Le programme thème par thème

Tle

Spé

MATHS

Apprendre à lire et déchiffrer les mathématiques

Sous la direction de :
Yan Pradeau

ellipses

1
Méthode générale

1.1. Le premier jour

La rencontre avec un nouvel outil mathématique est un processus complexe et comporte six moments :

1. La rencontre proprement dite, le premier jour où, souvent par une activité d'introduction, on vous présente un nouveau chapitre.
2. L'exploration et l'émergence des techniques.
3. La construction théorique des techniques. Le cours tel qu'on l'entend.
4. L'institutionnalisation [1].
5. Travail et répétition des techniques, entraînement.
6. Évaluation.

Ces moments ne se suivent pas forcément, encore moins dans cet ordre, mais ils constituent une trame classique que l'on retrouve dans l'essentiel des chapitres du manuel et dans leur enseignement. Au collège, ces six moments se réalisent en cours et durant le temps scolaire, cela est particulièrement vérifiable chez les élèves n'ayant aucune difficulté. En seconde, cela devient périlleux – une partie du travail devra être fait en autonomie et chez soi –, en première spécialité maths, ça n'est plus possible.

1. J'entends par là le moment où le professeur commente le cours, le détaille, souvent à l'oral, donne à ses élèves les « trucs et astuces » du professionnel, mais aussi les annotations en marge des copies, le rappel des notions anciennes qu'il faut savoir et maîtriser et sur lesquelles on ne reviendra pas… Hélas, les lycéens, prennent peu, voire jamais ces commentaires en notes, ce qui est dommageable.

1.2. Le « mal-travail »

Vous refusez de vous y mettre ou vous vous acharnez, sans résultats probants, vous n'y arrivez pas. Voici ce que nous appelons le *mal-travail.* Les situations de « blocage » sont épineuses. Intersection de trajectoires personnelles autant que scolaire, circonstancielles autant que structurelles et sociales. En didactique, nous parlerons volontiers d'« obstacles épistémologiques ». Regardons de plus près les caractéristiques d'un obstacle épistémologique :

- → **L'intériorité**. Conceptions et mises en forme personnelles d'un savoir que l'on retrouve en chacun de nous, élève et professeur, un réseau d'images qui nous appartient en propre. C'est la manière dont vous voyez le sujet que l'on vous présente.
- → **La facilité**. Disons-le autrement, la sécurité. Image naïve, bien qu'erronée, parfois intuitive de considérer l'objet nouveau. « L'obstacle est donc d'abord une facilité que l'esprit s'octroie ».
- → **La positivité**. Ça n'est pas l'absence de savoirs qui empêche l'acquisition, mais la présence de savoirs préexistants, personnels et solidement installés en nos fors intérieurs. Les **intériorités** des savoirs précédents.
- → **L'ambiguïté**. C'est de supposer l'existence d'une présence, un obstacle, un blocage et d'émettre l'hypothèse d'un dépassement possible. Ce franchissement est-il seulement désiré ? Quelque part vous vous attendez à ne pas y arriver.
- → **La récursivité**. L'obstacle existe et prend forme consciente dès lors qu'il est franchi. Il n'apparaît que dans le regard rétrospectif. C'est alors dans les structures de contrôle que se trouvent les moyens de ce passage.

1.3. Apprendre ou comprendre ?

Qui ne s'est jamais posé la question : « À quoi ça sert d'apprendre, si je ne comprends pas ? »

La première approche – apprendre – est une démarche *active* elle suppose de la part d'un élève qu'il s'inscrive, avec son corps, dans l'apprentissage [2], qu'il fournisse l'énergie nécessaire pour ce faire. Alors que « comprendre » c'est bien,

2. Notez l'étymologie commune entre ces deux mots.

c'est un plus, dont nombre d'entre nous aimeraient bien être capables. Quelque chose d'aussi courant que l'idée de « nombre », simple d'emploi, est une notion complexe et répondre à la question : « Qu'est-ce qu'un nombre ? » est une œuvre à part entière. Cela n'empêche personne de calculer et plutôt deux fois qu'une. « Comprendre » est un luxe offert à qui « apprend », et si « apprendre » permet de « comprendre », mettre cette dernière revendication comme obligatoire relève plus d'une stratégie d'évitement et de mauvaise foi.

Une lecture rapide du chapitre permet d'affirmer que l'on « comprend », comme dire je comprends le film, mais apprendre suppose de se confronter au test et relève d'une action. C'est aussi une question de niveau et de *timing*. Comprendre peut s'entendre lors d'un cours, alors qu'apprendre intervient au moment de se remémorer, lors d'un contrôle.

Vous ne pouvez pas comprendre si vous n'apprenez rien.

Enfin, le « ou » mathématique est inclusif. Apprendre OU comprendre, permet d'apprendre ET comprendre.

1.4. Apprendre, quand et comment ?

Son cours, d'accord ! Mais quand et comment ? Car il n'est rien de pire pour un élève que de passer des heures à apprendre le cours et n'en rien sortir le jour du contrôle.

1.4.1. Comment ?

Les quatre appuis

Selon le psychologue spécialisé en neuropsychologie Stanislas Dehaene [3], l'apprentissage repose sur *quatre appuis* :

3. Ses travaux portent notamment sur les représentations mathématiques. Certains sont en ligne sur le site du Collège de France.

1. L'attention :
   → Le questionnement durant le cours
   → La prise de note
   → La disponibilité.
2. L'engagement actif :
   → Faire
   → Expérimenter
   → Questionner
   → Refaire sans corrigés
   → Se rappeler le cours avant de le lire, anticiper
   → Faire des fiches.
3. Retour de l'information :
   → Corrigés détaillés
   → Commentaires
   → Bilan des erreurs
   → Diagnostic.
4. Renforcement :
   → Sommeil
   → Répétition.

Les cinq piliers

Les *cinq piliers* d'un bon apprentissage sont :

1. Qu'est-ce ?

   Ce sont des vecteurs, des règles d'algèbre, un cours sur les droites, de la géométrie… bref, en vrac et avec des mots simples, savoir de « quoi » ça parle. Tout comme l'on peut décrire un film par son style avant d'envisager de le résumer. Ensuite, la mémorisation des définitions, formules et propriétés du cours.

   Ici dessins et représentations graphiques viennent en support, car ils valent souvent mieux qu'un long discours dit-on, à juste titre. À main levée ou avec un logiciel, comment s'illustre la définition de fonction croissante ?

2. D'où ça vient ?

   Chaque année, les professeurs de mathématiques revoient leurs « progressions » c'est-à-dire de quelle manière ils vont enchaîner les chapitres. En effet, l'ordre n'est pas neutre. Que l'on panache en alternant thème d'algèbre avec géométrie, cela ne change rien à la question que l'on pose toujours : De quels outils ai-je besoin avant d'aborder cette notion ? Cette question pour l'élève est un point important, situer dans quel sens un théorème intervient, d'où vient-il et où va-t-il ? Aide à comprendre, à donner du sens à ce que l'on apprend.

3. À quoi ça sert ?

   Question similaire à la précédente, mais plus précise, à quoi ça sert très concrètement (sous-entendu en mathématique et pas ailleurs) ? Les vecteurs servent à montrer que des droites sont parallèles… La factorisation sert à étudier le signe d'une expression algébrique… La fréquence en statistique introduit la notion de probabilités…

4. Comment s'en sert-on ?

   Dans cet ouvrage, les exercices sont corrigés, il y a les méthodes à connaître.

5. Quels points communs avec d'autres chapitres ?

   Laissez flotter votre imagination, bâtissez des ponts, l'addition de nombres réels est commutative, tout comme celle des vecteurs… Quand on multiplie deux entiers, cela reste un entier, peut-on procéder de la même manière avec des vecteurs ?

La fiche de cours

Qu'on les appelle fiche de cours, fiche à bulle ou carte mentale, fiche de révision avec les réponses au verso, qu'on les réalise à la main ou sur ordinateur, le principe reste le même : participer de manière active à son apprentissage.

Prendre le temps de résumer son cours en fiche, parce qu'il faut se poser la question : Ai-je besoin de savoir ça ? Voire, de réaliser une anti-sèche, autrement dit un ultra résumé sur un ticket de métro. Comment procède-t-on ?

Vous pouvez, à titre d'exercice pratique, mettre les points évoqués par Stanislas Dehaene en fiche ou en carte mentale.

Mettre son cours en fiche est important en soi, c'est-à-dire que l'activité est aussi, voire plus, importante que le résultat, car la mémoire est reconstructive. Ça n'est pas en relisant son cours qu'on l'apprend, mais en fournissant un effort pour s'en souvenir. Et la mémoire est un outil substantiel de la compréhension. C'est là que l'association entre le cours et les exercices prend son sens. En mathématiques, si le cours peut s'apprendre comme une poésie, ça n'est pas pour le réciter, mais pour se doter d'un catalogue conséquent. Pensez au plombier qui intervient en urgence sur un dégât des eaux, que sait-il du problème qu'il va devoir résoudre ? Rien ou si peu, il n'a pour lui que ses outils et son expérience. Et s'il venait à ne pas avoir la bonne clé ? Le bon tuyau ?…

Et pour finir sur ce point, voici un exemple personnel de carte mentale portant sur le chapitre des vecteurs que l'on construit à l'aide des *cinq piliers* :

1. Qu'est-ce ?

   Ce sont des vecteurs, un outil de géométrie. Ici on fait un dessin. Un vecteur se caractérise par trois idées : sens, direction et norme. On fait bien attention au fait que dans la langue française, « sens » et « direction » sont des synonymes, pas en maths. On peut s'imaginer ça comme une ligne de métro, que l'on peut prendre dans un sens ou l'autre…

2. D'où ça vient ?

   C'est en relation avec les parallélogrammes et les translations (les « glissements »).

3. À quoi ça sert ?

   À montrer que 3 points sont alignés, que deux droites sont parallèles, qu'un point est le milieu d'un segment ou le centre de gravité d'un triangle, qu'un quadrilatère est un parallélogramme…

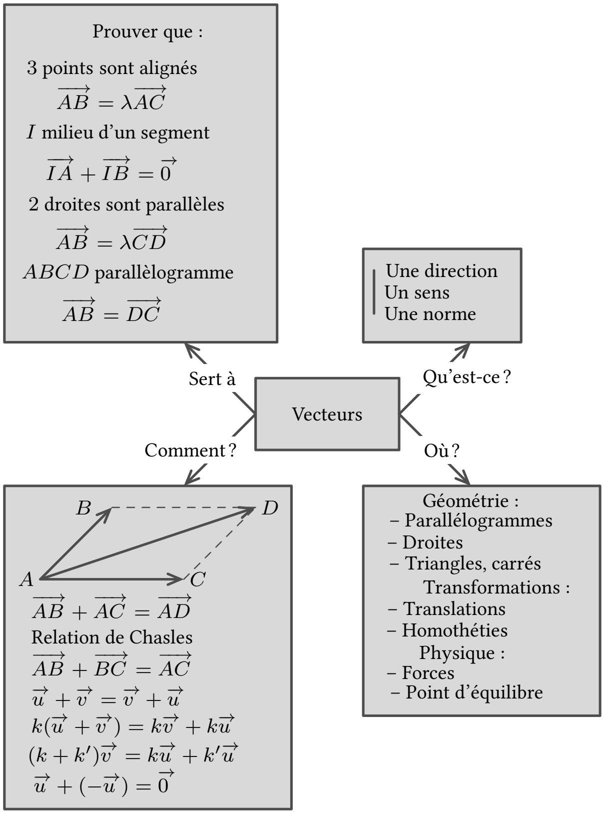
4. Comment s'en sert-on ?

   Les règles algébriques de manipulation des vecteurs ressemblent beaucoup à celles que l'on peut voir en algèbre, addition, multiplication et factorisation par un nombre, développement…

5. Quels points communs avec d'autres chapitres ?

   Géométrie pour commencer, transformations du plan, translation et homothétie, donc théorème de Thalès, mais aussi en physique, position d'un solide en équilibre…

Voici ce que ça donne :



1.4.2. *Quand ?*

L'apprentissage s'améliore avec la répétition [4], sans elle, on oublie vite et plus le savoir à retenir paraît dénué de sens à l'apprenant, plus l'oubli est rapide. Évidemment, la capacité à retenir est propre à chacun de nous, certains sont plus doués que d'autres. Il n'en demeure pas moins des « évidences » :

$\rightarrow$ Le taux de mémorisation réel dépend du nombre d'apprentissages.

$\rightarrow$ Une répétition espacée fixe l'apprentissage.

$\rightarrow$ Le sur-apprentissage lutte contre l'oubli.

4. Hypothèse sur le déclin de rétention de la mémoire formulée en 1885 par le philosophe allemand Hermann Ebbinghaus (1850-1909).

→ Fatigue, manque de sommeil et d'attention sont des ennemis de la mémoire.

Voici un graphique, la « courbe de la mémoire », laquelle explique l'hypothèse formulée par Ebbinghaus, ses effets et les solutions pour y remédier.

La courbe représente (en pourcentage) l'oubli du cours qui, si l'on n'y revient pas vite, on peut le voir est rapide. La deuxième montre ce qu'il se passe lors de la première révision, et ainsi de suite avec les graphiques suivants. L'échelle de temps est relative, il n'est pas dit quand intervient le travail de mémorisation, on pose que le plus tôt est le mieux [5] :

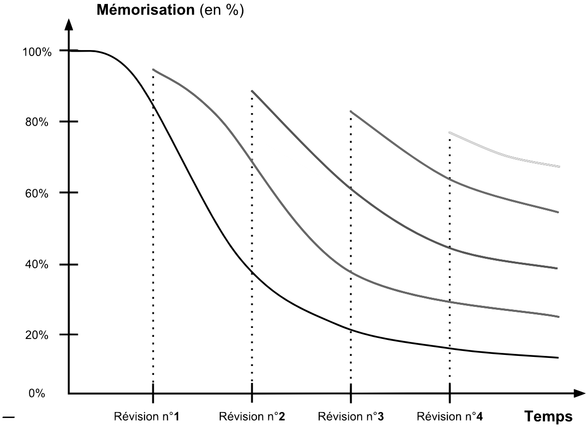


FIGURE 1.1. –

Pour aider le lecteur dans son apprentissage, chaque section se termine sur le tableau suivant à cocher soi-même :

Tableau d'apprentissage et courbe de mémoire

Début de la leçon le :					
	$J+1$	$J+3$	$J+10$	$J+30$	$J+90$
Vu					

5. Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Courbe_de_l'oubli