

Pascal Honvault

Licence
CAPES

Géométrie pour le futur enseignant



Table des matières

I Oral 1	15
1 Nombres complexes	17
1.1 Forme algébrique	17
1.1.1 Introduction de \mathbb{C}	17
1.1.2 Opérations dans \mathbb{C}	18
1.1.3 Conjugaison	19
1.2 Forme trigonométrique	19
1.2.1 Module	20
1.2.2 Argument	20
1.3 Notation exponentielle	21
1.4 Applications	22
1.4.1 Racines carrées d'un complexe	22
1.4.2 Linéarisation	22
1.4.3 Géométrie plane	23
1.5 Développement	23
1.6 Approfondissement	25
2 Nombres complexes en géométrie	27
2.1 Distances-Angles	27
2.2 Transformations du plan	28
2.2.1 Dilatations	28
2.2.2 Rotations	29
2.3 Pentagone régulier	29
2.4 Développement	30
2.5 Approfondissement	33
3 Trigonométrie	35
3.1 Au collège	35

3.2	Au lycée	37
3.2.1	Mesures des angles orientés	37
3.2.2	Fonctions trigonométriques	38
3.2.3	Formules de trigonométrie	40
3.2.4	Équations trigonométriques	40
3.3	Applications	41
3.3.1	Calculs de longueurs et d'angles	41
3.3.2	Physique	42
3.4	Développement	42
3.5	Approfondissement	45
4	Géométrie vectorielle	47
4.1	Vecteurs-Translations	47
4.2	Addition des vecteurs	48
4.3	Produit par un réel	49
4.4	Norme	51
4.5	Développement	52
4.6	Approfondissement	53
5	Repérage	55
5.1	Dans le plan	55
5.2	Dans l'espace	57
5.3	Sur une sphère	58
5.4	Développement	60
5.5	Approfondissement	62
6	Droites et plans de l'espace	63
6.1	Droites	63
6.2	Plans	65
6.3	Plans et droites	67
6.4	Applications	68
6.4.1	Section plane d'un cube	68
6.4.2	Théorème du « toit »	68
6.5	Développement	68
6.6	Approfondissement	72
7	Frises et pavages	73
7.1	Transformations du plan	73
7.1.1	Isométries du plan	73

7.1.2	Homothéties	75
7.2	Frises	76
7.3	Pavages	78
7.3.1	Par des parallélogrammes	78
7.3.2	Par des polygones réguliers	78
7.4	Développement	80
7.5	Approfondissement	80
8	Relations métriques et angulaires	81
8.1	Au collège	81
8.1.1	Triangle isocèle	81
8.1.2	Somme des angles	82
8.1.3	Théorème de Pythagore	82
8.2	Au lycée	82
8.2.1	Théorème d'Al-Kashi	82
8.2.2	Formule des trois sinus	83
8.2.3	Formule de la médiane	83
8.2.4	Formule de Héron	84
8.3	Développement	84
8.4	Approfondissement	88
9	Solides de l'espace	89
9.1	Représentations planes	89
9.1.1	Perspectives	89
9.1.2	Patron	91
9.2	Solides et volumes usuels	92
9.2.1	Cylindres	92
9.2.2	Cônes	93
9.2.3	Boules	94
9.2.4	Solides de révolution	94
9.3	Développement	95
9.4	Approfondissement	96
10	Périmètres, aires, volumes	97
10.1	Périmètre	97
10.2	Aires	98
10.3	Volumes	99
10.4	Conversions des unités	100
10.5	Développement	101

10.6	Approfondissement	104
11	Utilisations des vecteurs	105
11.1	Caractérisation du milieu	105
11.2	Centre de gravité	106
11.3	Alignement	106
11.4	Parallélisme	107
11.5	Produit scalaire	108
11.5.1	Relation de Chasles	108
11.5.2	Orthogonalité	108
11.5.3	Angles	109
11.6	Développement	109
11.7	Approfondissement	111
12	Produit scalaire dans le plan	113
12.1	Définition et propriétés	113
12.2	Applications	114
12.2.1	Calculs de longueurs et d'angles	114
12.2.2	Orthogonalité	115
12.2.3	Théorème d'Al-Kashi	115
12.2.4	Formule d'addition	115
12.3	Développement	115
12.4	Approfondissement	116
13	Proportionnalité et géométrie	119
13.1	Agrandissement - Réduction	119
13.1.1	Théorème de Thalès	119
13.1.2	Réiproque de Thalès	121
13.1.3	Théorèmes des milieux	121
13.2	Homothéties	121
13.3	Autres cas de proportionnalité	122
13.3.1	Vecteurs colinéaires	122
13.3.2	Formule des trois sinus	122
13.3.3	Triangles semblables	123
13.4	Développement	123
13.5	Approfondissement	125

14 Constructions géométriques	127
14.1 Constructions de base	127
14.2 Droites remarquables d'un triangle	128
14.3 Pentagone régulier	128
14.4 Dans l'espace	128
14.5 Utilisation de transformatons	128
14.5.1 Homothéties	128
14.5.2 Translations	129
14.5.3 Symétries axiales	129
14.6 Développement	129
14.7 Approfondissement	135
15 Alignement, parallélisme	137
15.1 Problèmes d'alignement	137
15.1.1 Niveau collège	137
15.1.2 Niveau lycée	138
15.2 Problèmes de parallélisme	138
15.2.1 Niveau collège	138
15.2.2 Niveau lycée	138
15.3 Développement	139
15.4 Approfondissement	143
16 Problèmes d'intersection	145
16.1 Niveau collège	145
16.2 Niveau lycée	145
16.3 Développement	146
II L3 Géométrie : cours et TD	149
17 Algèbre linéaire	151
17.1 Espaces vectoriels réels	151
17.2 Applications linéaires	154
17.3 Déterminants	159
17.4 Réduction des matrices	161
17.5 Annales CAPES	162
17.5.1 CAPES 2014 - 1, partie A	162
17.5.2 CAPES 2016 - 1, partie D	165
17.5.3 CAPES 2014 - 2, partie A	167

18 Géométrie vectorielle euclidienne	169
18.1 Produit scalaire	169
18.2 Norme euclidienne	170
18.3 Ecriture matricielle	171
18.4 Orthogonalité	172
18.4.1 Définition	172
18.4.2 Théorème de Pythagore	172
18.4.3 S.e.v orthogonaux	173
18.4.4 Procédé d'orthonormalisation de Schmidt	174
18.4.5 Projection orthogonale	175
18.5 Endomorphismes orthogonaux	175
18.5.1 Définition	175
18.5.2 Définitions équivalentes	176
18.5.3 Matrices orthogonales	176
18.5.4 Cas $\dim(E) = 2$	177
18.5.5 Cas $\dim(E) = 3$	180
18.6 Exercices	183
18.6.1 Énoncés	183
18.6.2 Éléments de correction	187
18.7 Problème	195
18.8 Annales CAPES 2011 - 2	196
19 Géométrie affine	199
19.1 Espaces affines	199
19.1.1 Définition	199
19.1.2 Premières propriétés	200
19.1.3 Sous-espaces affines	201
19.1.4 Repères affines	203
19.1.5 Exercice : positions relatives de droites et plans en dim 3	206
19.2 Applications affines	207
19.2.1 Définition	207
19.2.2 Exemples	207
19.2.3 Groupe affine	209
19.2.4 Image d'un sous-espace affine	211
19.2.5 Expression analytique	212
19.3 Barycentres	212
19.3.1 Fonction vectorielle de Leibniz	213

19.3.2 Propriétés du barycentre	213
19.3.3 Formule de la moyenne	214
19.3.4 Relations avec la géométrie affine	215
19.4 Exercices	216
19.4.1 Énoncés	216
19.4.2 Éléments de correction	220
20 Géométrie affine euclidienne	231
20.1 Espaces affines euclidiens	231
20.1.1 Définition	231
20.1.2 Distances et angles	231
20.1.3 Orthogonalité	232
20.1.4 Liens entre distance et orthogonalité	233
20.2 Isométries ponctuelles	234
20.2.1 Définition	234
20.2.2 Direction d'une isométrie	234
20.2.3 Exemple fondamental : les réflexions	235
20.2.4 Cas $\dim(\mathcal{E}) = 1$ (cf. TD)	235
20.2.5 Cas $\dim(\mathcal{E}) = 2$	235
20.2.6 Cas $\dim(\mathcal{E}) = 3$	239
20.3 Similitudes planes	242
20.3.1 Définition	242
20.3.2 Rapport d'une similitude	242
20.3.3 Caractère affine des similitudes	243
20.3.4 Réduction des similitudes	244
20.3.5 Détermination d'une similitude	245
20.3.6 Ecriture complexe d'une similitude	245
20.4 Exercices	246
20.4.1 Énoncés	246
20.4.2 Éléments de correction	252
21 Coniques	271
21.1 Formes réduites	271
21.1.1 Paraboles	271
21.1.2 Ellipses	272
21.1.3 Hyperboles	275
21.2 Courbes du second degré	278
21.2.1 Sections coniques	278

21.2.2	Réduction des courbes du second degré	278
21.3	Tangentes aux coniques	280
21.3.1	Paraboles	280
21.3.2	Ellipses	281
21.3.3	Hyperboles	282
21.4	Exercices	283
21.4.1	Énoncés	283
21.4.2	Éléments de correction	285
III	Master MEEF	291
22	Géométrie élémentaire plane	293
22.1	Prérequis	293
22.2	Droites remarquables	296
22.2.1	Médiatrices	296
22.2.2	Hauteurs	297
22.2.3	Médianes	298
22.2.4	Bissectrices	299
22.3	Angles géométriques	301
22.4	Exercices commentés	303
22.4.1	CAPES 2018-2, parties A et B	303
22.4.2	CAPES 2011-1, problème 1	303
22.4.3	CAPES interne 1992, première partie, A-1	304
23	Nombres complexes en géométrie	305
23.1	Prérequis	305
23.2	Structure d'espace vectoriel réel	305
23.2.1	Alignement, parallélisme, orthogonalité	306
23.2.2	Dilatations	306
23.3	Structure de corps	307
23.4	Exercices commentés	309
23.4.1	Groupe des déplacements	309
23.4.2	Configuration de Von Aubel	309
23.4.3	Expression complexe des réflexions	309
23.4.4	CAPES 2018-2-Problème 2-B	310
23.4.5	CAPES 2019-1-Problème 1-A	310

24 Transformations usuelles du plan	311
24.1 Les dilatations	311
24.2 Les isométries	312
24.2.1 Rotations	312
24.2.2 Réflexions et symétries glissées	313
24.3 Similitudes	315
24.4 Exercices commentés	316
24.4.1 Droite d'Euler	316
24.4.2 CAPES interne 1992, Première partie, A - 2	317
24.4.3 CAPES 2020 - 1, Partie E, XVII	317
24.4.4 CAPES interne 2009, Partie C	317
25 Géométrie affine - Barycentres	319
25.1 Espaces affines	319
25.2 Sous-espaces affines	319
25.3 Applications affines	320
25.4 Exercices commentés	323
25.4.1 Équations de droites et de plans	323
25.4.2 Expressions analytiques (transformations usuelles)	323
25.4.3 Les symétries centrales	324
25.4.4 Ellipse de Steiner	325
26 Géométrie vectorielle euclidienne	327
26.1 Produit scalaire	327
26.1.1 Dans le plan	327
26.1.2 Dans l'espace usuel	329
26.2 Produit vectoriel	329
26.3 Applications et exercices commentés	331
26.3.1 Formules de trigonométries	331
26.3.2 Diverses équations dans un plan	331
26.3.3 Diverses équations dans l'espace	332
26.3.4 Formule d'Al-Kashi	333
26.3.5 CAPES interne 1992, A-3	333
26.3.6 CAPES interne 2000, Deuxième partie	333
27 Géométrie affine euclidienne 3D	335
27.1 Géométrie affine 3D	335
27.1.1 Sous-espaces affines en dimension 3	335
27.1.2 Applications affines	338

27.1.3	Barycentres	338
27.2	Géométrie euclidienne 3D	338
27.2.1	Calculs de distances et d'angles	338
27.2.2	Isométries de l'espace	339
27.3	Exercices commentés	340
27.3.1	CAPES 2022-1-Partie III	340
27.3.2	Exemples d'applications affines	340
27.3.3	Tétraèdre	341
27.3.4	CAPES 2021-C	341
28	Courbes planes	343
28.1	Courbes paramétrées	343
28.2	Droites et cercles	344
28.2.1	Droites	344
28.2.2	Cercles	345
28.2.3	Coniques	346
28.2.4	Exercices commentés	349
	Liste des leçons de l'oral 1	351
	Table des figures	353
	Bibliographie	357
	Index	359