



Histoire et épistémologie

2^e édition

LA CONSTRUCTION DES NOMBRES

Claude-Paul Bruter



Table des matières

| | |
|--------------------|---|
| Avant-propos | 3 |
|--------------------|---|

CHAPITRE 1. UNE ACTIVITÉ FONDATRICE DES MATHÉMATIQUES : LA REPRÉSENTATION..... 15

| | |
|---|----|
| I.1 Le défi majeur..... | 15 |
| I.2 La représentation : une activité fondamentale de l'être vivant | 16 |
| I.3 Le nombre en tant que représentation..... | 20 |
| I.4 Conséquences de la conception spatiale du nombre | 24 |

CHAPITRE 2. LES NOMBRES NATURELS 31

| | |
|---|----|
| II.1 Aperçu historique | 31 |
| II.2 Construction des entiers naturels par extension | 37 |
| II.3 Premiers commentaires sur cette construction | 38 |
| II. 4 Quelques aspects fonctionnels et sémantiques du nombre naturel..... | 39 |
| II.5 Présence des moyennes pythagoriciennes..... | 42 |
| II.6 Une classe de problèmes modernes issus de la sémantique géométrique des pythagoriciens..... | 48 |
| II.7 Autour de la divisibilité | 52 |

CHAPITRE 3. LES NOMBRES ENTIERS 61

| | |
|---|----|
| III.1 Faisons le point..... | 61 |
| III.2 Le poids du symbole dans la représentation..... | 62 |
| III.3 Construction des entiers par extension fonctionnelle..... | 66 |
| III.4 Construction des entiers par symétrie | 67 |
| III.5 Les entiers en tant que couples d'entiers naturels | 69 |
| III.6 Commentaire sur la démarche précédente : classer | 70 |
| III.7 Le statut des nombres entiers..... | 72 |
| III.8 Comparaison des procédés de construction..... | 85 |

CHAPITRE 4. LES NOMBRES RATIONNELS 87

| | |
|---|----|
| IV.1 Aperçu historique | 87 |
| IV.2 Introduction à la notion de transformation : la multiplication et le point de vue dynamique | 91 |

| | |
|---|------------|
| IV.3 Construction des rationnels par extension fonctionnelle et ensembliste..... | 95 |
| IV.4 Représentations numériques des rationnels | 97 |
| IV. 5 Diviser... pour (essayer de) régner | 99 |
| CHAPITRE 5. DES NOMBRES IRRATIONNELS À L'INFINI..... | 105 |
| V.1 Définitions numérique et algébrique des nombres irrationnels et réels | 105 |
| V.2 Aperçu historique..... | 107 |
| V.3 Les nombres et l'infinité mathématique..... | 127 |
| V.4 Un concept structurel : l'ordre | 133 |
| V.5 Quelques aspects de l'évolution des mathématiques | 143 |
| V.6 La sémantique du nombre réel..... | 148 |
| CHAPITRE 6. INTERMÈDE | 161 |
| CHAPITRE 7. LES NOMBRES DITS COMPLEXES..... | 167 |
| VII.1 Premiers pas : les nombres étranges de Chuquet-Cardan | 167 |
| VII.2 L'extension de la multiplication et les logarithmes..... | 170 |
| VII.3 Le rôle joué par la prise en compte des objets en mouvement : la trigonométrie | 172 |
| VII.4 Une controverse utile..... | 176 |
| VII.5 Quand les fruits finissent par mûrir | 187 |
| VII.6 Les nombres de Chuquet-Cardan : le point de vue algébrique | 194 |
| VII.7 Les représentations géométriques des nombres de Chuquet..... | 203 |
| VII.8. Interprétations dynamiques des nombres de Chuquet..... | 207 |
| VII.9 Conclusion..... | 213 |
| CHAPITRE 8. COMPLÉMENTS SUR LES ESPACES VECTORIELS | 215 |
| VIII.1 Multiplication de deux vecteurs en tant qu'homothétie : l'espace vectoriel pour les dilatations | 215 |
| VIII.2 Espaces vectoriels en tant que n-corps angulaire et n-corps de similitude..... | 217 |
| VIII.3 Le théorème fondamental de l'algèbre | 220 |
| CHAPITRE 9. QUELQUES EXTENSIONS..... | 225 |
| IX.1 Généralités..... | 225 |
| IX.2 La théorie de Galois et ses prolongements | 227 |

| | |
|--|------------|
| IX.3 Généralités sur les travaux de l'école anglaise | 233 |
| IX.4 Hamilton et la structure des espaces vectoriels | 234 |
| IX.5 Produits classiques de deux vecteurs : produit extérieur, produit vectoriel, produit scalaire, produit tensoriel : les apports de Grassmann | 237 |
| IX.6 Les quaternions ou nombres de Hamilton | 242 |
| IX.7 Les octonions | 250 |
| IX.8 Les ensembles de nombres précédents en tant qu'algèbres..... | 250 |
| IX.9 Les algèbres (des nombres) de Clifford | 252 |
| CHAPITRE 10. CONCLUSION : QU'EST-CE QU'UN NOMBRE ? | 255 |
| Bibliographie sommaire | 265 |
| Index terminologique | 271 |
| Index des noms propres..... | 273 |