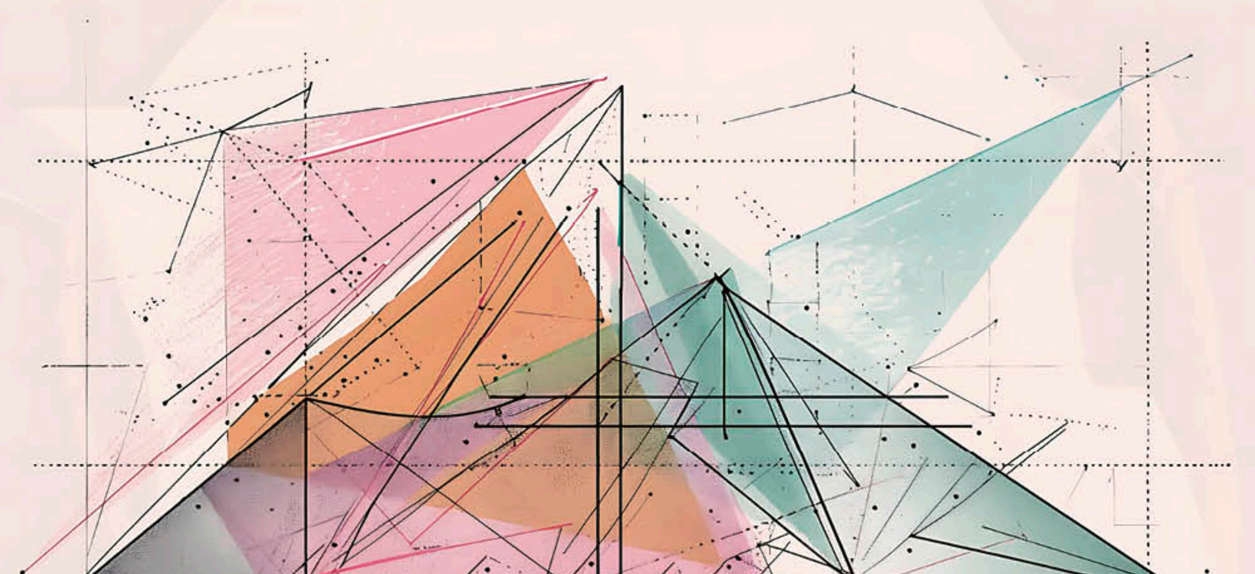
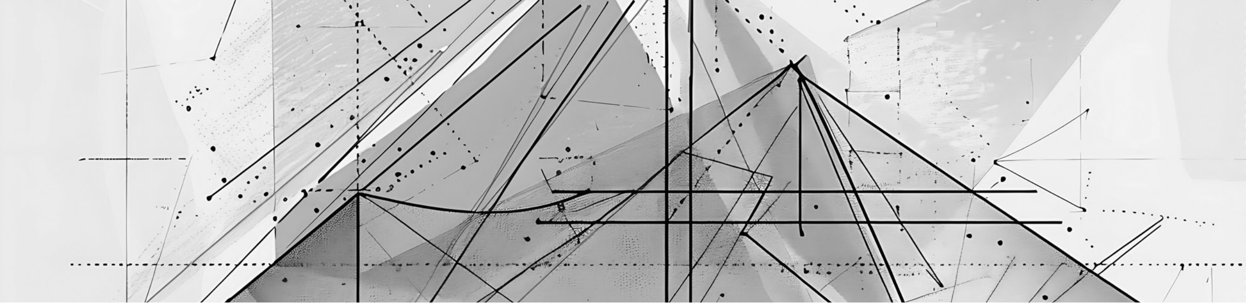
Introduction à l'épistémologie des mathématiques

Que sait-on quand on connaît le théorème de Pythagore ?

Olivier Fouquet



ellipses



Chapitre 1

Dans un triangle rectangle

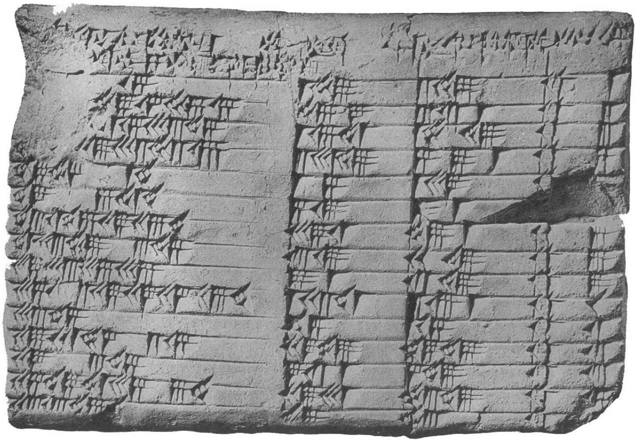
Le trois-cent-vingt-deuxième item de la collection George Arthur Plimpton de l'Université de Columbia à New York est une tablette babylonienne d'argile cuite gravée de symboles cunéiformes transcrivant du suméro-akkadien. Elle a été datée d'environ 1800 ans avant l'Ère Commune, ce qui la rend mille ans plus vieille que la date supposée de la composition de l'*Iliade* et l'*Odyssée* et à peu près contemporaine du célèbre trilithe de Stonehenge. Cette tablette, qui mesure 13 cm de large et 8 cm de haut, comporte 4 colonnes de 15 lignes définissant 60 cases contenant chacune un nombre écrit en base sexagésimale. Sur la première ligne, on peut lire les nombres qui dans notre système décimal s'écriraient 119 et 169. Sur la onzième ligne, on lit les nombres 45 et 75. Or

$$45^2 + 60^2 = 75^2 \text{ et } 119^2 + 120^2 = 169^2.$$

1.1 Le carré de l'hypoténuse

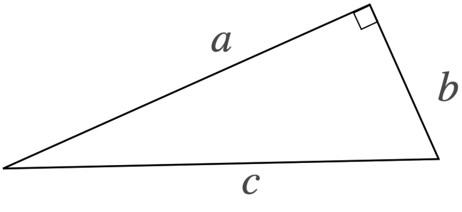
Théorème 1. *Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.*

D'où vient la fascination que provoque l'énoncé du théorème de Pythagore ? Peut-être de la poésie de termes. Qu'est-ce que cette hypoténuse ? Et d'ailleurs l'ai-je bien orthographiée en la mettant au féminin ? Peut-être est-ce simplement l'impact du système scolaire. Celui-ci aurait gravé cette



phrase dans nos cerveaux de pré-adolescents en la distinguant explicitement, et généralement pour la première fois parmi tous les énoncés du cours de mathématiques, du nom de théorème. Ainsi des décennies plus tard, c'est souvent le seul théorème que la plupart des gens peuvent citer spontanément (et Pythagore un des mathématiciens les plus connus du grand public, bien qu'il n'y ait aucune trace d'une activité mathématique de sa part au sens où nous l'entendons aujourd'hui). Peut-être est-ce plutôt l'effet de son charme intrinsèque, un je-ne-sais quoi de mystérieux que nous pouvons tous ressentir, au moins confusément. L'étrange.

Car il y a une surprise dans le théorème de Pythagore. Il relie deux propriétés qu'un univers semble séparer. D'une part, une propriété purement géométrique : le fait qu'un des angles d'un triangle soit un angle droit.



D'autre part, une propriété purement algébrique : le fait que, si l'on désigne par a et b les longueurs des deux petits côtés et par c celle de l'hypoténuse, alors

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Quel secret est caché dans les angles droits, ou d'ailleurs dans l'égalité $a^2 + b^2 = c^2$, qui force un triangle de côtés de longueur $3, 4$ et 5 (ou de côtés $40, 42$ et 58) à être un triangle rectangle ?

La lectrice attentive aura remarqué que lorsque l'on affirme que l'égalité

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \text{ ou } 40^2 + 42^2 = 58^2$$

implique que les triangles de côtés de longueurs $(3, 4, 5)$ ou $(40, 42, 58)$ sont rectangles, c'est la *réciproque* du théorème de Pythagore que l'on utilise. Celle-ci énonce que si, dans un triangle, la somme des carrés des deux petits côtés est égale au carré du plus grand côté, alors ce triangle est rectangle. Même si l'on admet que le théorème de Pythagore est vrai, il n'est pas évident que cette assertion le soit également.

Est-ce cette relation mystérieuse entre les nombres - dont il voulait faire l'essence du cosmos - et les figures géométriques qui inspira Pythagore, dont la légende rapporte qu'il fit un sacrifice aux dieux lorsqu'il découvrit le théorème qui porte désormais son nom (ou peut-être quand il découvrit sa démonstration), il y a environ 2500 ans ?

Attardons-nous sur cette légende. Plutarque fait référence au Ier siècle avant l'Ère Commune à un épigramme d'un certain Apollodore - mais il y eut beaucoup d'Apollodore - qui affirme que Pythagore accomplit “un célèbre sacrifice de bœufs” lorsqu'il “découvrit cette glorieuse figure”. Ce poème, à supposer même qu'il soit authentique et véridique, ne suffit pas à conclure que Pythagore a offert un sacrifice à l'occasion de la découverte de la *preuve* du théorème : l'énoncé, tel qu'il est reformulé dans la section suivante, suffirait sans doute à parler de “glorieuse figure”. Par ailleurs, d'autres témoignages plus crédibles sur la secte des Pythagoriciens s'accordent pour dire qu'ils rejetaient les sacrifices d'animaux. Que la légende ait un fond de vérité ou non, elle a inspiré un sonnet amusant au botaniste franco-allemand Adelbert von Chamisso, dont le premier tercet affirme que

Die Ochsen, seit dem Tage, wenn sie wittern
Dass ein neue Wahrheit sich enthülle
Erheben ein unmenschliches Gebrülle.

Ce qui signifie :

Les bœufs, depuis ce jour, lorsqu'ils sentent
Qu'une nouvelle vérité se révèle
Poussent des rugissements inhumains.

Les bœufs ou *les idiots*, selon le terme que l'on choisira pour la traduction.

1.2 Est égal à la somme des carrés

Il ne peut y avoir de commencement d'étude mathématique du théorème de Pythagore que si celui-ci est bel et bien vrai. Depuis l'invention du raisonnement déductif géométrique en Grèce il y a environ 2500 ans, le critère mathématique du vrai est la capacité à produire une démonstration, et c'est donc à condition que l'on puisse présenter une démonstration que l'assertion de Pythagore - peut-être déjà implicite sur la tablette Plimpton 322 - pourra prétendre être un théorème.

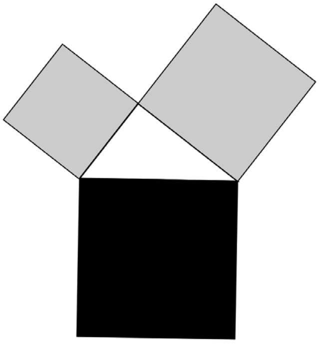
Dans cette section, je présente six telles preuves ; six preuves que je juge de nature nettement distincte. La lectrice qui est convaincue de la véracité du théorème de Pythagore ou qui ne ressent pas la nécessité d'en lire des démonstrations peut passer directement à la section suivante ou ne lire parmi les six que celles qui l'intéressent, quitte à revenir consulter les autres ultérieurement si nécessaire. Inversement, je parierais que même une lectrice experte du sujet trouvera matière à être intriguée par au moins l'une des quatre dernières preuves.

Tout d'abord, redonnons l'énoncé du théorème, en éliminant l'ambiguïté sur la signification des termes *carré de l'hypoténuse* et *carrés des deux autres côtés.*

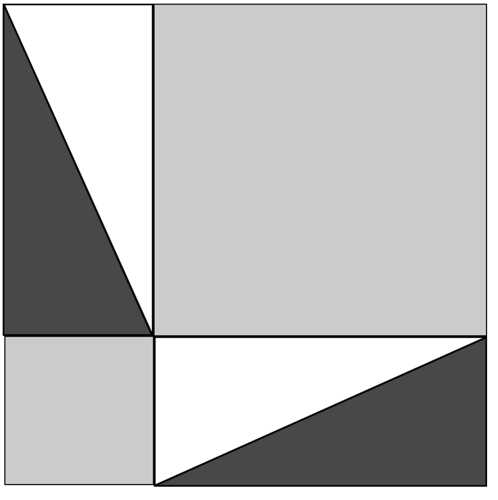
Théorème 1. *Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur du côté opposé à l'angle droit est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.*

Cette reformulation perd en concision, et peut-être aussi en poésie, mais elle a l'avantage de permettre une traduction purement géométrique de l'énoncé, comme illustré sur la figure ci-dessous. Le carré d'une longueur, donc la quantité qui intervient dans l'énoncé du théorème, s'interprète en effet non seulement arithmétiquement comme un nombre mais aussi géométriquement comme une aire, à savoir *l'aire* d'un carré construit sur un segment de cette longueur. On comprend ainsi que le théorème de Pythagore est l'énoncé que la somme des aires des deux petits carrés gris est égale à l'aire du grand carré noir.

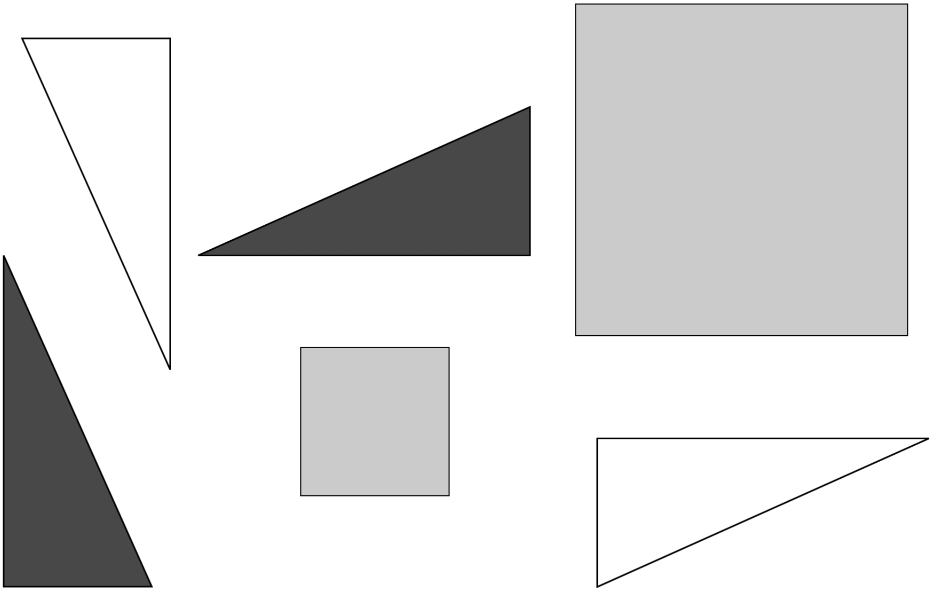
Démonstration. Nous utilisons l'interprétation géométrique du théorème de Pythagore comme relation sur les aires. Cette première preuve repose sur notre capacité à nous représenter visuellement les figures (une fois bien maîtrisée, on peut en suivre les grandes étapes en se dispensant tout à fait de mots).



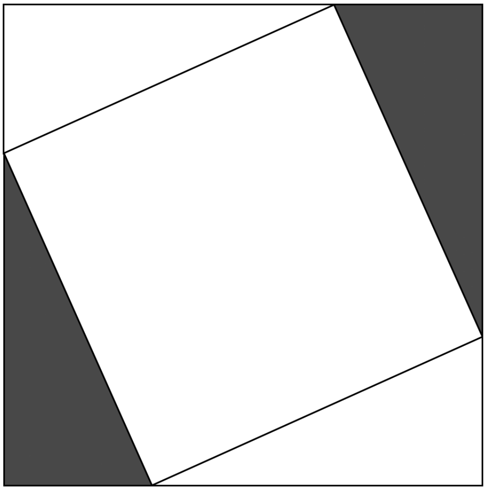
Tout commence par un grand carré subdivisé en six figures géométriques comme ci-dessous : deux plus petits carrés inégaux de couleur grise et deux eux-mêmes divisés en deux selon leurs diagonales en quatre triangles rectangles identiques (deux blancs, deux foncés). On peut bien affirmer que ces quatre triangles rectangles sont identiques car ils ont chacun un côté de l'angle droit de la longueur du côté du grand carré grisé et un côté de l'angle droit de la longueur du côté du petit carré grisé.



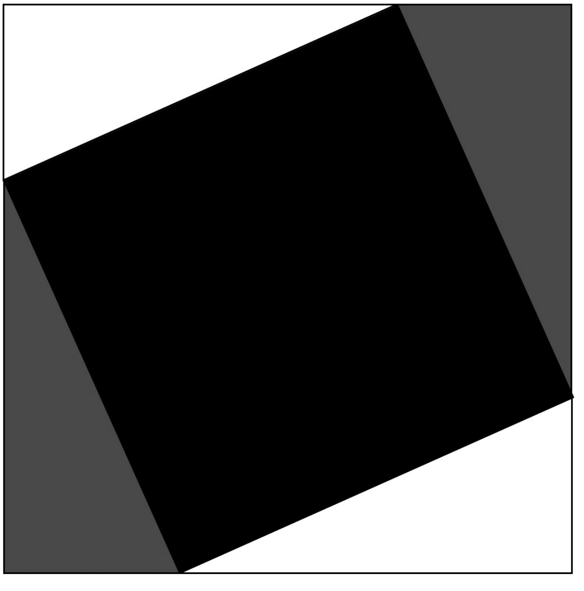
Ensuite, on éparpille ces 6 pièces façon puzzle pour obtenir six figures géométriques : quatre triangles rectangles identiques et deux carrés.



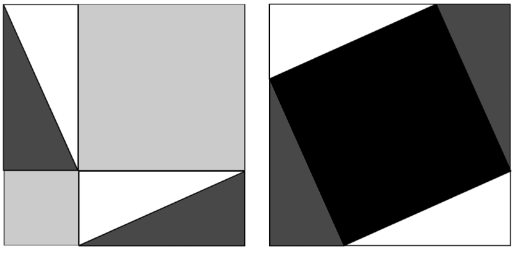
On rassemble les quatre triangles en alignant le grand côté d'un triangle foncé avec le petit côté d'un triangle blanc d'un côté et le grand côté d'un triangle blanc avec le petit côté d'un triangle foncé de l'autre côté. Ceci forme un quadrilatère dont tous les angels sont droits car ce sont les quatre angles droits de nos quatre triangles rectangles. De plus, chaque côté du quadrilatère est formé d'un grand côté et d'un petit côté de nos quatre triangles rectangles. Ils sont donc tous de la même longueur. Nous avons donc formé un nouveau grand carré identique à notre premier grand carré de départ.



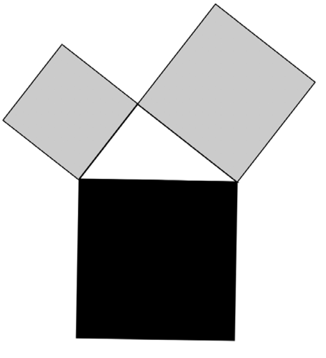
Au centre de ce grand carré se trouve un quadrilatère dont chaque côté est de la longueur commune des hypoténuses de nos triangles rectangles. Par symétrie de la figure, les côtés opposés de ce quadrilatère central (coloré en noir dans la figure ci-dessous) est sont parallèles. Ce quadrilatère est donc un carré.



Si on compare notre nouvelle figure avec notre figure initiale, on constate que les deux sont des carrés de même taille et donc de mêmes aires contenant l'un et l'autre quatre triangles rectangles identiques. Dans notre figure initiale, il y a de plus deux carrés gris. Dans notre figure finale, il y a de plus un grand carré noir.



Si on enlève les éléments communs des deux figures, il reste les deux carrés gris d'un côté et le carré noir de l'autre. Enlever des éléments identiques d'un côté et de l'autre préserve l'égalité des aires. Ceci signifie que la somme des aires des deux carrés est égale à l'aire du carré noir.



Cette dernière assertion est exactement l'énoncé du théorème de Pythagoire, qui est donc démontré. $\square$

Cette preuve a-t-elle emporté la conviction de la lectrice ? Quoi qu'il en soit, voici une deuxième preuve.

Démonstration. Considérons la figure suivante, formée à partir d'un triangle rectangle et de la hauteur passant par le sommet de l'angle droit, c'est-à-