Pascal Honvault

Licence
CAPES

Géométrie pour le futur enseignant

ellipses

Chapitre 1

Nombres complexes

Niveau : terminale (leçon 9).

Prérequis : trigonométrie.

Les nombres complexes sont nés au XVI^e siècle, lors de résolution des équations polynomiales de degré 3 (cf. Bombelli). On y utilisait des racines carrées de réels négatifs, pour finir par retomber sur les solutions réelles ! On admet donc l'existence d'un nombre, noté i , de carré -1 :

$$i^2 = -1 \text{ (notation d'Euler).}$$

1.1 Forme algébrique

1.1.1 Introduction de $\mathbb{C}$

Théorème 1. ***(admis - existence de $\mathbb{C}$)*** *Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ (ensemble des nombres complexes) contenant $\mathbb{R}$ et vérifiant :*

- *$\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et suivent les mêmes règles de calcul ;*
- *il existe un élément i de $\mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$;*
- *tout complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique :*

$$z = a + i.b \text{ , } a, \; b \text{ réels.}$$

Vocabulaire : $a = Re(z)$ est la partie réelle de z, $b = Im(z)$ est la partie imaginaire de z. Si $a = 0$, alors $z = i.b$ est un « imaginaire pur ». Si $b = 0$, alors $z = a$ est un réel ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

Proposition 1. ***(égalité de complexes)*** *Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes,alors : $z = z' \iff a = a'$ et $b = b'$.*

En particulier, $z = 0 \iff a = 0$ et $b = 0$.

Interprétation géométrique :
En munissant le plan usuel $\mathcal{P}$ d'un repère $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, on établit une correspondance (bijective) : $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ z = a + ib & \longmapsto & (a, b). \end{array}$
L'image de z par cette application, tantôt considérée comme un point (noté $M(z)$) tantôt comme un vecteur (noté $\vec{u}(z)$), est appelée « image de z », tandis que l'antécédent de M, noté z_M ou $z_{\vec{u}}$ est appelé « affixe » de M.

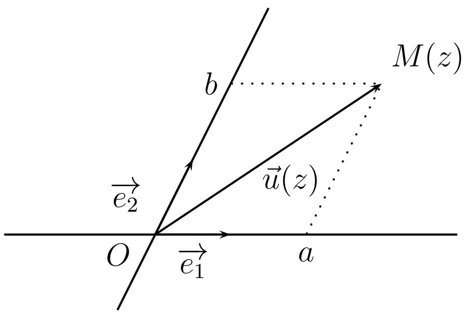

FIGURE 1.1 – Image de $z = a + ib$ et affixe de $M(a, b)$

Proposition 2. *Pour tous points A et B de $\mathcal{P}$, on a : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.*

1.1.2 Opérations dans $\mathbb{C}$

Définition 1. ***(addition dans $\mathbb{C}$)*** *Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes. On pose :*

$$z + z' = a + a' + i(b + b').$$

On définit ainsi une addition dans $\mathbb{C}$ qui est :
- commutative : $z + z' = z' + z$ pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$;
- associative : $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$ pour tous $z, z', z'' \in \mathbb{C}$.

De plus, le complexe 0 est élément neutre pour cette addition, i.e :
$z + 0 = 0 + z = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$; et tout complexe z a un opposé, à savoir $-z = -a - ib$, puisque $z + (-z) = (-z) + z = 0$.

Définition 2. ***(multiplication dans** $\mathbb{C}$**)*** *Soient $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$ deux nombres complexes. On pose :*

$$z.z' = aa' - bb' + i(ab' + a'b).$$

Cette définition est justifiée par le fait qu'on peut « développer » l'expression $(a + ib).(a' + ib')$ en utilisant le théorème 1. On a ainsi une multiplication dans $\mathbb{C}$ qui est :

— commutative : $z.z' = z'.z$ pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$;

— associative : $(z.z').z'' = z.(z'.z'')$ pour tous $z, z', z'' \in \mathbb{C}$.

De plus, le complexe 1 est élément neutre pour cette multiplication : $z.1 = 1.z = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$; et tout complexe z non nul a un inverse, à savoir $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - i\dfrac{b}{a^2+b^2}$, puisque $z.\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{z}.z = 1$ (ce calcul sera justifié ci-après).

1.1.3 Conjugaison

Définition 3. ***(conjugaison dans** $\mathbb{C}$**)*** *Soit $z = a+ib$ un nombre complexe. On appelle* ***conjugué*** *de z le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.*

Proposition 3. *Pour tous complexes z et z', on a :*

1. $\overline{(\bar{z})} = z$;
2. $z + \bar{z} = 2.Re(z)$, $z - \bar{z} = 2i.Im(z)$;
3. $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$, $\overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z'}$;
4. $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ *pour tout entier* n;
5. *si* $z' \neq 0$, *alors* $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$;
6. $z.\bar{z} = a^2 + b^2$ *si* $z = a + ib$.

Cette dernière égalité nous permet de calculer facilement l'inverse d'un complexe non nul sous forme algébrique, puisque :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z.\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2}.$$

1.2 Forme trigonométrique

On munit ici le plan d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ pour la correspondance image-affixe (le « plan complexe »).

1.2.1 Module

Définition 4. *(**Module**) Le module d'un nombre complexe* $z = x + i.y$ *est le nombre réel positif* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z.\bar{z}}$.

Géométriquement, $|z|$ est le « rayon polaire » OM entre l'origine O et l'image M de z.

Proposition 4. *Pour tous nombres complexes* z *et* z' *:*

- $0 \leq |z|$, *et* $|z| = 0$ *si et seulement si* $z = 0$;
- $|Re(z)| \leq |z|$ *et* $|Im(z)| \leq |z|$;
- $|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2.Re(z\overline{z'})$;
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ *(inégalité triangulaire).*

Théorème 2. *Pour tous nombres complexes* z *et* z'*, on a :*

- $|z.z'| = |z|.|z'|$;
- $|z/z'| = |z|/|z'|$ *si* $z' \neq 0$.

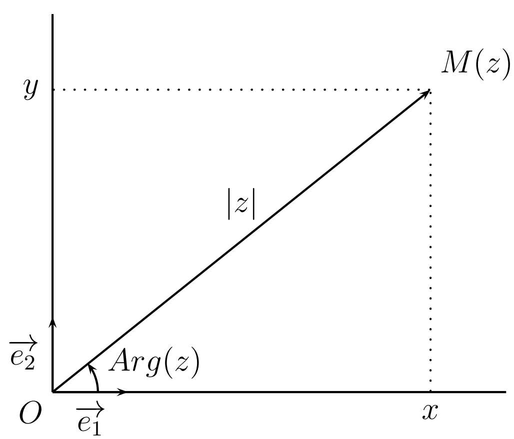

FIGURE 1.2 – Module et argument d'un complexe

Corollaire 1. *Soient* z *et* z' *deux nombres complexes. Alors :*

$$z.z' = 0 \iff z = 0 \text{ ou } z' = 0.$$

1.2.2 Argument

Définition 5. *L'argument d'un nombre complexe* z *non nul est l'angle orienté* $Arg(z) = [\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}]$.

Rappelons qu'on n'a pas besoin d'orienter le plan pour définir les angles orientés. Par contre, c'est indispensable si on veut mesurer ces angles (le plan étant alors orienté par la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ initiale). D'autre part, et par abus, on confond souvent un angle et ses mesures (modulo 2π), voire une de ses mesures s'il n'y a pas de confusion possible.

Théorème 3. *(**Forme trigonométrique**) Pour tout nombre complexe $z \neq 0$, il existe un unique $r > 0$ et un unique angle orienté a tels que*

$$z = r.[\cos(a) + i.\sin(a)].$$

On a alors $r = |z|$ et $a = Arg(z)$.

D'après l'unicité, on a : $z = z' \iff |z| = |z'|$ et $Arg(z) = Arg(z')$ (ou $Arg(z) = Arg(z')\,[mod\ 2\pi]$ si on considère des mesures d'angles en radians). D'autre part, si $z = x+iy$ est donné sous forme algébrique, alors l'angle a est entièrement déterminé par les conditions : $\cos(a) = x/|z|$ et $\sin(a) = y/|z|$, où $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Corollaire 2. *Pour tous nombres complexes z et z' non nuls, on a :*

$$Arg(z.z') = Arg(z) + Arg(z').$$

On voit aussi aisément que $Arg(z/z') = Arg(z) - Arg(z')$ si $zz' \neq 0$.

1.3 Notation exponentielle

Définition 6. *(**Notation exponentielle**) Pour tout nombre réel θ, on pose :*

$$e^{i.\theta} = \cos(\theta) + i.\sin(\theta).$$

Proposition 5. *Tout nombre complexe $z \neq 0$ s'écrit sous la forme $z = r.e^{i.\theta}$ avec $r > 0$. Cette écriture est « unique » modulo 2π, dans le sens où θ est une mesure quelconque de $Arg(z)$, et $r = |z|$.*

Cette notation sous forme de puissance est motivée par la propriété suivante.

Théorème 4. *Pour tous nombres réels θ et θ', on a :*

$$e^{i.\theta}.e^{i.\theta'} = e^{i.(\theta+\theta')}.$$

On a en particulier la formule suivante.

Théorème 5. *(**Formule de Moivre**) Pour tout nombre réel θ et tout entier n, on a :*

$$\left(e^{i.\theta}\right)^n = e^{i.n\theta}.$$

Cette formule s'écrit aussi sous la forme :

$$(\cos(\theta) + i.\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i.\sin(n\theta).$$

Inversement, les formules d'Euler permettent, entre-autres, de linéariser les fonctions trigonométriques.

Théorème 6. *(**Formules d'Euler**) Pour tout nombre réel θ, on a :*

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i.\theta} + e^{-i.\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i.\theta} - e^{-i.\theta}}{2i}.$$

1.4 Applications

1.4.1 Racines carrées d'un complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Les racines carrées de z sont les complexes $Z = x + iy$ tels que : $Z^2 = z$.

Proposition 6. *Tout complexe z non nul a deux racines carrées complexes. De plus, ces racines carrées sont opposées.*

Plus généralement, toute équation polynomiale du second degré, à coefficients réels ou complexes, a deux solutions complexes (éventuellement confondues). Cela pourra être traité dans la leçon 27.

1.4.2 Linéarisation

Pour calculer des primitives de fonctions du type :
$x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \sin^n(x) \in \mathbb{R}$ ou $x \in \mathbb{R} \mapsto g(x) = \cos^n(x) \in \mathbb{R}$, on a besoin de linéariser les fonctions f et g, i.e de les exprimer sous forme de combinaisons linéaires des fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(k.x) \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(k.x) \in \mathbb{R}$ pour $0 \leq k \leq n$, fonctions dont on connaît des primitives. Cela s'effectue simplement en appliquant les formules d'Euler et le triangle de Pascal. Par exemple, on trouve que :

$$\sin^3(x) = \frac{-1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x).$$

1.4.3 Géométrie plane

Les nombres complexes ont énormément d'applications en géométrie plane, nous n'en citons que quelques unes immédiates (cf. leçon suivante). On notera dans la suite z_M (resp. $z_{\vec{u}}$) l'affixe du point M (resp. vecteur $\vec{u}$).

Proposition 7. *Pour tous points A, B, C, D du plan, on a :*
$AB = |z_B - z_A|$ et $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = Arg(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A})$ (si $A \neq B$ et $C \neq D$).

1.5 Développement

Théorème 4 : il existe plusieurs façons d'introduire $\mathbb{C}$ (hors programme) que nous préciserons dans la section 1.6 « Approfondissement ».

Proposition 1 : résulte de l'unicité d'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique (cf. Th 1).

Proposition 2 : c'est clair puisque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Proposition 3 : on peut démontrer la formule de l'item 4 par récurrence en utilisant la formule de l'item 3, le reste se fait sans difficulté.

Proposition 4 : il est clair que :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |x| \text{ et } |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |y|.$$

L'égalité n'est possible pour la première (resp. seconde) inégalité que si $y = 0$ (resp. $x = 0$), i.e $z \in \mathbb{R}$ (resp. $z \in i.\mathbb{R}$). Pour l'inégalité triangulaire, on utilise la formule $|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2.Re(z\bar{z'})$, qu'on obtient en développant $(z + z').(\overline{z + z'})$, puis :

$$|z + z'|^2 \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2.|z\bar{z'}| = (|z| + |z'|)^2.$$

Théorème 2 : on a, pour tous complexes z et z' :

$$|z.z'| = \sqrt{(zz').(\overline{zz'})} = \sqrt{(z\bar{z}).(z'\bar{z'})} = \sqrt{z\bar{z}}.\sqrt{z'\bar{z'}} = |z|.|z'|.$$

Corollaire 1 : en effet, on a : $z.z' = 0 \iff |z.z'| = 0$
$\iff |z|.|z'| = 0 \iff |z| = 0$ ou $|z'| = 0 \iff z = 0$ ou $z' = 0$.

Théorème 3 : l'existence vient de ce que $z/|z|$ est un nombre complexe de module 1, donc en notant θ l'angle polaire du vecteur image, la partie réelle est bien $\cos(\theta)$ et la partie imaginaire $\sin(\theta)$. Pour l'unicité, supposons qu'on ait deux écritures $z = r.[\cos(a) + i.\sin(a)]$ et $z = r'.[\cos(a') + i.\sin(a')]$ avec r et r' positifs. Alors $|z| = r = r'$ et $a' = a (mod\ 2\pi)$ vu qu'un angle orienté est entièrement déterminé par son cosinus et son sinus.

Corollaire 2 : effectuons le produit de deux nombres complexes non nuls $z = |z|.(\cos(\theta) + i.\sin(\theta))$ et $z' = |z'|.(\cos(\theta') + i.\sin(\theta'))$ mis sous forme trigonométrique. On a :

$$z.z' = |z|.(\cos(\theta) + i.\sin(\theta)) \times |z'|.(\cos(\theta') + i.\sin(\theta'))$$

$$= |z|.|z'|.(\cos(\theta + \theta') + i.\sin(\theta + \theta'))$$

en vertu des formules d'addition. L'unicité du théorème précédent entraîne donc que :

$$|z.z'| = |z|.|z'| \text{ et } Arg(z.z') = Arg(z) + Arg(z')(mod\ 2\pi).$$

Section 1.3 : les résultats de cette section sont une ré-écriture des résultats précédents sous forme exponentielle, le théorème de Moivre se démontrant par une récurrence évidente.

Sous-section 1.4.1 : $Z^2 = z \iff (x + iy)^2 = a + ib$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{car } |Z^2| = |z| \\ 2xy = b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = (a + \sqrt{a^2 + b^2})/2 \\ y^2 = (-a + \sqrt{a^2 + b^2})/2 \\ xy = b/2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \varepsilon_1 \sqrt{(a + \sqrt{a^2 + b^2})/2} \\ y = \varepsilon_2 \sqrt{(-a + \sqrt{a^2 + b^2})/2} \\ xy = b/2 \end{cases}$$

où ε_1 et ε_2 valent ± 1. Si $b \neq 0$, la troisième équation du système donne le signe du produit xy. Par conséquent, s'il est positif (resp. négatif), ε_1 et ε_2 sont de même signe (resp. de signes contraires). Cela donne bien deux solutions opposées. Si $b = 0$, alors $y = 0$ et $Z = x = \pm\sqrt{(a + |a|)/2}$.