# ANNALES SPÉCIALITÉ MATHS

## Tle générale

ellipses

# ANNALE 1
# POLYNÉSIE 1 (mai 2022)

## Exercice 1-1 QCM : Fonction logarithme ; primitive ; convexité ; suites ; algorithmique ........................................7 pts

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.*
*Pour chacune des six questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.*
*Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

**1.** On considère la fonction $g$ définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x^2 + x + 1)$$

Pour tout nombre réel $x$ strictement positif :

**a.** $g'(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ **b.** $g'(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$

**c.** $g'(x) = \ln(2x+1)$ **d.** $g'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

**2.** La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ admet pour primitive sur $]0\,;\,+\infty[$ la fonction :

**a.** $x \longmapsto \ln(x)$ **b.** $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ **c.** $x \longmapsto x\ln(x) - x$ **d.** $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

**3.** On considère la suite $(a_n)$ définie pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$ par :

$$a_n = \frac{1 - 3^n}{1 + 2^n}$$

La limite de la suite $(a_n)$ est égale à :

**a.** $-\infty$ **b.** $-1$ **c.** $1$ **d.** $+\infty$

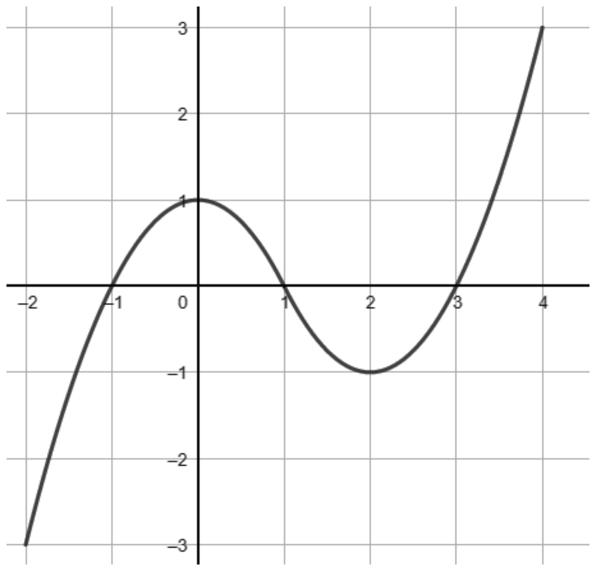
**4.** On considère une fonction $f$ définie et dérivable sur $[-2; 2]$.
Le tableau de variations de la **fonction $f'$ dérivée** de la fonction $f$ sur l'intervalle $[-2; 2]$ est donné par :

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| variations de $f'$ | $1$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $-1$ |

La fonction $f$ est :

**a.** convexe sur $[-2\,;-1]$.
**b.** concave sur $[0\,;1]$.
**c.** convexe sur $[-1\,;2]$.
**d.** concave sur $[-2\,;0]$.

**5.** On donne ci-dessous la courbe représentative de la **dérivée $f'$** d'une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[-2\,;4]$.




Par lecture graphique de la courbe de $f'$, déterminer l'affirmation correcte pour $f$ :
**a.** $f$ est décroissante sur $[0\,;2]$.
**b.** $f$ est décroissante sur $[-1\,;0]$.
**c.** $f$ admet un maximum en 1 sur $[0\,;2]$.
**d.** $f$ admet un maximum en 3 sur $[2\,;4]$.

**6.** Une action est cotée à 57 euros. Sa valeur augmente de 3 % tous les mois.

La fonction Python **`seuil()`** qui renvoie le nombre de mois à attendre pour que sa valeur dépasse 200 euros est :

**a.**
```
def seuil() :
   m=0
   v=57
   while v < 200 :
        m=m+1
        v=v*1.03
   return m
```

**b.**
```
def seuil() :
    m=0
    v=57
    while v > 200 :
         m=m+1
         v=v*1.03
    return m
```

**c.**
```
def seuil() :
   v=57
   for i in range(200) :
           v=v*1.03
   return v
```

**d.**
```
def seuil() :
   m=0
   v=57
   if v < 200 :
        m=m+1
   else :
        v=v*1.03
   return m
```

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1-1 QCM

**1. Réponse d**

Pour tout $x \in ]0\,;\,+\infty[$ ,

$$g(x) = \ln(x^2 + x + 1) = \ln\big(u(x)\big) \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} u(x) = x^2 + x + 1 \\ u'(x) = 2x + 1 \end{cases}$$

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

**2. Réponse c**

Pour tout $x \in ]0\,;\,+\infty[$ ,

$$\begin{aligned}(x\ln(x) - x)' &= x' \times \ln(x) + x \times (\ln(x))' - x' = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)\end{aligned}$$

**3. Réponse a**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1-3^n}{1+2^n} = \dfrac{3^n\left(\frac{1}{3^n} - 1\right)}{2^n\left(\frac{1}{2^n} + 1\right)} = \dfrac{3^n}{2^n} \times \dfrac{\frac{1}{3^n} - 1}{\frac{1}{2^n} + 1} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \times \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$

$$-1 < \frac{1}{3} < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \quad \xrightarrow{-1} \quad \lim_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right] = 0 - 1 = -1$$

$$-1 < \frac{1}{2} < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \xrightarrow{+1} \quad \lim_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right] = 0 + 1 = 1$$

Par quotient, $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = \frac{-1}{1} = -1$

$$\frac{3}{2} > 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$$

Par produit, $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$

**4. Réponse d**

La fonction $f'$ est strictement décroissante sur $[-2\,;0]$, donc la fonction $f$ est concave sur $[-2\,;0]$.

**5. Réponse c**

Sur $[0\,;2]$, $f'$ est strictement positive sur $[0\,;1[$, strictement négative sur $]1\,;2]$, et s'annule en 1. Donc la fonction $f$ est strictement croissante sur $[0\,;1[$, strictement décroissante sur $]1\,;2]$, et admet un maximum en 1 sur $[0\,;2]$.

**Remarque : représentation graphique de la fonction $f$ à la calculatrice**

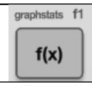
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'$ s'annule pour $x = \pm 1$ et pour $x = 3$. On en déduit que :

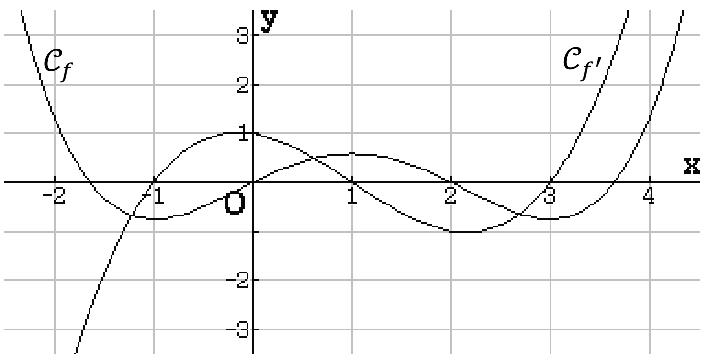
$$f'(x) = (x^2 - 1)\left(\frac{1}{3}x - 1\right) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{3}x + 1$$

Donc il existe une constante réelle $k$ telle que :

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + x + k$$

À l'aide de la calculatrice, on peut tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction $f$, en choisissant par exemple la constante $k = 0$ :

| Casio *fx-CG10/20 Manager Plus* | *TI-83 Premium CE* |
|---|---|
| Menu Graph |  |
| Graph Func :Y=<br>Y1 $\frac{x^3}{3}-x^2-\frac{x}{3}+1$<br>Y2 $\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{6}+x$ | Graph1 Graph2 Graph3<br>Y1 $\frac{X^3}{3}-X^2-\frac{X}{3}+1$<br>Y2 $\frac{X^4}{12}-\frac{X^3}{3}-\frac{X^2}{6}+X$ |
| SHIFT F3 : V-Vindow |  |
| View Window<br>Xmin :-2.5<br>max :4.5<br>scale:1<br>dot :0.01851851<br>Ymin :-3.5<br>max :3.5<br>scale:1 | FENÊTRE<br>Xmin=-2.5<br>Xmax=4.5<br>Xgrad=1<br>Ymin=-3.5<br>Ymax=3.5<br>Ygrad=1 |
| $\boxed{\text{DRAW}}$ |  |



**6. Réponse a**

Soit $v_n$ la valeur en euros de l'action au $n$-ième mois.
On a $v_0 = 57$ et $v_{n+1} = 1{,}03v_n$.
La fonction python **`seuil()`** renvoie le plus petit entier naturel $n$ tel que
$$v_n \geq 200.$$

**Remarque : détermination du plus petit entier naturel $\boldsymbol{n}$ tel que $\boldsymbol{v_n \geq 200}$**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 1{,}03^n = 57 \times 1{,}03^n$

$$v_n \geq 200$$

$$57 \times 1{,}03^n \geq 200$$

$$1{,}03^n \geq \frac{200}{57} > 0$$

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

$$\ln(1{,}03^n) \geq \ln\left(\frac{200}{57}\right)$$

$$n\ln(1{,}03) \geq \ln\left(\frac{200}{57}\right)$$

$1{,}03 > 1$. En divisant par $\ln(1{,}03) > 0$, on obtient :

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{200}{57}\right)}{\ln(1{,}03)} \approx 42{,}47$$

Donc $n \geq 43$. Il faut attendre 43 mois pour que la valeur de l'action dépasse 200 euros.

**Vérification (facultative) :**

$$v_{42} = 57 \times 1{,}03^{42} \approx 197{,}26\text{ €} < 200\text{ €}$$

$$v_{43} = 57 \times 1{,}03^{43} \approx 203{,}18\text{ €} > 200\text{ €}$$

$$v_{42} < 200 < v_{43}$$

## Exercice 1-2 : Probabilités.....................................................................7 pts

Selon les autorités sanitaires d'un pays, 7 % des habitants sont affectés par une certaine maladie.

Dans ce pays, un test est mis au point pour détecter cette maladie.

Ce test a les caractéristiques suivantes :

- pour les individus malades, le test donne un résultat négatif dans 20 % des cas ;
- pour les individus sains, le test donne un résultat positif dans 1 % des cas.

Une personne est choisie au hasard dans la population et testée.

On considère les évènements suivants :

- $M$ : « la personne est malade » ;
- $T$ : « le test est positif ».

**1.** Calculer la probabilité de l'évènement $M \cap T$.
On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

**2.** Démontrer que la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif, est de $0{,}0653$.

**3.** Dans un contexte de dépistage de la maladie, est-il plus pertinent de connaître $P_M(T)$ ou $P_T(M)$ ?

**4.** On considère dans cette question que la personne choisie au hasard a eu un test positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? On arrondira le résultat à $10^{-2}$ près.

**5.** On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On note $X$ la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.

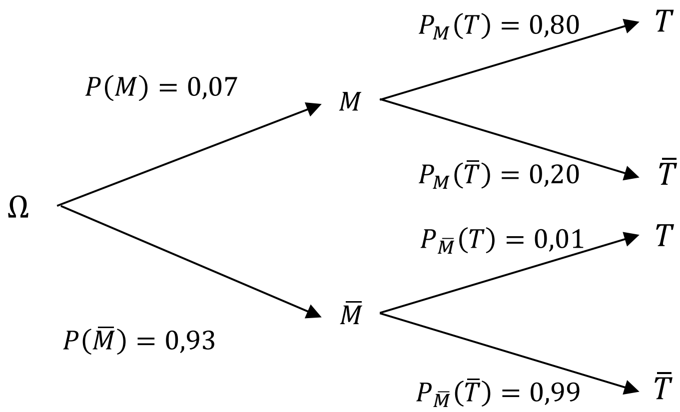
**a)** Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par $X$.

**b)** Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif. On arrondira le résultat à $10^{-2}$ près.

**6.** Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles ait un test positif, soit supérieure à 99 %.

# CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1-2

**1.** On représente la situation par un arbre pondéré :




La probabilité de l'évènement $M \cap T$ vaut :

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}07 \times 0{,}80 = 0{,}056$$

Il y a 5,6 % de chance pour que la personne choisie au hasard soit malade et que son test soit positif.

**2.** D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif vaut :

$$\begin{aligned} P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) &= P(M \cap T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) \\ &= 0{,}056 + 0{,}93 \times 0{,}01 = 0{,}0653 \end{aligned}$$

**3.** $P_M(T)$ est la probabilité que le test soit positif sachant que la personne est malade.

$P_T(M)$ est la probabilité que la personne soit malade sachant que son test est positif.

Dans un contexte de dépistage de la maladie, il est plus pertinent de connaître $P_T(M)$.

**4.** Sachant que la personne choisie au hasard a eu un test positif, la probabilité qu'elle soit malade vaut :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}056}{0{,}0653} = \frac{560}{653} \approx 0{,}86$$