

Table des matières

1 Groupes monogènes. Groupes cycliques. Exemples	15
1.1 Groupes monogènes	15
1.2 Sous-groupes d'un groupe monogène	17
1.2.1 D'un groupe monogène infini	17
1.2.2 D'un groupe cyclique	18
1.3 Exemples	20
1.3.1 Produit de groupes cycliques	20
1.3.2 Sur un corps fini	21
2 Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Applications	23
2.1 Permutations d'un ensemble fini	23
2.2 Décomposition d'une permutation	27
2.3 Signature	28
2.4 Applications	30
2.4.1 Théorème de Cayley	30
2.4.2 Le jeu du taquin	31
3 Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications	33
3.1 L'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$	33
3.2 Applications	35
3.2.1 Théorème des restes chinois	35
3.2.2 Théorèmes d'Euler et de Fermat	36
3.2.3 Théorème de Wilson	37
3.2.4 Critère d'Eisenstein	38
4 Structures quotients, exemples et applications	39
4.1 Quotient d'un ensemble par une relation	39
4.1.1 Généralités	39

4.1.2	Constructions de \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} et \mathbb{C}	41
4.1.3	Constructions topologiques	42
4.2	Le cas particulier des groupes	44
4.3	Les espaces projectifs	49
4.4	Les espaces L^p	49
5	Nombres premiers. Propriétés et applications	53
5.1	Présentation	53
5.2	Applications	55
5.2.1	Théorèmes d'Euler et de Fermat	55
5.2.2	Théorème de Wilson	57
5.2.3	Système R.S.A.	57
5.2.4	Critère d'Eisenstein	58
6	Idéaux d'un anneau commutatif. Exemples	61
6.1	Quotienter un anneau	61
6.2	Idéaux premiers, maximaux	65
6.3	Le théorème chinois	67
7	PGCD dans $\mathbb{K}[X]$, où \mathbb{K} est un corps commutatif, théorème de Bézout. Algorithme d'Euclide. Applications	69
7.1	Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$	69
7.2	Théorème de Bézout	72
7.3	Applications	74
7.3.1	Théorème fondamental de l'arithmétique	74
7.3.2	Lemme des noyaux	76
8	Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes	79
8.1	L'algèbre $(\mathbb{K}[X], +, \times, .)$	79
8.2	Dérivation de polynômes	82
8.3	Théorème fondamental de l'algèbre	86
8.4	Relations coefficients-racines	88
9	Racines d'un polynôme à une indéterminée. Relations coefficients-racines. Applications	89
9.1	Racines d'un polynôme à une indéterminée	89
9.2	Relations coefficients-racines	93
9.3	Applications	94
9.3.1	Calcul d'une fonction symétrique	94

9.3.2 Résolution d'un système d'équations algébriques symétriques	95
9.3.3 Zéros de polynômes dérivés successifs	95
9.3.4 Théorème de Joachimsthal	96
10 Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d'une famille de vecteurs	99
10.1 Dimension d'un espace vectoriel	99
10.2 Relations entre les dimensions	102
10.3 Rang d'une famille de vecteurs	104
10.4 Carrés magiques	105
11 Formes linéaires, hyperplans, dualité en dimension finie. Exemples	107
11.1 Formes linéaires et hyperplans	107
11.2 Orthogonalité et dualité	109
11.3 Formes linéaires et sous-espaces vectoriels	113
11.4 Théorème de représentation de Fréchet-Riesz	114
12 Déterminants. Applications	115
12.1 Déterminant d'une matrice	115
12.1.1 Généralités	115
12.1.2 Matrice de permutation	118
12.1.3 Matrice triangulaire	119
12.2 Calculs de déterminants	120
12.2.1 Déterminant d'un produit	120
12.2.2 Développement suivant une ligne ou une colonne	121
12.3 Applications	124
12.3.1 Déterminant de Vandermonde	124
12.3.2 Formule de Cramer	125
12.3.3 Inverse d'une matrice	127
13 Systèmes d'équations linéaires. Applications	129
13.1 Généralités sur les systèmes linéaires	129
13.2 Applications	134
13.2.1 Avec un paramètre	134
13.2.2 Inversion d'une matrice	135
13.2.3 Points alignés	136
13.2.4 Points coplanaires	137
13.2.5 Droites concourantes ou parallèles	138
13.2.6 Que la lumière soit	139

14 Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Applications	141
14.1 Opérations élémentaires et propriétés	141
14.2 Applications	145
14.2.1 Calcul du rang d'une matrice	145
14.2.2 Résolution d'un système linéaire	146
14.2.3 Calcul de l'inverse d'une matrice	147
14.2.4 Déterminant de Vandermonde	147
14.2.5 Décomposition LU d'une matrice	149
15 Diverses factorisations de matrices. Applications	153
15.1 Décomposition polaire	153
15.2 Décomposition d'Iwasawa	153
15.3 Décomposition LU	154
15.4 Décomposition de Cholesky	154
15.5 Réduction de Jordan	155
16 Notion de rang en algèbre linéaire. Applications	163
16.1 Rang d'une famille de vecteurs	163
16.2 Rang d'une application linéaire	164
16.3 Rang d'une matrice	166
16.4 Applications	169
16.4.1 Systèmes linéaires	169
16.4.2 Interpolation de Lagrange	170
16.4.3 Somme de deux applications linéaires	170
16.4.4 Règle de Hörner	170
17 Valeurs propres et vecteurs propres. Recherche et utilisation	173
17.1 Recherche des valeurs propres	173
17.2 Utilisation des valeurs propres	177
17.2.1 Diagonalisation d'un endomorphisme	177
17.2.2 Théorème spectral et conséquences	179
17.2.3 Points fixes d'une application affine	182
18 Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications	183
18.1 Généralités	183
18.2 Diagonalisation	187
18.3 Trigonalisation	189

18.4 Décomposition de Jordan-Dunford	190
18.5 Applications	193
18.5.1 Calcul des puissances d'une matrice carrée	193
18.5.2 Suites récurrentes linéaires simultanées du premier ordre à coefficients constants	193
18.5.3 Système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients constants	193
19 Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications	195
19.1 Généralités	195
19.2 Applications	199
19.2.1 Équations différentielles	199
19.2.2 Théorème de Cayley-Hamilton	200
20 Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien. Applications	203
20.1 Généralités	203
20.2 Réduction	205
20.3 Applications	207
20.3.1 Endomorphisme symétrique sur l'espace des polynômes	207
20.3.2 Racine cubique d'une matrice symétrique réelle	208
20.3.3 Endomorphismes symétriques positifs	210
20.3.4 Décomposition polaire	212
21 Endomorphismes diagonalisables. Exemples et applications	215
21.1 Endomorphisme diagonalisable	215
21.2 Applications	218
21.2.1 Décomposition de Jordan-Dunford	218
21.2.2 Calcul des puissances d'une matrice carrée	220
21.2.3 Suites récurrentes linéaires simultanées du premier ordre à coefficients constants	222
21.2.4 Système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients constants	224
22 Endomorphismes trigonalisables et nilpotents. Applications	227
22.1 Endomorphismes trigonalisables	227
22.2 Endomorphismes nilpotents	230
22.3 Applications	232
22.3.1 Décomposition de Jordan-Dunford	232
22.3.2 Petits sous-groupes de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$	234
22.3.3 Théorème de Burnside	235

23 Groupe linéaire $GL(E)$ d'un espace vectoriel de dimension finie E	237
23.1 Définition et caractérisation	237
23.2 Le groupe spécial linéaire	239
23.3 Générateurs	239
23.4 Le groupe projectif linéaire	244
23.5 Topologie	246
24 Barycentres. Applications	249
24.1 Fonction vectorielle de Leibniz	249
24.2 Applications	252
24.2.1 Caractérisation des applications affines	252
24.2.2 Théorème de Ceva	253
24.2.3 Fonction scalaire de Leibniz	254
24.2.4 Théorème de Gauss-Lucas	255
24.2.5 Fonction convexe	255
25 Applications affines en dimension finie. Propriétés et exemples	257
25.1 Généralités	257
25.2 Homothéties et translations	260
25.3 Projecteurs et symétries	263
25.4 Points fixes d'une application affine	265
26 Espaces préhilbertiens : projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Application à l'approximation de fonctions	267
26.1 Produit scalaire et orthogonalité	267
26.2 Projection orthogonale	270
26.3 Séries de Fourier	273
27 Réduction et classification des formes quadratiques sur un espace vectoriel réel de dimension finie. Cas d'un espace euclidien. Applications géométriques	275
27.1 Réduction d'une forme quadratique	276
27.2 Classification des formes quadratiques réelles	279
27.3 Applications géométriques	282
27.3.1 Classement des coniques	282
27.3.2 Extremum d'une fonction de plusieurs variables	284

28 Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2, de dimension 3	287
28.1 Généralités	287
28.2 Cas de la dimension 2	291
28.3 Cas de la dimension 3	293
29 Isométries du plan affine euclidien, décomposition canonique. Applications	299
29.1 Groupe des isométries du plan affine	299
29.2 Classification des isométries du plan affine	300
29.3 Applications	303
29.3.1 Expression complexe	303
29.3.2 Groupe diédral	305
30 Utilisation des nombres complexes en géométrie	307
30.1 Nombres complexes et géométrie	307
30.2 Deux lieux géométriques	308
30.3 Similitudes directes	310
30.4 Quelques théorèmes	311
30.4.1 Caractérisation d'un triangle équilatéral	311
30.4.2 Caractérisation de la cocyclicité	312
30.4.3 Théorème de Ptolémée	313
30.4.4 Théorème de Napoléon	313
30.4.5 Théorème de Van Aubel	314
31 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupe des racines de l'unité. Applications	317
31.1 Groupe des nombres complexes de module 1	317
31.2 Racines de l'unité	320
31.3 Applications	322
31.3.1 Calculs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	322
31.3.2 Racines n -ièmes d'un nombre complexe	323
31.3.3 Triangle équilatéral dans le plan	323
31.3.4 Calculs de sommes	324
32 Utilisation des groupes en géométrie	327
32.1 La spirale logarithmique	327
32.2 Le groupe de symétries de l'icosaèdre régulier	329
32.3 Les groupes de frise	333

33 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications	341
33.1 Généralités	341
33.2 Applications	345
33.2.1 Groupe des symétries du cube	345
33.2.2 Combinatoire	347
33.2.3 Groupes finis	349
33.2.4 Théorème de Cauchy	350
34 Arithmétique dans \mathbb{Z}	351
34.1 Division euclidienne dans \mathbb{Z}	351
34.2 PGCD et PPCM de deux entiers relatifs	352
34.3 Équations diophantiennes	355
34.4 Nombres premiers	356
35 Coniques	359
35.1 Définitions monofocales	359
35.2 Équations cartésiennes	360
35.3 Représentations paramétriques	362
35.4 Équation polaire	363
35.5 Définitions bifocales	364
35.6 Réduction des coniques	365
36 Changements de bases en algèbre linéaire. Applications	371
36.1 Changements de bases	371
36.1.1 Matrices de passages	371
36.1.2 Matrices équivalentes	373
36.1.3 Matrices semblables	375
36.2 Applications	376
36.2.1 Diagonalisation d'une matrice carrée	376
36.2.2 Trigonalisation d'une matrice carrée	377
36.2.3 Calcul des puissances d'une matrice carrée	379
36.2.4 Suites récurrentes linéaires à coefficients constants	380
37 Droites et cercles dans le plan affine euclidien	383
37.1 Droites du plan affine euclidien	383
37.2 Cercles du plan affine euclidien	386
37.3 Lignes de niveau	389
37.4 Inversion	390

38 Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications	393
38.1 Généralités	393
38.2 Décomposition en éléments simples	396
38.3 Applications	399
38.3.1 Quelques décompositions en éléments simples	399
38.3.2 Un calcul de primitive	399
38.3.3 Un calcul de somme	400
Annexes	401
Décomposition d'une matrice	401
Diagonalisation et trigonalisation d'une matrice	401
Quelques groupes classiques	402
Groupe cyclique	402
Groupe symétrique	402
Groupe général linéaire	403
Groupe orthogonal	404
Groupe affine	405
Bibliographie	407
Index	409