Annales
corrigées et commentées

Concours 2022 / 2023/ 2024 **BCPST**

3e édition

Maths

Agro-Véto
G2E
ENS

Copies d'étudiants corrigées

ellipses

Maxime Bailleul
Vincent Devinck

Sujet Agro-Véto 2022

MATHÉMATIQUES

MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT

Durée : 2 heures 30 minutes

L'utilisation d'abaques, de calculatrices et de tout instrument électronique susceptible de permettre au candidat d'accéder à des données et de les traiter par les moyens autres que ceux fournis dans le sujet est interdit.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce sujet est constitué de deux exercices totalement indépendants.

Exercice 1.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant n boules indiscernables numérotées de 1 à n.

On tire au hasard une boule et on la retire ainsi que toutes les boules ayant un numéro supérieur à celui de la boule tirée. On réitère l'expérience jusqu'à ce que l'urne soit vide et l'on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages réalisés pour vider l'urne.

Pour tout entier i, on pourra noter N_i la variable aléatoire égale au numéro de la i^{e} boule tirée s'il y a eu au moins i tirages, et 0 sinon.

1. Trouver la loi de X_2 puis donner son espérance et sa variance.
2. Trouver la loi de X_3 et donner son espérance.
3. Donner l'ensemble des valeurs que peut prendre X_n.
4. Déterminer $\mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\mathbb{P}(X_n = n)$.
5. Prouver que pour tout $k \geq 2$, on a :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}(X_{i-1} = k - 1)$$

6. En déduire que $\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = \dfrac{1}{n+1}$.
7. En déduire une expression de $\mathbb{E}(X_n)$ sous forme d'une somme.
8. (a) Prouver que pour tout entier $k \geq 2$, on a : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

   (c) En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
9. Trouver une relation entre $\mathbb{E}(X_{n+1}^2)$, $\mathbb{E}(X_n^2)$ et $\mathbb{E}(X_n)$.
10. En déduire une expression de $\mathbb{V}(X_n)$ sous forme de somme puis un équivalent de $\mathbb{V}(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2.

I. Étude d'une équation différentielle homogène avec condition aux bords

Soit λ un réel.

1. Donner, en fonction de λ, l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + \lambda y = 0$.
   On fera une distinction de cas suivant le signe de λ.
2. Déterminer, en fonction de λ, l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + \lambda y = 0$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.
   On fera une distinction de cas suivant le signe de λ.

II. Étude d'une discrétisation de l'équation différentielle homogène

Dans cette partie, on étudie une discrétisation de l'équation différentielle avec conditions aux bords étudiée à la question précédente. Pour cela, on fixe un entier N supérieur ou égal à deux et une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, on pose $x_k = f(k/N)$.

Pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, $f''(k/N)$ est approximé par :

$$\frac{\frac{x_{k+1}-x_k}{1/N} - \frac{x_k - x_{k-1}}{1/N}}{1/N} = \frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{1/N^2}.$$

On se ramène ainsi à chercher des réels $x_0, \ldots, x_N$ tels que :

$$(*) \qquad : \qquad x_0 = x_N = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, N-1]\!], \ \frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{1/N^2} + \lambda x_k = 0.$$

On note Λ l'ensemble des réels λ tels qu'il existe des réels $x_0, \ldots, x_N$ non tous nuls vérifiant $(*)$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer une matrice $M_{N-1,\lambda} \in \mathscr{M}_{N-1}(\mathbb{R})$ telle que des réels $x_0, \ldots, x_N$ vérifient $(*)$ si, et seulement si, le vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$ appartient au noyau de $M_{N-1,\lambda}$ et tels que $x_0 = x_N = 0$.

Pour tout entier n non nul, on considère la matrice :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

4. Déterminer une relation entre Λ et l'ensemble des valeurs propres de A_{N-1}.
5. Justifier que pour tout entier n non nul, la matrice A_n est diagonalisable et en déduire que la cardinal de Λ est inférieur ou égal à $N-1$.
6. Déterminer une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A_3 = PDP^{-1}$.
7. Prouver qu'un réel μ est valeur propre de A_{N-1} si, et seulement s'il existe une suite v non nulle vérifiant $v_0 = v_N = 0$ et, pour tout entier n, $v_{n+2} = \mu v_{n+1} - v_n$.
8. On fixe μ un réel et on considère une suite u telle que pour tout entier n, on ait $u_{n+2} = \mu u_{n+1} - u_n$.
   (a) On suppose que $|\mu| > 2$. Prouver que si $u_0 = u_N = 0$, alors u est la suite nulle.
   (b) On suppose que $|\mu| = 2$. Prouver que si $u_0 = u_N = 0$, alors u est la suite nulle.
   (c) On suppose que $|\mu| < 2$.
      i. Prouver que le polynôme $X^2 - \mu X + 1$ a ses racines conjuguées et de module 1.
      On les note $\mathrm{e}^{i\theta}$ et $\mathrm{e}^{-i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.
      ii. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur θ pour que μ soit valeur propre de A_{N-1}.
      iii. En déduire que A_{N-1} possède $N-1$ valeurs propres distinctes.
9. En déduire Λ.
10. Soit k un entier fixé. Trouver la limite de $\dfrac{2 - 2\cos(k\pi/N)}{1/N^2}$ lorsque N tend vers $+\infty$.

11. Relier ce résultat à celui obtenu à la question 2.

III. Étude d'une discrétisation de l'équation différentielle avec second membre

On considère un réel λ et b une fonction définie sur $[0,1]$ et l'on recherche les fonctions f solutions de l'équation différentielle $y'' + \lambda y = b$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.

On fixe un entier N supérieur ou égal à deux et, pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, on pose $b_k = b(k/N)$.

En discrétisant l'équation, on est ramené à chercher des réels $x_0, \dots, x_N$ tels que :

$$(*) \qquad : \qquad x_0 = x_N = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, N-1]\!], \ \frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{(1/N)^2} + \lambda x_k = b_k$$

ce qui se réécrit matriciellement :

$$(**) \qquad : \qquad x_0 = x_N = 0 \quad \text{et} \quad M_{N-1,\lambda} X = B, \ \text{en posant } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{N-1} \end{pmatrix}.$$

On admet que $M_{N-1,\lambda}$ a $N-1$ valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_{N-1}$ données par :

$$\forall k \in [\![1, N-1]\!], \qquad \mu_k = \lambda/N^2 - 2 + 2\cos(k\pi/N).$$

12. Prouver que si $\lambda < 0$, alors $(**)$ a une unique solution.

On considère la norme euclidienne usuelle sur $\mathscr{M}_{N-1,1}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices colonnes de taille $N-1$. Ainsi, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$, alors sa norme est égale à :

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{N-1}^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} x_k^2}.$$

Comme le produit matriciel $X^T X$ est égal à la matrice de taille 1×1 :

$$\left(x_1^2 + \cdots + x_{N-1}^2 = \sum_{k=1}^{N-1} x_k^2 \right),$$

on notera $\|X\|^2 = X^T X$, en identifiant le réel $\|X\|^2$ et la matrice $\big(\|X\|^2\big)$.

On suppose dans la suite que $\lambda < 0$ et on considère B et $\tilde{B}$ deux matrices de $\mathscr{M}_{N-1,1}(\mathbb{R})$. On note X et $\tilde{X}$ les matrices colonnes telles que $M_{N-1,\lambda} X = B$ et $M_{N-1,\lambda} \tilde{X} = \tilde{B}$.

13. Soit D une matrice diagonale de taille $N-1$ de coefficients diagonaux notés $d_1, \dots, d_{N-1}$. Exprimer $\|DX\|$ en fonction des coefficients de D et X.
14. Prouver que $\|B\| \leq -\mu_{N-1}\|X\|$.
15. Prouver que $\|X - \tilde{X}\| \leq -\dfrac{1}{\mu_1}\|B - \tilde{B}\|$.
16. On suppose que B n'est pas la matrice nulle.

    Justifier que l'on a l'inégalité (I) : $\dfrac{\|X - \tilde{X}\|}{\|X\|} \leq \dfrac{\mu_{N-1}}{\mu_1}\dfrac{\|B - \tilde{B}\|}{\|B\|}$.
17. Montrer que $\lim\limits_{N \to +\infty} \dfrac{\mu_{N-1}}{\mu_1} = +\infty$.
18. Prouver qu'il existe des matrices B et $\tilde{B}$ distinctes telles que (I) soit une égalité.
19. Quel problème numérique cela peut-il poser ?

FIN DU SUJET

Indications Agro-Véto 2022

Exercice 1.

Questions	Indications	Sup' ?
1.	Quel est l'univers image de X_2 ? La loi de X_2 est une loi usuelle.	✓
2.	Utiliser les variables aléatoires N_1, N_2 et N_3.	✓
3.	Quelles valeurs extrémales peut prendre la variable aléatoire X_n ?	✓
4.	Utiliser les variables aléatoires $N_1, \dots, N_n$.	✓
5.	Utiliser la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements associé à la variable aléatoire N_1.	✓
6.	Sommer judicieusement les égalités obtenues à la question 5.	✓
7.	Il s'agit de calculer une somme télescopique.	✓
8.(a)	Encadrer la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$ sur les segments d'intégration.	✓
8.(b)	Sommer les inégalités de la question 8.(a) et utiliser le théorème des gendarmes.	✓
8.(c)	Utiliser les questions 7. et 8.(b).	✓
9.	Utiliser la question 5.	✓
10.	Utiliser les questions 6. et 9.	✓

Exercice 2.

I. Étude d'une équation différentielle homogène avec condition aux bords

Questions	Indications	Sup' ?
1.	C'est une équation différentielle du cours.	✓
2.	Quel est l'ensemble des points d'annulation de la fonction sinus sur $\mathbb{R}$?	✓

II. Étude d'une discrétisation de l'équation différentielle homogène

Questions	**Indications**	**Sup' ?**
3.	Traduire matriciellement le système d'équations proposé.	✓
4.	Exprimer la matrice $M_{N-1,\lambda}$ en fonction de A_{N-1}.	✗
5.	Il n'y a aucun calcul à faire.	✗
6.	Question très classique.	✗
7.	Procéder par double implication.	✗
8.(a)	Commencer par expliciter le terme général de la suite.	✓
8.(b)	Commencer par expliciter le terme général de la suite.	✓
8.(c)i.	Ne surtout pas écrire « $\sqrt{\Delta}$ » si $\Delta < 0$.	✓
8.(c)ii.	Commencer par expliciter le terme général de la suite.	✗
8.(c)iii.	Des valeurs propres candidates ont été obtenues à la question 8.(c)ii.	✗
9.	Utiliser le lien entre $\mathrm{Sp}(A_{N-1})$ et Λ.	✗
10.	Utiliser l'équivalent usuel relatif au cosinus.	✓
11.		✓

III. Étude d'une discrétisation de l'équation différentielle avec second membre

Questions	**Indications**	**Sup' ?**
12.	Déterminer le signe des valeurs propres de $M_{N-1,\lambda}$.	✗
13.	Il suffit de calculer DX et d'utiliser la définition de la norme.	✗
14.	La matrice $M_{N-1,\lambda}$ est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.	✗
15.	Exprimer $X - \tilde{X}$ en fonction de $B - \tilde{B}$.	✗
16.	Utiliser les questions 14. et 15.	✗
17.	C'est un calcul de limite classique.	✓
18.	Comment suffit-il de choisir X et $\tilde{X}$ pour que les inégalités des questions 14. et 15. soient des égalités ?	✗
19.		✓