ECG

MATHS APPROFONDIES

L'ORAL À HEC-ESCP

- 230 exercices
- Indications et solutions détaillées
- Compléments en Python

Conforme au nouveau format de l'oral de l'ESCP

Guillaume Bignon
Christophe Fiszka

ellipses

Révisions en algèbre linéaire

✦ Exercice 1 — Endomorphisme nilpotent

Soit φ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\varphi^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $\varphi^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$. Calculer le rang de φ.

≫ Solution p.29

✦ Exercice 2 — d'après l'oral ESCP 2022

Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini, pour tout $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par :

$$\varphi(\mathrm{M}) = {}^t\mathrm{M}.$$

Déterminer la trace d'une matrice représentative de φ.

≫ Solution p.30

✦ Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique polynôme Q tel que

$$x^n = \mathrm{Q}(x+1) + x\mathrm{Q}''(x).$$

≫ Solution p.31

✦✦ Exercice 4 — d'après l'oral ESCP 2011

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ ne sont pas supplémentaires. A-t-on $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Im}\, f$ ou $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$?

≫ Solution p.31

✦✦ Exercice 5 — d'après l'oral HEC 2006

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$ tel que P' divise P.

1. Montrer que, si $\deg \mathrm{P} > 1$, P'' divise P'.

2. En déduire tous les polynômes de $\mathbb{R}[x]$ divisible par leur polynôme dérivé.

≫ Solution p.32

✦✦ ♬ Exercice 6 — d'après l'oral HEC 2012

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Établir l'existence d'un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P(A) = 0_n$.

2. On suppose que la matrice A est inversible. Montrer que A^{-1} s'écrit comme un polynôme en A.

≫ Solution p.32

✦✦ ♬ Exercice 7 — Matrices nilpotentes

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Soit une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente, c'est-à-dire il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que M^k est la matrice nulle. Dans ce cas, l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente M est le plus petit entier strictement positif k tel que M^k est la matrice nulle.

1. Justifier que l'indice de nilpotence de M est inférieur à n.

2. Si M est une matrice, que teste la commande `np.sum(abs(M))` ?

3. En déduire un programme qui prend en argument une matrice carrée, teste si la matrice est nilpotente et renvoie son indice de nilpotence si c'est bien le cas.

≫ Solution p.33

✦✦ Exercice 8 — d'après l'oral ESCP 2021

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pose

$$C(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

1. Vérifier rapidement que C(A) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer :

$$\max_{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \dim C(A) \quad \text{et} \quad \min_{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \dim C(A).$$

≫ Solution p.35

✦✦ Exercice 9 — d'après l'oral HEC 2009

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$. On suppose que u est de rang 1.

1. Montrer qu'il existe un nombre λ réel tel que $u^2 = \lambda u$.
2. Montrer que si $\lambda \neq 1$, $u - \mathrm{id}_E$ est bijective et déterminer son application réciproque.

≫ Solution p.36

✦✦ Exercice 10 — d'après l'oral ESCP 2021

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$ et

$$f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M - \mathrm{Tr}(M)A.$$

À quelles conditions sur A l'application f est-elle bijective ?

≫ Solution p.36

✦✦ ♫ Exercice 11 — d'après l'oral HEC 2014

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle telle que $M^2 = 0$. Montrer que M est semblable à la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

≫ Solution p.37

✦✦ Exercice 12 — d'après l'oral HEC 2008

1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'application $x \mapsto (1+x)^{1/2}$ admet un développement limité d'ordre p au voisinage de 0.
   On note $P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ la partie régulière de ce développement limité.
2. Montrer que $P^2 - x - 1$ est divisible par x^{p+1}.

3. 🔑 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire :

$$\exists\, k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{A}^k = 0.$$

Montrer que l'équation $\mathrm{B}^2 = \mathrm{I}_n + \mathrm{A}$ d'inconnue $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet au moins une solution.

≫ Solution p.38

✦✦ Exercice 13 — d'après l'oral HEC 2011

Dans cet exercice E désigne un espace vectoriel et p, n sont deux entiers strictement positifs.

1. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E et x un vecteur de E. Caractériser, en le justifiant, le fait que la famille $(e_1, \ldots, e_p, x)$ soit liée.

2. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E supposés non tous nuls. On note

$$\mathcal{A} = \left\{ \mathrm{J} \subset [\![1; n]\!] \;\middle|\; (x_i)_{i \in \mathrm{J}} \text{ libre } \right\}.$$

Soit J_0 un élément de $\mathcal{A}$ de cardinal maximal.
Que peut-on dire de $(x_i)_{i \in \mathrm{J}_0}$ vis-à-vis de $\mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$?

≫ Solution p.38

✦✦ ♬ Exercice 14 — d'après l'oral HEC 2015

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. Établir l'existence d'un polynôme P non nul tel que $\mathrm{P}(f) = 0$.

2. Prouver qu'il existe un unique polynôme annulateur de f de degré minimal et de coefficient dominant égal à 1. Montrer que toutes ses racines sont valeurs propres de f.

3. 🔑 Si on ne suppose plus E de dimension finie, tout endomorphisme admet-il un polynôme annulateur ?

≫ Solution p.39

✦✦ Exercice 15 — Polynômes et python

Soit P un polynôme pouvant s'écrire comme un produit de polynômes de degré 1.

1. Prouver que P' est soit constant soit peut s'écrire comme un produit de polynômes de degré 1.
2. Écrire une fonction Python `ordre(P,a)` permettant de renvoyer l'ordre de multiplicité de la racine a de P, lorsqu'un polynôme P et un réel a sont rentrés en argument (on renvoie 0 si a n'est pas racine). On suppose pour cela disposer d'une fonction déjà codée `deriv()` renvoyant les coefficients du polynôme Q' (mis sous forme de matrice ligne) lorsque la matrice ligne des coefficients de Q est rentrée en argument.

≫ Solution p.40

✦✦✦ Exercice 16

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $r \in [\![1, n]\!]$ et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la dimension du noyau de M pour que M soit semblable à une matrice ayant au moins r colonnes égales.

≫ Solution p.41

✦✦✦ Exercice 17

d'après l'oral HEC 2015

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. On note

$$A = \left\{(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2 \mid u \circ v = 0\right\}.$$

Déterminer $\sup\limits_{(u,v)\in A} (\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v))$.

≫ Solution p.42

✦✦✦ Exercice 18

d'après l'oral HEC 2011

Soit E l'espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles. Soit Φ l'endomorphisme de E qui, à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, associe la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_{n+1} - u_n.$$

1. Déterminer les noyaux de Φ, de $\Phi \circ \Phi$ et de Φ^k pour $k \geqslant 3$ et leurs dimensions respectives.
2. Quelle est l'image de Φ ?

≫ Solution p.42

✦✦✦ Exercice 19 d'après l'oral HEC 2014

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que $f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ est un projecteur.

2. Quelles sont les valeurs propres de f ?

3. Combien existe-t-il de droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par f ?

4. Combien existe-t-il de plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f ?

≫ Solution p.44

Indications

Exercice 1 p.6

Justifier que φ est de rang 2 en montrant dans un premier temps la liberté de $\big(\varphi(x), \varphi^2(x)\big)$ pour un vecteur x tel que $\varphi^2(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$.

Exercice 2 p.6

Si on note respectivement $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituées des matrices symétriques et antisymétriques, vérifier que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Expliciter la matrice dans une base adaptée à cette décomposition.

Exercice 3 p.6

Introduire l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$

$$\varphi : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(x+1) + x\mathrm{P}''(x).$$

Vérifier que c'est un isomorphisme.

Exercice 4 p.6

La réponse est positive dans le cas particulier de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, montrer d'abord que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ possèdent un vecteur non nul commun.

Exercice 5 p.6

1. Dériver la relation $\mathrm{P}'\mathrm{Q} = \mathrm{P}$ et vérifier que Q' est constant.

Exercice 6 p.7

1. Que dire de la liberté de la famille

$$(\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2, \dots, \mathrm{A}^{n^2}) \ ?$$

2. Distinguer deux cas : si $\mathrm{P}(0) \neq 0$ et $\mathrm{P}(0) = 0$. Dans le second cas, P s'écrit sous la forme $\mathrm{P}(x) = x^m \mathrm{Q}(x)$ avec $\mathrm{Q}(0) \neq 0$.

Exercice 7 p.7

1. Soit φ, l'endomorphisme canoniquement associé à M. Justifier la liberté de la famille

$$\mathcal{F}_x = \Big(x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{p-1}(x)\Big)$$

où $\varphi^{p-1}(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$.

Exercice 8 — p.7

2. Pour le minimum, essayer une matrice nilpotente simple.
Pour le maximum, tester avec I_n.

Exercice 9 — p.8

2. Chercher une application réciproque sous la forme $\alpha u + \beta \, \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ où α, β sont des réels à déterminer.

Exercice 10 — p.8

Justifier que f est bijective si et seulement si la trace de A est différente de 1.

Exercice 11 — p.8

Établir dans un premier temps que le noyau de M est de dimension 2.
Considérer un endomorphisme associé et chercher une base (e_1, e_2, e_3) tel que e_1, $e_2 \in \mathrm{Ker}(u)$ et $u(e_3) = e_2$.

Exercice 12 — p.8

3. Essayer avec $\mathrm{B} = \mathrm{P}(\mathrm{A})$.

Exercice 14 — p.9

3. Montrer par l'absurde que l'endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty$, $u : f \mapsto f'$ n'admet pas de polynôme annulateur non nul.

Exercice 15 — p.9

1. Noter les racines de P dans l'ordre croissant et utiliser le théorème de Rolle.
2. Si a est racine de multiplicité r de P, que dire de la multiplicité de a pour P′ ?

Exercice 16 — p.10

Prouver que la condition est

$$\dim\Big(\mathrm{Ker}(\mathrm{M})\Big) \geqslant r - 1.$$

Exercice 17 — p.10

On trouve une borne supérieure qui vaut n. Pour cela, commencer par traduire l'égalité $u \circ v$ en termes d'inclusion de noyau de u et d'image de v.

Diagonalisation

✦ Exercice 20

Justifier que si φ est un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E de dimension finie, son noyau et son image sont supplémentaires dans E.

≫ Solution p.45

✦ Exercice 21

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$, $\mathrm{B}^2 = \mathrm{B}$ et $\operatorname{Tr} \mathrm{A} = \operatorname{Tr} \mathrm{B}$. Montrer que A est semblable à B.

≫ Solution p.46

✦ Exercice 22

1. Parmi les matrices élémentaires constituant la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, préciser les matrices diagonalisables.
2. Exhiber une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices diagonalisables.

≫ Solution p.46

✦✦ Exercice 23

Soient F et G, les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$\mathrm{F} = \operatorname{Vect}\{(1,-1,1)\} \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y=0\right\}.$$

1. Expliciter un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau et l'image sont respectivement F et G.
2. Peut-on le choisir diagonalisable ?

≫ Solution p.47