar{\bar{I}} \vec{\Omega}$$

où  ${}^T \vec{\Omega}$  est le vecteur transposé de  $\vec{\Omega}$ ,  $\bar{\bar{I}}$  est le tenseur d'inertie du corps.

2/ Exprimer les composantes de  $\vec{\Omega}$ , soit  $p, q, r$ , en fonction des angles d'Euler (dont on rappellera la définition).

3/ On désire étudier les mouvements d'une toupie symétrique. On introduit pour cela un second référentiel,  $\mathcal{R}_g$  supposé galiléen, visualisé par le repère  $(O, X, Y, Z)$  (fig.1). La toupie (corps rigide de masse totale  $M$ ) repose sur sa pointe, supposée fixe en  $O$ , et elle est plongée dans un champ de pesanteur uniforme  $\vec{g}$  dirigé suivant l'axe vertical  $OZ$ . Établir que la toupie est dès lors soumise à un potentiel énergétique  $V \equiv V(\theta)$ . On posera  $OG = \Delta$ .

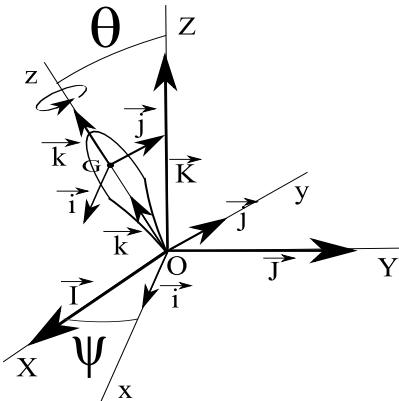


Figure 1

4/

i/ En déduire les équations de la dynamique régissant les mouvements de la toupie.

Suggestion : on utilisera le formalisme lagrangien.

ii/ On admet que  $\theta$  est constant. Montrer que l'équation en  $\dot{\theta}$  possède deux racines en  $\dot{\psi}$  (auxquelles correspondent deux régimes de précession). Établir que  $r$  considéré comme une fonction de  $\dot{\psi}$  possède un minimum  $r_{\min}$ .

Dans le cas où  $r \gg r_{\min}$ , déterminer alors les valeurs de ces racines (modes de précession lent et rapide).

iii/ On relaxe la contrainte exprimant que  $\theta$  est constant. Écrire l'expression de l'énergie totale  $E$  de la toupie. Montrer que  $\theta$  est nécessairement compris entre deux valeurs limites  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

5/ Effectuer le bilan des forces intervenant dans le problème.

### Problème 5 : précession et nutation terrestres

Nous examinons dans ce problème l'action d'un astre, supposé ponctuel (représenté par le point  $A$ ) et de masse  $M$  (Soleil ou Lune), sur le bourrelet équatorial terrestre, supposé circulaire.

1/ Écrire le théorème du moment cinétique appliqué à la Terre dans le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}_B$  (la force par unité de masse appliquée au point courant  $M$  sera dénotée par  $\vec{f}$ ).

2/ la rotation de la Terre exprimée dans  $\mathcal{R}_B$  (vecteur rotation  $\vec{\Omega}$ ) peut se décomposer assez naturellement de la façon suivante : la rotation propre de la Terre, que l'on notera  $\Omega$  (attention, ici et dans la suite,  $\Omega$  ne désigne pas le module du vecteur  $\vec{\Omega}$ ) autour de son plus petit axe d'inertie principal (axe des pôles  $Gz$ ), une **précession** d'angle  $\psi$  autour de l'axe vertical  $GZ$ , normal au plan de l'**écliptique** ( $GX, GY$ ) (plan dans lequel circulent les planètes) et un **balancement** (**nutation**) autour de  $Gx$  (droite d'intersection bourrelet — plan de l'écliptique (sur la figure 1 seul le bourrelet équatorial est représenté). On projette le vecteur rotation  $\vec{\Omega}$  sur les axes du repère principal lié à la Terre ( $Gx, Gy, Gz$ ), écrire, dans ce cas les expressions des composantes  $p, q, r$  en fonction de  $\Omega$ ,  $\dot{\psi} \equiv \frac{d\psi}{dt}$  et  $\dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt}$ .

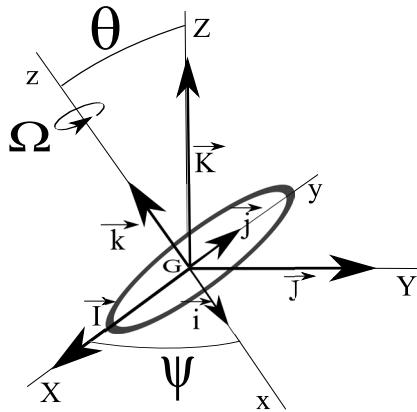


Figure 1

3/ On admet que  $\Omega$  est constant ( $\gg \dot{\psi}, \dot{\theta}$ ) et que les variations de  $\dot{\psi}$  et  $\dot{\theta}$  sont très faibles, de telle sorte que l'on pourra négliger les produits  $\dot{\psi}^2$ ,

$\dot{\theta}^2$ ,  $\dot{\psi}\dot{\theta}$  ainsi que  $\ddot{\psi}$  et  $\ddot{\theta}$  dans les calculs. On supposera, en outre, que  $\psi$  est voisin de zéro (convention somme toute arbitraire mais qui allège les calculs) et que  $\theta$  est proche d'une valeur de référence  $\epsilon$ , angle d'inclinaison de l'axe des pôles terrestres par rapport à la normale au plan de l'écliptique. Calculer explicitement  $\frac{d\vec{\Sigma}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_B}$ .

4/ On assimilera la Terre à une sphère homogène, de masse  $m$  et de rayon  $c$ , complétée par un tore circulaire mince (point courant  $P$ ), de masse totale  $\mu$ , concentré à l'équateur, de rayon  $\Delta$ , solidaire de la sphère et schématisant le renflement équatorial terrestre.

La trajectoire de l'astre  $A$  sera supposée circulaire, de rayon  $D$  (longitude écliptique  $\lambda$ , mesurée par rapport à la direction fixe  $GX$ , et latitude écliptique  $\beta$  ou hauteur, mesurée par rapport au plan  $(GX, GY)$ ). Son inclinaison par rapport au plan de l'écliptique sera désignée par  $i$  (supposé petit et tel que  $\sin i \sim i$ ). L'intersection de la trajectoire avec ce plan se fait en deux points opposés par rapport à l'origine  $G$ , appelés **noeud ascendant** (l'astre passe au-dessus du plan de l'écliptique) et **noeud descendant** (l'astre passe au-dessous du plan de l'écliptique). La longitude du noeud ascendant sera dénotée par  $\omega$ .

Rappels de trigonométrie sphérique : soit trois grands cercles dessinés sur une sphère de rayon unité. Leurs intersections mutuelles découpent un triangle sphérique de sommets  $A, B, C$ . Dénotons par  $\hat{A}$  l'angle au sommet en  $A$  et  $a$  la longueur du côté opposé. On procède de façon analogue pour les autres sommets. On montre que (fig. 2)

$$\frac{\sin a}{\sin \hat{A}} = \frac{\sin b}{\sin \hat{B}} = \frac{\sin c}{\sin \hat{C}}$$

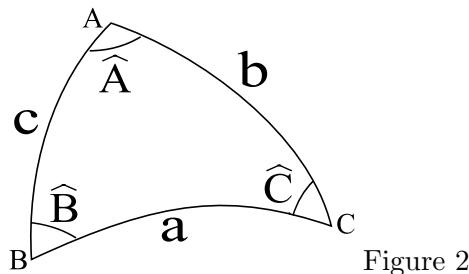


Figure 2

Établir l'expression du couple  $\int dm \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{f}$ . On ne conservera que les termes du premier ordre en  $\frac{\Delta}{D}$  dans les développements limités que l'on sera amené à faire.

5/ Montrer que si l'on effectue la moyenne temporelle sur une révolution de l'astre, on obtient les expressions suivantes ( $\mathcal{G}$  désigne ici la constante de gravitation et  $C$  le moment d'inertie de la Terre par rapport à l'axe des pôles  $Gz$ ).

$$\begin{aligned}\langle \dot{\psi} \rangle &= -\frac{3}{4} \frac{GM}{D^3} \mu \Delta^2 \frac{\cos \epsilon}{C\Omega} + \frac{3}{4} \frac{GM}{D^3} \mu \Delta^2 \frac{i \cos 2\epsilon \cos \omega}{\sin \epsilon C\Omega} \\ \langle \dot{\theta} \rangle &= -\frac{3}{4} \frac{GM}{D^3} \mu \Delta^2 \frac{i \cos \epsilon \sin \omega}{C\Omega}\end{aligned}$$

6/ Dans les deux relations établies à la question précédente, le moment d'inertie du tore mince par rapport à l'axe des pôles terrestres apparaît naturellement, soit  $\mu \Delta^2$ . Afin de coller un peu plus à la réalité, il est maintenant légitime d'identifier cette quantité avec le moment d'inertie, par rapport à ce même axe, du bourrelet équatorial terrestre. En dernier lieu, on admettra que le renflement est fabriqué à partir d'un ellipsoïde homogène, de masse  $m$ , de demi-petit axe  $c$  et de demi-grand axe  $a$  (modèle de la Terre aplatie) auquel on soustrait une sphère homogène de rayon  $c$  et de même masse  $m$  (fig. 3). On rappelle que les moments d'inertie d'un ellipsoïde de révolution aplati sont donnés par les relations  $A = \frac{1}{5}m(a^2 + c^2)$ ,  $C = \frac{2}{5}ma^2$ .

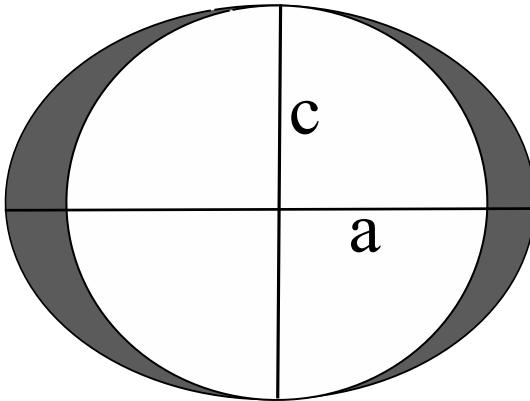


Figure 3 Bourrelet équatorial

i/ Ré-exprimer les relations  $\langle \dot{\psi} \rangle$  et  $\langle \dot{\theta} \rangle$  en fonction du rapport  $\frac{C-A}{C}$ .

ii/ Intégrer les équations correspondantes par rapport au temps. On admet que la longitude du nœud ascendant de l'astre,  $N$ , varie suivant la loi  $\omega = -n_N(t - t_0)$  où  $n_N$  représente le moyen mouvement du nœud et  $t_0$  est une constante arbitraire.

7/ A.N.  $\frac{C-A}{C} = 0.0033$ ,  $\epsilon = 23.44^\circ$ ,  $\Omega = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ .

Pour le Soleil  $GM = 1.3 \cdot 10^{20} \frac{m^3}{s^2}$ ,  $D = 1.49 \cdot 10^{11} \text{ m}$ ,  $\omega \equiv 0$ .

Pour la Lune  $GM = 4.90 \cdot 10^{12} \frac{m^3}{s^2}$ ,  $D = 3.83 \cdot 10^8 \text{ m}$ ,  $i = 5.16^\circ$ ,  $\omega = -n_N(t - t_0)$  avec  $n_N = \frac{2\pi}{18.6 \text{ (ans)}}$ .

### 1.3 Corrigés des problèmes

#### Problème 1 : cylindre roulant sur un plan incliné mobile

1/ L'abscisse  $x$  et l'angle  $\theta$  sont liés par la contrainte holonomique (condition de non-glissement)

$$f(x, \theta) = x - r\theta \equiv 0$$

2/ Soit  $\mathcal{R}_g$  un référentiel galiléen (repère associé  $O, X, Y$ ) et  $\mathcal{R}$  le référentiel du prisme. La vitesse du prisme évaluée dans  $\mathcal{R}_g$  est  $\dot{X}$ . La vitesse horizontale du barycentre du cylindre dans ce même référentiel est

$$\dot{x} \cos\alpha \text{ (vitesse relative/}\mathcal{R}\text{)}$$

$$+\dot{X} \text{ (vitesse d'entraînement }\mathcal{R}/\mathcal{R}_g\text{)}$$

L'énergie cinétique du cylindre mesurée dans  $\mathcal{R}_g$  est alors

$$\frac{1}{2}m \left[ (\dot{x} \cos\alpha + \dot{X})^2 + (\dot{x} \sin\alpha)^2 \right] + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

(d'après le second théorème de König) où  $I$  désigne le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe de rotation.

3/ Le lagrangien du système *cylindre + prisme* se déduit aisément de ce qui précède (cf. chapitre 3, mécanique analytique). On a

$$L \left[ x, \dot{x}, \dot{\theta}, \dot{X} \right] = \frac{1}{2}m \left[ (\dot{x} \cos\alpha + \dot{X})^2 + (\dot{x} \sin\alpha)^2 \right] + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{X}^2 - mgx \sin\alpha$$

4/ Les équations de Lagrange avec contrainte sont

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} - \frac{\partial L}{\partial X} - \lambda \frac{\partial f}{\partial X} = 0$$

où l'on a introduit le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  (cf. formulaire de mathématiques, VII).

Il vient ainsi

$$m\ddot{x} + m\ddot{X}\cos\alpha - mg \sin\alpha - \lambda = 0$$

$$I\ddot{\theta} + \lambda r = 0$$

$$m\ddot{x} \cos\alpha + (m + M)\ddot{X} = 0 \quad (*)$$

d'où l'on tire

$$\ddot{x} = \frac{g \sin\alpha}{1 + \frac{I}{mr^2} - \frac{m \cos^2\alpha}{(m+M)}} \quad \ddot{X} = -\frac{m \cos\alpha}{(m+M)}\ddot{x} \quad \lambda = -\frac{I\ddot{x}}{r^2}$$

Remarque : la relation (\*) exprime la conservation de la composante horizontale de la quantité de mouvement du système *cylindre + prisme* (le système n'est soumis qu'à des forces extérieures verticales : poids et réaction de la table horizontale). Précisons encore que ce problème peut être traité à l'aide des lois de Newton en introduisant explicitement une force d'adhérence au point de contact cylindre-prisme (non-glissement).

### Problème 2 : effet draw shot

1/ À l'instant  $t > 0^+$ , la boule est uniquement soumise aux forces extérieures suivantes : le poids  $\vec{P}$  et la réaction du plan horizontal  $\vec{R}$  appliquée au point de contact  $A$  (la percussion n'agit que pendant un très court intervalle de temps lorsque  $t \in [-\tau, 0]$ ). On peut dès lors écrire les équations

-Théorème du centre de masse (par rapport à un référentiel galiléen) :

$$M \frac{d\vec{v}_g}{dt} = \vec{P} + \vec{R}$$

où  $M$  est la masse de la boule et  $\vec{v}_g$  la vitesse de son centre de masse  $G$ .

-Théorème du moment cinétique (exprimé dans le référentiel barycentrique)

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{G}\vec{A} \wedge \vec{R}$$

où  $I$  désigne le moment d'inertie de la boule par rapport à un axe passant par son centre (on rappelle que pour une boule homogène de masse  $M$  et de rayon  $a$  :  $I = \frac{2}{5}Ma^2$ ),  $\vec{\omega}$  représente le vecteur rotation.

2/

i/ Suivant les données du problème, on décompose la réaction  $\vec{R}$  appliquée au point de contact  $A$  en une force tangentielle  $\vec{T}$  et une force normale  $\vec{N}$ . On construit ainsi la figure complétée

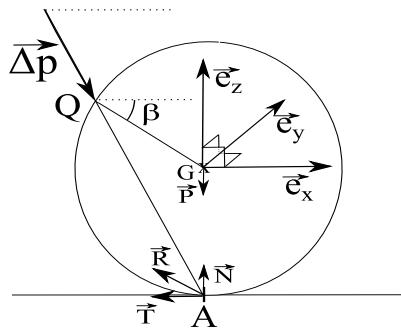


Figure 2

ii/ À l'instant initial ( $t = 0$ ) on aura :  $Mv_g(0) = \Delta p \cos\alpha$  et  $I\omega(0) = \Delta p \sin(\alpha - \beta)$ . On remarque que  $\omega(0)$  est positif si  $\alpha > \beta$  et négatif dans le cas contraire, comme on peut d'ailleurs intuitivement le visualiser en partant de la figure 2.

3/ On admet que le mouvement est horizontal et rectiligne suivant l'axe  $Ox$ . En projetant dans le repère  $(G, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , on écrira

$$\begin{aligned}\vec{v}_g &= v_g \vec{e}_x \\ \vec{\omega} &= \omega \vec{e}_y \\ \vec{T} &= T \vec{e}_x, \quad \vec{N} = N \vec{e}_z \text{ et } \vec{P} = -Mg \vec{e}_z\end{aligned}$$

Le mouvement étant horizontal, on a

$$N - Mg = 0$$

On en déduit aussitôt que  $N > 0$ .

Lorsqu'il y a glissement, on peut utiliser la **loi de Coulomb** (issue de l'expérimentation), soit  $|\vec{T}| = fN$ ,  $f$  étant le coefficient de frottement.

Pour l'équation du centre de masse, on trouve ainsi

$$M \frac{dv_g}{dt} = -fN$$

qui s'intègre aisément en

$$v_g(t) = v_g(0) - fgt$$

L'équation du moment cinétique<sup>3</sup> devient, quant à elle

$$I \frac{d\omega}{dt} = afN$$

---

3. La force de frottement  $\vec{T}$  est localisée en  $A$  sur la figure 2.

dont la solution est

$$a\omega(t) = a\omega(0) + \frac{5}{2}fg t$$

La vitesse du centre de masse  $v_g$  s'annule lorsque  $t = t_c$  tel que

$$t_c = \frac{\pi}{Mgf} \cos\alpha$$

La rotation angulaire s'annule lorsque  $t = t_a$  tel que

$$t_a = \frac{\pi}{Mgf} \sin(\alpha - \beta)$$

Enfin la condition de non-glissement  $v_g - R\omega = 0$  est réalisée lorsque  $t = t_{ng}$  tel que

$$t_{ng} = \frac{2}{7} \frac{\pi}{Mgf} \left[ \cos\alpha + \frac{5}{2} \sin(\alpha - \beta) \right]$$

Pour une percussion horizontale, soit  $\alpha = 0$ , on peut remarquer que  $t_{ng} = 0$  lorsque  $\sin\beta = \frac{2}{5}$ . Dans ce cas la boule roule sans glisser dès l'instant initial.

Si  $\alpha < \beta$ , la rotation ne s'annule jamais. Si  $\alpha = \beta$ , la rotation est toujours nulle (boule frappée au centre). Enfin si  $\alpha > \beta$  et tel que  $\tan\alpha > \frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$ , la vitesse du centre de masse, d'abord positive, s'annule, puis la boule repart en arrière (effet draw shot).

### Problème 3 : équations d'Euler et polhodie

1/ Soit  $\mathcal{R}$  un référentiel quelconque. La vitesse d'une particule  $M$ , de masse  $m$ , évaluée dans ce référentiel est  $\vec{v}$ . Son moment cinétique par rapport à un point  $O$  arbitraire, non nécessairement fixe dans  $\mathcal{R}$  est

$$\vec{\sigma}_O = m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$$

Pour un système composé de  $N$  particules (masses  $m_i$ , vitesses  $\vec{v}_i$ ), on a

$$\vec{\Sigma}_O = \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{v}_i$$

2/ Il faut préciser dans quel référentiel on calcule cette dérivée. L'énoncé ne le précise pas, mais on peut supposer que c'est par rapport à  $\mathcal{R}$ . On a donc

$$\frac{d\vec{\Sigma}_O}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d\overrightarrow{OM}_i}{dt} \wedge (m_i \vec{v}_i) + \overrightarrow{OM}_i \wedge (m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt})$$

Le point  $O$  n'est pas nécessairement fixe dans  $\mathcal{R}$  et donc

$$\frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} = \overrightarrow{v_i} - \overrightarrow{v}_O$$

Finalement

$$\frac{d\overrightarrow{\Sigma}_O}{dt} = -\overrightarrow{v}_O \wedge \overrightarrow{P} + \overrightarrow{OM_i} \wedge (m_i \frac{d\overrightarrow{v_i}}{dt}) \quad (*)$$

où  $\overrightarrow{P} = \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{v_i}$  désigne la quantité de mouvement totale du système.

3/ Le premier terme dans le second membre de l'expression  $(*)$  disparaît car  $\overrightarrow{v}_G \wedge \overrightarrow{P} = \overrightarrow{0}$ , étant donné que  $\overrightarrow{P} = \mathbf{M} \overrightarrow{v}_G$  ( $\mathbf{M} = \sum_{i=1}^N m_i$  masse totale du système). Il reste

$$\frac{d\overrightarrow{\Sigma}_G}{dt} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{GM_i} \wedge (m_i \frac{d\overrightarrow{v_i}}{dt})$$

4/ Les axes d'un repère lié au référentiel barycentrique  $\mathcal{R}_B$  (d'origine commune le barycentre  $G$ ) restent constamment deux à deux parallèles à ceux d'un repère lié à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  (le référentiel barycentrique est un référentiel en translation pure – mais pas forcément rectiligne, ni même uniforme car  $G$  peut avoir un mouvement quelconque dans  $\mathcal{R}_g$ !).

Dans le référentiel barycentrique, on a ( $\overrightarrow{v_i} \equiv \overrightarrow{v}(M_i/\mathcal{R}_B)$ )

$$\overrightarrow{\Sigma}_G = \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{GM_i} \wedge \overrightarrow{v_i}$$

et l'on tire de la question 3/

$$\frac{d\overrightarrow{\Sigma}_G}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_B} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{GM_i} \wedge (m_i \frac{d\overrightarrow{v_i}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_B})$$

L'équation de la dynamique régissant le mouvement de la particule  $M_i$  dans  $\mathcal{R}_B$  (la résultante des forces appliquées à  $M_i$  est  $\overrightarrow{f}_i$ ) s'écrit

$$m_i \frac{d\overrightarrow{v_i}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_B} = \overrightarrow{f}_i - m_i \frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt^2} \Big|_{\mathcal{R}_g}$$

( $O$  est ici supposé fixe dans  $\mathcal{R}_g$ ).

Il vient donc

$$\frac{d\vec{\Sigma}_G}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_B} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{GM}_i \wedge \vec{f}_i \equiv \vec{\mathcal{M}}_G$$

5/ On a, par définition, dans  $\mathcal{R}_B$

$$\vec{v}_i = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}_i$$

et

$$\vec{\Sigma}_G = \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{GM}_i \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}_i)$$

soit, en composantes

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{Gx} \\ \Sigma_{Gx} \\ \Sigma_{Gx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}$$

(on peut aisément passer à la limite continue :  $\sum_i m_i \dots \rightarrow \int_V dm \dots$ ,  $V$  représentant le volume du corps et  $x_i \rightarrow x, \dots$ )  
ou encore, sous forme compacte :

$$\vec{\Sigma}_G = \bar{\bar{I}} \cdot \vec{\Omega}$$

Les quantités  $x_i, y_i, \dots$  sont indépendantes du temps car le corps est fixe dans  $\mathcal{R}_S$  et le repère cartésien  $(G, x, y, z)$  est lié à  $\mathcal{R}_S$ . Les composantes du tenseur  $\bar{\bar{I}}$  sont donc indépendantes du temps, bien que leur écriture dépende évidemment du repère choisi.

5/ En choisissant adéquatement le repère  $(G, x, y, z)$  (repère principal), on peut toujours diagonaliser  $\bar{\bar{I}}$  pour le ramener à la forme suivante

$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{\Omega} = p \vec{i} + q \vec{j} + r \vec{k}$$

$$\vec{\Sigma}_G = Ap \vec{i} + Bq \vec{j} + Cr \vec{k}$$

6/ En dérivant, on obtient successivement

$$\frac{d\vec{\Sigma}_G}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_S} = A \frac{dp}{dt} \vec{i} + \dots$$

et

$$\frac{d\vec{\Sigma}_G}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_B} = A \left( \frac{dp}{dt} \vec{i} + p \frac{d\vec{i}}{dt} \right) + \dots$$

soit encore, compte tenu que  $\frac{d\vec{i}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_B} = \vec{\Omega} \wedge \vec{i}, \dots$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\Sigma}_G}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_B} &= A \frac{dp}{dt} \vec{i} + \dots + Ap \left( \vec{\Omega} \wedge \vec{i} \right) + \dots \\ &= \frac{d\vec{\Sigma}_G}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_S} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Sigma}_G \end{aligned}$$

Formons, à présent, le produit vectoriel  $\vec{\Omega} \wedge \vec{\Sigma}_G$

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{\Sigma}_G = \begin{vmatrix} p & Ap & (C-B)qr \\ q & Bq & (A-C)pr \\ r & Cr & (B-A)pq \end{vmatrix}$$

On aboutit, en définitive, au système d'équations (non linéaires)

$$A \frac{dp}{dt} = (C-B)qr + \mathcal{M}_{Gx}$$

$$B \frac{dq}{dt} = (A-C)pr + \mathcal{M}_{Gy}$$

$$C \frac{dr}{dt} = (B-A)pq + \mathcal{M}_{Gz} \quad (*)$$

7/ On peut négliger le produit  $pq$  dans l'équation (\*). On obtient

$$C \frac{dr}{dt} \simeq 0$$

Soit  $r = \Omega_0 = Cte$ . En substituant dans les deux autres équations du système, il vient

$$A \frac{dp}{dt} = (C-B)\Omega_0 q$$

$$B \frac{dq}{dt} = (A - C) \Omega_0 p$$

équations que l'on peut aisément découpler, soit pour  $p$

$$\frac{d^2p}{dt^2} + \frac{(C - A)(C - B)}{AB} \Omega_0^2 p = 0$$

et une équation très similaire pour  $q$ .

Cas i/  $C > A$  et  $C > B$  (ou  $C < A$  et  $C < B$ )

La solution est oscillante

$$p = a e^{i\omega t} + b e^{-i\omega t}$$

avec

$$\omega = \sqrt{\frac{(C - A)(C - B)}{AB}} \Omega_0$$

et de même pour  $q$ .

Lorsque  $A = B$  (corps de révolution autour de l'axe des  $z$ ) les deux équations différentielles pour  $p$  et  $q$  trouvées plus haut peuvent aisément se ramener à l'équation suivante (plan complexe  $\mathbb{C}$ )

$$\frac{d\mathcal{W}}{dt} = -i\omega \mathcal{W}$$

où l'affixe  $\mathcal{W} = p + iq \in \mathbb{C}$  et  $\omega = \left(\frac{C}{A} - 1\right) \Omega_0$ .

La transcription dans  $\mathbb{R}^2$  (plan de base  $(\vec{i}, \vec{j})$ ), représentation géométrique de  $\mathbb{C}$ , est que le point figuratif  $P$ , image de  $\mathcal{W}$ , parcourt un petit cercle autour de l'origine. Cette trajectoire de  $P$  est appelée **polhodie** (le terme polhodie est la traduction littérale de *trajectoire du pôle* en grec).

Posons, à présent,  $\vec{\Omega}_1 = p \vec{i} + q \vec{j}$  ( $\|\vec{\Omega}_1\| = |\mathcal{W}|$ ). Le vecteur  $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_1 + \vec{\Omega}_0$  décrit quant à lui dans  $\mathcal{R}_S$  un cône d'angle  $\frac{\Omega_1}{\Omega_0}$  autour de la direction donnée par  $\vec{k}$ .

Cas ii/  $A < C < B$  (ou  $B < C < A$ )

La solution est non-oscillante

$$p = a e^{\alpha t} \quad [+b e^{-\alpha t}]$$

avec  $\alpha = \sqrt{\frac{(A-C)(C-B)}{AB}} \Omega_0$  Le mouvement est instable, le vecteur rotation  $\vec{\Omega}$  s'éloigne exponentiellement de l'axe  $Oz$ .

Conclusion : si le vecteur  $\vec{\Omega}$  est voisin de l'axe de plus grand ou plus petit moment d'inertie, la rotation est stable ; elle est par contre instable si  $\vec{\Omega}$  est voisin de l'axe de moment d'inertie médian.

7/ A.N. On donne pour la Terre  $A \simeq B$ ,  $\frac{C}{C-A} = 305$ ,  $\Omega_0 = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . On trouve ainsi que la période  $T_{polh} = \frac{2\pi}{\omega}$  est égale à 305 jours (**Euler**, 1755). En fait la période réelle est un peu plus élevée, de l'ordre de 430 jours (**Chandler**, 1891). La différence s'explique par le fait que la Terre n'est pas un corps complètement rigide et qu'elle possède en réalité une partie douée d'élasticité (**Newcomb**, 1891). Cette partie ne contribue pas à la polhodie car elle reste toujours parfaitement symétrique autour de l'axe instantané de rotation.

#### Problème 4 : angles d'Euler. Mouvement gyroscopique de la toupie

1/ On a (cf. rappels de cours)

$$\vec{\Sigma}_G = \bar{\bar{I}} \cdot \vec{\Omega}$$

où  $\bar{\bar{I}}$  désigne le tenseur d'inertie défini matriciellement (repère principal) par

$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

et  $\vec{\Omega} = p \vec{i} + q \vec{j} + r \vec{k}$  représente la rotation du corps mesurée dans le référentiel barycentrique.

L'énergie cinétique  $T$  du corps mesurée dans le référentiel barycentrique est, quant à elle

$$T = \frac{1}{2} \int d\tau \rho v^2$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique qui dépend en général du point si le corps n'est pas homogène.

Le corps étant rigide, la vitesse de tout point  $M$  est  $\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{GM}$ , le vecteur  $\vec{\Omega}$  pouvant éventuellement dépendre du temps. On a donc

$$T = \frac{1}{2} \int d\tau \rho (\vec{\Omega} \wedge \vec{GM})^2$$

Cette expression peut encore être écrite sous la forme

$$T = \frac{1}{2} \int d\tau \rho (\vec{\Omega} \wedge \vec{GM}) \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{GM})$$

$$= \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \int d\tau \rho \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM})$$

On reconnaît l'expression du moment cinétique, soit

$$\vec{\Sigma}_G = \int d\tau \rho \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM})$$

d'où il résulte

$$T = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\Sigma}_G$$

et finalement

$$T = \frac{1}{2} {}^T \vec{\Omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\Omega}$$

où  ${}^T \vec{\Omega}$  est le vecteur transposé de  $\vec{\Omega}$  ( $\vec{\Omega}$  vecteur colonne  $\rightarrow$   ${}^T \vec{\Omega}$  vecteur ligne). Plus explicitement

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \end{aligned}$$

2/ On a (cf. fig. 1 de l'énoncé, non reproduite ici)

$$p = \dot{\theta}, \quad q = \dot{\psi} \sin\theta, \quad r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos\theta$$

ce qui donne pour l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 + B (\dot{\psi} \sin\theta)^2 + C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos\theta)^2$$

3/ Le potentiel énergétique  $dV$  d'un élément de masse  $dm = \rho d\tau$  situé en un point courant  $M$  et plongé dans un champ de pesanteur uniforme  $g$  est

$$dV = (\rho g d\tau) Z + Cte$$

Il convient d'exprimer  $Z$  en fonction de  $x, y, z$ . Écrivons que

$$X \vec{I} + Y \vec{J} + Z \vec{K} = (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) + \Delta \vec{k}$$

avec (cf. fig. 1 donnée dans l'énoncé)

$$\vec{i} = (\cos\psi \vec{I} + \sin\psi \vec{J})$$

$$\vec{j} = \cos\theta (-\sin\psi \vec{I} + \cos\psi \vec{J}) + \sin\theta \vec{K}$$

$$\vec{k} = \sin\theta(\sin\psi\vec{I} - \cos\psi\vec{J}) + \cos\theta\vec{K}$$

Par identification, on trouve ainsi

$$Z = (z + \Delta)\cos\theta + y\sin\theta$$

En intégrant, il vient

$$V(\theta) = g \int \rho d\tau [(z + \Delta)\cos\theta + y\sin\theta] + Cte$$

soit

$$V(\theta) = Mg [\cos\theta(z_G + \Delta) + y_G\sin\theta] + Cte = Mg \Delta\cos\theta$$

en choisissant la constante égale à zéro et  $z_G = 0$ ,  $y_G = 0$ .

4/

i/ Le lagrangien est  $L = T - V$ , soit

$$L = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + B(\dot{\psi}\sin\theta)^2 + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2 - Mg \Delta\cos\theta$$

Équations en  $\psi$  et  $\varphi$  : les coordonnées  $\psi$  et  $\varphi$  sont cycliques ( $\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \equiv 0$ ,  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \equiv 0$ ). Il en résulte les deux intégrales premières du mouvement

$$C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) = \Sigma_{Gz} = Cte$$

$$B\sin^2\theta \dot{\psi} + \Sigma_{Gz}\cos\theta = \Sigma_{GZ} = Cte$$

Équation en  $\theta$  :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

soit

$$A\ddot{\theta} - B\sin\theta\cos\theta\dot{\psi}^2 + \Sigma_{Gz}\sin\theta\dot{\psi} - Mg \Delta\sin\theta = 0$$

ii/ Les valeurs demandées sont les racines de l'équation

$$B\cos\theta \dot{\psi}^2 - \Sigma_{Gz}\dot{\psi} + Mg \Delta = 0 \quad (*)$$

et l'on a

$$r = \frac{Mg \Delta + B\cos\theta\dot{\psi}^2}{C\dot{\psi}}$$

Si  $r$  est perçu comme une fonction de  $\dot{\psi}$

$$r > r_{min} = 2 \frac{\sqrt{B}Mg \Delta\cos\theta}{C}$$

Lorsque  $r \gg r_{min}$ , les racines de l'équation (\*) sont approximativement données par

$$\dot{\psi} \Big|_{lent} \simeq \frac{Mg \Delta}{Cr}$$

qui constitue la précession lente.

De même

$$\dot{\psi} \Big|_{rapide} \simeq \frac{Cr}{B\cos\theta} \quad (\text{précession rapide}^4)$$

iii/ L'énergie totale est

$$E = \frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 + \frac{(\Sigma_{GZ} - \Sigma_{Gz} \cos\theta)^2}{2B \sin^2\theta} + \frac{\Sigma_{Gz}^2}{2C} + Mg \Delta \cos\theta$$

Posons  $E' = E - \frac{\Sigma_{Gz}^2}{2C}$  et  $u = \cos\theta$ , il vient

$$\dot{u}^2 = f(u) = \frac{2B(E' - Mg \Delta u)(1 - u^2) - (\Sigma_{GZ} - \Sigma_{Gz}u)^2}{B^2}$$

La quantité  $\dot{u}^2$  doit évidemment être positive ou nulle. Le numérateur de  $f(u)$  étant une équation cubique en  $u$  et  $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} f(u) \rightarrow \pm\infty$ , il convient donc de déterminer l'intervalle  $[u_1, u_2]$  sur lequel  $f(u)$  est positif ou nul. Les valeurs correspondantes pour l'angle  $\theta$ , soit  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , donnent les limites de variation de  $\theta$  entre lesquelles l'axe peut osciller tout en précessant autour de l'axe  $OZ$ . Cet effet est appelé **nutation**.

5/ La vision lagrangienne masque l'étude des forces. Il y a deux forces qui s'équilibrivent à très peu près : le poids  $\vec{g}$ , appliqué en  $G$  et la réaction du support  $\vec{R}$ , appliquée en  $O$ . La force résultante  $\delta\vec{F} = \vec{R} + M\vec{g} \simeq \vec{0}$  est centripète et elle régit le très lent mouvement du barycentre autour de l'axe  $OZ$ (fig. 2).

---

4. La précession souvent observée est la plus lente des deux.

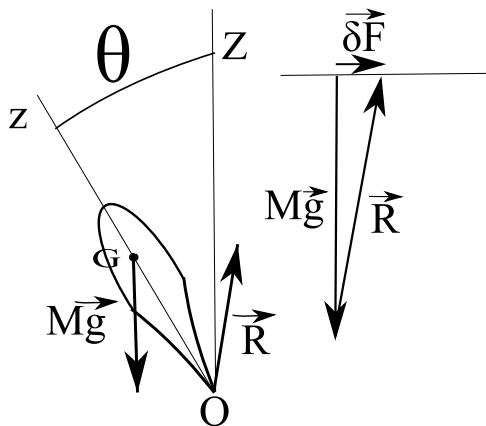


Figure 2

### Problème 5 : précession et nutation terrestres

1/ Si  $\vec{\Sigma}$  désigne le moment cinétique de la Terre dans le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}_B$ , le théorème du moment cinétique s'écrit

$$\left. \frac{d\vec{\Sigma}}{dt} \right|_{R_B} = \int dm \vec{GM} \wedge \vec{f}$$

2/ Exprimant le vecteur rotation dans le repère principal  $(G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on a

$$\vec{\Omega} = p \vec{i} + q \vec{j} + r \vec{k}$$

et le moment cinétique, projeté dans ce repère devient

$$\vec{\Sigma} = Ap \vec{i} + Bq \vec{j} + Cr \vec{k}$$

On a d'autre part, en s'aidant de la figure 1 de l'énoncé

$$r = \Omega + \dot{\psi} \cos\theta \quad p = \dot{\theta} \quad q = \dot{\psi} \sin\theta$$

et

$$\vec{i} = (\cos\psi \vec{I} + \sin\psi \vec{J})$$

$$\vec{j} = \cos\theta (-\sin\psi \vec{I} + \cos\psi \vec{J}) + \sin\theta \vec{K}$$

$$\vec{k} = \sin\theta (\sin\psi \vec{I} - \cos\psi \vec{J}) + \cos\theta \vec{K}$$

3/ Compte tenu des hypothèses

$$\frac{d\vec{\Sigma}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_B} = C\Omega \frac{d\vec{k}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_B}$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{k}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_B} &= (\cos\psi \sin\theta \dot{\psi} + \sin\psi \cos\theta \dot{\theta}) \vec{I} \\ &+ (\sin\psi \sin\theta \dot{\psi} - \cos\psi \cos\theta \dot{\theta}) \vec{J} - \sin\theta \dot{\theta} \vec{K} \\ &= \dot{\psi} \sin\epsilon \vec{I} - \dot{\theta} (\cos\epsilon \vec{J} + \sin\epsilon \vec{K}) \end{aligned}$$

Le théorème du moment cinétique, exprimé dans le référentiel barycentrique, peut dès lors s'écrire

$$C\Omega [\dot{\psi} \sin\epsilon \vec{I} - \dot{\theta} (\cos\epsilon \vec{J} + \sin\epsilon \vec{K})] = \int dm \vec{GM} \wedge \vec{f}$$

4/ Soit  $\varphi$  l'angle repérant un point quelconque  $P$  le long du tore (rayon  $\Delta$ ).

On a

$$\vec{GP} = \Delta (\cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j})$$

ou, puisque  $\psi \simeq 0$  et  $\theta \simeq \epsilon$

$$\vec{GP} = \Delta (\cos\varphi \vec{I} + \sin\varphi \cos\epsilon \vec{J} + \sin\varphi \sin\epsilon \vec{K})$$

La force gravitationnelle qu'exerce l'astre, supposé ponctuel (point  $A$ ) de masse  $M$ , sur un élément de masse unité pris au point courant  $P$  le long du tore, est donnée par

$$\vec{f} = -\mathcal{G}M \frac{\vec{AP}}{AP^3}$$

Soit en intégrant sur tout le tore

$$\int dm \vec{GP} \wedge \vec{f} = \mathcal{G}M \int dm \frac{\vec{GP} \wedge \vec{GA}}{AP^3}$$

(le lecteur vérifiera aisément, par raison de symétrie, que la sphère homogène ne contribue pas au calcul du couple).

La position de l'astre sur l'écliptique est repérée par le rayon-vecteur

$$\vec{GA} = D [\cos\lambda \vec{I} + \sin\lambda \vec{J} + i \sin(\lambda - \omega) \vec{K}]$$

où l'on a supposé l'inclinaison de l'orbite de l'astre sur l'écliptique petite de telle sorte que  $\sin i \simeq i$ .

On calcule les produits suivants

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{GA} &= \Delta D [\cos \varphi \cos \lambda + \cos \epsilon \sin \varphi \sin \lambda \\ &\quad + i \sin \epsilon \sin \varphi \sin(\lambda - \omega)] \\ \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{GA} &= \Delta \left| \begin{array}{cc} \cos \varphi & \cos \lambda \\ \cos \epsilon \sin \varphi & \sin \lambda \\ \sin \epsilon \sin \varphi & i \sin(\lambda - \omega) \end{array} \right| \\ &= \Delta D \left| \begin{array}{c} i \cos \epsilon \sin \varphi \sin(\lambda - \omega) - \sin \epsilon \sin \varphi \sin \lambda \\ \sin \epsilon \sin \varphi \cos \lambda - i \cos \varphi \sin(\lambda - \omega) \\ \cos \varphi \sin \lambda - \cos \epsilon \sin \varphi \cos \lambda \end{array} \right| \end{aligned}$$

La distance Terre-astre est très grande devant les dimensions terrestres. On peut donc faire l'approximation

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA})^2} = \sqrt{\Delta^2 + D^2 - 2 \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA}} \\ &\simeq D \left\{ 1 - \frac{\Delta}{D} [\cos \varphi \cos \lambda + \cos \epsilon \sin \varphi \sin \lambda + i \sin \epsilon \sin \varphi \sin(\lambda - \omega)] \right\} \end{aligned}$$

soit

$$\frac{1}{AP^3} = \frac{1}{D^3} \left\{ 1 + 3 \frac{\Delta}{D} [\cos \varphi \cos \lambda + \cos \epsilon \sin \varphi \sin \lambda + i \sin \epsilon \sin \varphi \sin(\lambda - \omega)] \right\}$$

L'astre effectuant une révolution complète autour de la Terre en une période, on prend la moyenne sur cette période, soit  $\left\langle \frac{\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OA}}{SP^3} \right\rangle_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda \frac{\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OA}}{AP^3}$  (annulant toute contribution qui apparaît en  $\cos \lambda \sin \lambda$  et  $\langle \sin^2 \lambda \rangle_\lambda = \langle \cos^2 \lambda \rangle_\lambda = \frac{1}{2}$ ). Puis, on intègre sur le tore (annulant cette fois toute contribution qui apparaît en  $\cos \varphi \sin \varphi$ ). On obtient, tous calculs faits

$$\begin{aligned} M \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left\langle \frac{\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OA}}{AP^3} \right\rangle_\lambda \\ = \frac{3}{4} \frac{\Delta^2}{D^3} M \frac{\mu}{2\pi} \left| \begin{array}{c} -\cos \epsilon \sin \epsilon + i \cos 2\epsilon \cos \omega \\ i \cos^2 \epsilon \sin \omega \\ i \sin \epsilon \cos \epsilon \sin \omega \end{array} \right| \end{aligned}$$

(les termes en  $i^2$ , supposés très petits, ont été négligés).

5/ L'opération de moyenne temporelle donne

$$C\Omega \begin{vmatrix} \sin\epsilon \langle \dot{\psi} \rangle \\ -\cos\epsilon \langle \dot{\theta} \rangle \\ -\sin\epsilon \langle \dot{\theta} \rangle \end{vmatrix} = \frac{3}{4} \mathcal{GM} \frac{\Delta^2}{D^3} \mu \begin{vmatrix} -\cos\epsilon \sin\epsilon + i\cos 2\epsilon \cos\omega \\ i\cos^2\epsilon \sin\omega \\ i\sin\epsilon \cos\epsilon \sin\omega \end{vmatrix}$$

soit

$$\begin{aligned} \langle \dot{\psi} \rangle &= -\frac{3}{4} \frac{\mathcal{GM}}{D^3} \mu \Delta^2 \frac{\cos\epsilon}{C\Omega} + \frac{3}{4} \frac{\mathcal{GM}}{D^3} \mu \Delta^2 \frac{i\cos 2\epsilon \cos\omega}{\sin\epsilon C\Omega} \\ \langle \dot{\theta} \rangle &= -\frac{3}{4} \frac{\mathcal{GM}}{D^3} \mu \Delta^2 \frac{i \cos\epsilon \sin\omega}{C\Omega} \end{aligned}$$

6/

i/ On impose que

$$\mu \Delta^2 = C - \frac{2}{5} mc^2 = 2(C - A)$$

ii/ On aboutit, en définitive, aux expressions suivantes

$$\langle \psi \rangle = \psi_0 - \Omega_{prec} t + \delta\psi_{nut} \sin n_N(t - t_0)$$

$$\langle \theta \rangle = \psi_0 - \delta\theta_{nut} \cos n_N(t - t_0)$$

en posant

$$\Omega_{prec} = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{GM}}{D^3} \frac{C - A}{C\Omega} \cos\epsilon$$

$$\delta\psi_{nut} = \frac{3}{2n_N} \frac{\mathcal{GM}}{D^3} \frac{C - A}{C\Omega} \frac{i\cos 2\epsilon}{\sin\epsilon} \quad \delta\theta_{nut} = \frac{3}{2n_N} \frac{\mathcal{GM}}{D^3} \frac{C - A}{C\Omega} i \cos\epsilon.$$

$$7/ \text{ A.N. } \frac{C - A}{C} = 0.0033, \epsilon = 23.44^\circ, \Omega = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

Pour le Soleil  $\mathcal{GM} = 1.3 \cdot 10^{20} \frac{m^3}{s^2}$ ,  $D = 1.49 \cdot 10^{11} \text{ m}$ ,  $\omega \equiv 0$

$$\Omega_{prec} \simeq 16''/an$$

Pour la Lune  $\mathcal{GM} = 4.90 \cdot 10^{12} \frac{m^3}{s^2}$ ,  $D = 3.83 \cdot 10^8 \text{ m}$ ,  $i = 5.16^\circ$ ,  $\omega = -n_N(t - t_0)$   
avec  $n_N = \frac{2\pi}{18.6 \text{ (ans)}}$

$$\Omega_{prec} \simeq 34''/an$$