Oraux corrigés et commentés

Concours PSI

Maths

- Mines-Ponts
- Mines-Télécom
- Centrale-Supélec
- ENSEA
- CCINP

Sujets types

ellipses

Éric Cassam-Chenai
Walter Damin

Chapitre n° 1

Algèbre générale

Mines-Ponts

PLANCHE 01

Enoncé

Trouver le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré minimal dont le reste dans la division euclidienne par $X^2 + X + 1$ vaut $X - 1$ et dont le reste dans la division euclidienne par $(X - 1)^2$ vaut $2 - X$.

Correction de la planche 01

Décryptage et indications

Il s'agit ici d'un exercice sur la division euclidienne des polynômes. Cet exercice peut dérouter car il fait appel au programme de première année. On attend du candidat qu'il ait une logique dans sa démarche et qu'il ne se perde pas dans les calculs. On doit d'abord s'intéresser au degré de P. Il est clair que P doit être de degré au moins égal à 2. Par ailleurs, il serait maladroit de poser deux divisions euclidiennes sans connaître ni les coefficients, ni le degré de P. L'idée est de remarquer que si un tel polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ existe, il existe aussi deux polynômes $(Q, Z) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que

$$P = (X^2 + X + 1)Q + X - 1 = (X - 1)^2 Z + 2 - X.$$

Il ne faut surtout pas tenter de déterminer Q et Z. Un dernier coup de pouce en cas de manque d'inspiration : On pourra remplacer X par les racines de $X^2 + X + 1$ et de $(X - 1)^2$. Cela permet de se débarrasser des polynômes Q et Z.

Commentaires

Le rapport du jury de Mines-Ponts note des difficultés dans la résolution de problèmes portant sur l'algèbre générale (nombres complexes, polynômes, fractions rationnelles). Donc cette partie du programme est vraiment à bachoter.

On remarque donc que si un tel polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ existe, il existe aussi deux polynômes $(Q, Z) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P = (X^2 + X + 1)Q + X - 1 = (X - 1)^2 Z + 2 - X$.

Donc, en partant de la seconde égalité, $P' = 2(X - 1)Z + (X - 1)^2 Z' - 1$.

Comme les racines de $X^2 + X + 1$ sont j et $j^2 = \bar{j}$, on en déduit que :

$$P(j) = j - 1,\ P(1) = 1,\ P'(1) = -1.$$

La relation $P(\bar{j}) = \bar{j} - 1$ n'apporte rien de plus car P est un polynôme réel. Il reste à chercher P en l'écrivant sous forme de puissances décroissantes.

- Commençons par un polynôme de degré 2. Posons, avec $(b, c, d) \in \mathbb{R}^3$: $P = bX^2 + cX + d$.

On a le système : $\left\{\begin{array}{rcl} bj^2 + cj + d & = & j - 1 \\ b + c + d & = & 1 \\ 2b + c & = & -1 \end{array}\right.$.

En remplaçant j^2 par $-j - 1$ dans la première égalité, elle devient :

$$-b + d + 1 + j(-b + c - 1) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -b + d + 1 & = & 0 \\ -b + c - 1 & = & 0 \end{array}\right.,$$

sachant que b, c et d sont réels et $\{1, j\}$ est libre dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$. On a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -b + d + 1 & = & 0 \\ -b + c - 1 & = & 0 \\ b + c + d & = & 1 \\ 2b + c & = & -1 \end{array}\right..$$

Ce système est impossible. En effet, si on note L_i la $i^{\text{ème}}$ ligne du système, alors $L_1 + L_2 + L_4$ donne $d + 2c = -1$ et $2L_3 - L_4$ donne $c + 2d = 3$. On en déduit que $c = -5/3$ et $d = 7/3$.
En remplaçant dans L_3, on obtient $b = 1/3$. Et on vérifie que L_1 ne fonctionne pas.
De toute façon, l'énoncé dit que l'on cherche le polynôme de degré minimal. Il est donc censé être unique et le système ci-dessus ne peut pas avoir une solution unique.
Il faut pousser le degré de P.

- Continuons avec un polynôme de degré 3. Posons (avec a, b, c et d réels) :

$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d.$$

On a le système : $\left\{\begin{array}{rcl} aj^3 + bj^2 + cj + d & = & j - 1 \\ a + b + c + d & = & 1 \\ 3a + 2b + c & = & -1 \end{array}\right.$. Or $j^3 = 1$ et $j^2 = -j - 1$.

On peut transformer la première égalité, sachant que a, b, c et d sont réels :

$$a - b + d + 1 + j(-b + c - 1) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a - b + d + 1 & = & 0 \\ -b + c - 1 & = & 0 \end{array}\right..$$

On a alors le système : $\begin{cases} a-b+d+1 &= 0 \\ -b+c-1 &= 0 \\ a+b+c+d &= 1 \\ 3a+2b+c &= -1 \end{cases}$.

Après calculs (laissés au lecteur), on trouve : $a=-1$, $b=\frac{1}{3}$, $c=\frac{4}{3}$, $d=\frac{1}{3}$.

On obtient donc un seul polynôme de degré 3 répondant à la question.

Comme $a \neq 0$, 3 est bien le degré minimal. On peut conclure.

$$P = -X^3 + \frac{1}{3}X^2 + \frac{4}{3}X + \frac{1}{3}.$$

Commentaires

Comme les relations $P(j) = j-1$, $P(1) = 1$, $P'(1) = -1$ donnent en fait quatre égalités car P est réel et $P(j) = j-1$ donne deux égalités en passant aus réels, il est logique de penser que P est de degré 3 car un tel polynôme a quatre coefficients. Si P est de degré supérieur, il y a plus d'inconnues que d'équations.
Il ne peut pas y avoir alors un polynôme unique et la question posée est alors incohérente car on cherche bien un seul polynôme.

PLANCHE 02

Enoncé

Calculer pour tout $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k}(-3)^k$.

Correction de la planche 02

Décryptage et indications

Cet exercice est typiquement l'exercice posé dans le dernier quart-d'heure de l'oral. Il est à la frontière de l'analyse générale et de l'algèbre générale. On l'a mis dans l'algèbre car on va passer dans $\mathbb{C}$. Ici on a le calcul d'une somme. Il faut réflechir un peu et si vous vous êtes déjà entraîné à calculer certaines sommes (par exemple $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\binom{n}{2k}$), vous aurez une idée pour démarrer. Plus précisément, la difficulté est de retrouver le développement du binôme de Newton. Il faut transformer $(-3)^k$ en puissance de $2k$ ou de $n-2k$. Pensez à un complexe dont le carré est -3.

Posons pour tout $n \geqslant 2$, la somme à calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-3)^k$.

Posons aussi z un complexe tel que $z^2 = -3$.
On voit rapidement que z prend deux valeurs qui sont $-i\sqrt{3}$ et $i\sqrt{3}$. On écrit alors :

$$S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \left(z^2\right)^k = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} z^{2k}.$$

Avec la formule du binôme de Newton, pour tout $n \geqslant 2$, on peut écrire :

$$\begin{cases} (1+z)^n & = & \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z^p 1^{n-p} & = & \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z^p \\ (1-z)^n & = & \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (-z)^p 1^{n-p} & = & \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (-1)^p z^p \end{cases}.$$

On somme ces deux dernières égalités, en notant $A_n = \{p \in [\![0, n]\!] \text{ et } p \text{ pair }\}$.

$$(1+z)^n + (1-z)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \left[1^p + (-1)^p\right] z^p = 2 \sum_{p \in A_n} \binom{n}{p} z^p = 2S_n.$$

On en déduit que pour tout $n \geqslant 2$,

$$S_n = \frac{(1+z)^n + (1-z)^n}{2} = \frac{1}{2}\left[(1+z)^n + (1-z)^n\right].$$

On remplace maintenant z par $i\sqrt{3}$, ce qui donne :

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\left(1+i\sqrt{3}\right)^n + \left(1-i\sqrt{3}\right)^n\right].$$

Or : $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
On en déduit que S_n vaut :

$$\frac{1}{2}\left[2^n\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + 2^n\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right] = \frac{2^n}{2}\left[\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n + \left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^n\right].$$

Et on peut écrire : $2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}n\right) = e^{in\frac{\pi}{3}} + e^{-in\frac{\pi}{3}}$.

On en déduit : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-3)^k = 2^{n-1} \times 2\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) = 2^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$.

Commentaires

Ce type d'exercice que l'on vient de faire est assez parlant dans un oral. Il est clair que le candidat attend d'être aidé pour démarrer. Toute la question est : le candidat va t-il utiliser comme il faut ce coup de pouce ? C'est ce qui fera la différence entre une bonne note (même si la candidat n'a pas démarré seul) et une bien plus mauvaise.

Mines-Telecom

PLANCHE 03

Enoncé

On suppose $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} z^k$.

Q1. Trouver les racines de P.

Q2. Montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \left|1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right| = n$.

Q3. Montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Correction de la planche 03

Décryptage et indications

Cette planche rappelle la planche 05 posée à Centrale. Elles se ressemblent mais cette planche posée à Mines-Telecom et aussi à l'ENSEA est plus « light ».
Pour **Q1**, on pourra utiliser la formule qui donne la somme partielle de termes d'une suite géométrique.
Pour **Q2**, on écrit P sous sa forme factorisée et on écrit $P(1)$ de deux manières.
Pour **Q3**, on transforme $1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ en utilisant une certaine formule (que vous connaissez tous) de ce cher Leonhard Euler.

Q1. Si $z \neq 1$, $P(z) = \frac{1 - z^n}{1 - z}$.

Commentaires

Il faut penser à écarter $z = 1$ de l'ensemble des solutions éventuelles.
En effet, ici $P(1) = n \neq 0$.

On a les équivalences : $P(z)=0 \Leftrightarrow z^n=1 \Leftrightarrow z \in \left\{z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}},\, k \in [\![1, n-1]\!]\right\}$.
On a ainsi $n-1$ solutions distinctes.

Q2. Comme P est unitaire, on peut écrire : $P(z) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(z - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$. Remplaçons z par 1 et prenons le module de chaque côté.

$$P(1) = n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) \Rightarrow n = \prod_{k=1}^{n-1}\left|1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right|.$$

Q3. On transforme $1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ a l'aide de la technique de l'arc moitié.

$$1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{-i\frac{k\pi}{n}} - 1 - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right) = -2i \times e^{i\frac{k\pi}{n}} \times \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

On passe encore aux modules.

$$n = \prod_{k=1}^{n-1}\left|1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right| = \prod_{k=1}^{n-1}\left|2ie^{i\frac{k\pi}{n}}.\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left|\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|.$$

Comme $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \geqslant 0$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a bien : $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

PLANCHE 04

Enoncé

Soit $P \in \mathbb{C}_4[X]$ de la forme

$$P = X^4 - \alpha X^3 + \beta X^2 - 16.$$

Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tels que P admette une racine triple.

Correction de la planche 04

Décryptage et indications

Cet exercice peut se faire dès la première année après avoir vu les polynômes et les nombres complexes. On écrira $P = (X-a)^3(X-b)$, où a est la racine triple (inconnue) et b la racine forcément simple (inconnue). On développe et on identifie à P avec la forme de l'énoncé. On en déduit les valeurs possibles de α, β et en prime les deux racines. L'ensemble est un peu calculatoire il faut l'avouer mais maîtriser des calculs c'est aussi cela qu'on juge au concours.

On commence donc par développer $P = (X-a)^3(X-b)$, où a est la racine triple (inconnue) et b la racine forcèment simple (inconnue).

On obtient d'abord : $P = (X^3 - 3aX^2 + 3a^2X - a^3)(X-b)$. Puis un dernier développement donne :

$$P = X^4 - (3a+b)X^3 + (3a^2+3ab)X^2 - (a^3+3a^2b)X + a^3b.$$

On sait que deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients pour chaque degré sont égaux. On a alors le système :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 3a+b & = & \alpha \\ 3a(a+b) & = & \beta \\ a^2(a+3b) & = & 0 \\ a^3b & = & -16 \end{array} \right. .$$

L'équation la plus intéressante pour démarrer est $a^2(a+3b) = 0$. Si $a^2 = 0$ alors $0 = -16$, d'après la dernière ligne du système, c'est impossible , donc $a = -3b$.

Il reste le système : $\left\{ \begin{array}{ccc} -8b & = & \alpha \\ -9b(-2b) & = & \beta \\ a & = & -3b \\ -27b^4 & = & -16 \end{array} \right.$. La dernière équation donne : $b^4 = \dfrac{16}{27}$.

Comme $b \in \mathbb{C}$, il y a quatre solutions : $b = \left(\dfrac{16}{27}\right)^{\frac{1}{4}} e^{ik\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{3^{\frac{3}{4}}} e^{ik\frac{\pi}{2}}$ avec $k \in [\![0,3]\!]$.

Passons aux valeurs de a. On a ; $a = -3b = -2 \times 3^{\frac{1}{4}} e^{ik\frac{\pi}{2}}$ avec $k \in [\![0,3]\!]$.

Puis passons aux valeurs de α : $\alpha = -8b = -\dfrac{2^4}{3^{\frac{3}{4}}} e^{ik\frac{\pi}{2}}$ avec $k \in [\![0,3]\!]$.

Et enfin, les valeurs de β. On a : $\beta = 18b^2 = 2^2 \times 3^{\frac{5}{4}} e^{ik\frac{\pi}{2}}$ avec $k \in [\![0,3]\!]$.

Commentaires

On aurait aussi pu partir de $P(a) = P'(a) = P''(a) = 0$ et $P^{(3)}(a) \neq 0$ avec a inconnue. C'est trop compliqué car on a trois équations de degré respectivement $4, 3$ et 2.

Centrale-Supelec

PLANCHE 05

Enoncé

Q1. a étant un réel fixé, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z+1)^n = e^{2ina}$ et en déduire une factorisation de $P(X) = (X+1)^n - e^{2ina}$.

Q2. En déduire, à l'aide de $P(0)$, la valeur de $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$.

Correction de la planche 05

Décryptage et indications

Cet exercice est encore typiquement un exercice sur le programme de première année et il peut faire mal au candidat qui n'aura réviser que les standards de deuxième année (séries , diagonalisation etc.) Citons un extrait su rapport de jury de Centrale-Supelec : « Rappelons une évidence : il faut réviser l'ensemble du programme et pas seulement celui de deuxième année, le mieux étant naturellement un travail régulier tout au long du cycle préparatoire. »
Et quoi de mieux que par exemple commencer les planches d'Oraux de ce livre non pas en Mai ou Juin de la deuxième année mais dès la première année et notamment pour ceux d'algèbre générale ou d'analyse générale.
Il s'agit ici plus précisement d'un exercice d'Algèbre sur les polynômes et sur l'ensemble des nombres complexes. Notamment, on aura besoin de quelques outils bien connus des complexes, les formules d'Euler par exemple ou alors le calcul de puissances de i.

Pour **Q1**, vous avez sûrement remarqué que les solutions de l'équation (E) sont les n racines complexes de P.
Pour **Q2**, on demande un calcul d'un produit. Il est clair que $P(0)$ s'écrit de deux manières, la première en remplaçant dans l'expression de P dans l'énoncé et la deuxième en utilisant la factorisation de P, déterminée à la question précédente.
L'expression $A = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$ apparaîtra dans l'expression de $P(0)$ issue de l'expression de P sous forme de facteurs irréductibles. Il faudra ensuite savoir simplifier certains produits ou puissances.

Q1. Commençons par la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) : $(z+1)^n = e^{2ina}$.