Julian Tugaut

CPGE

Les bases indispensables des Probabilités et des Statistiques

Cours et exercices corrigés

ellipses

Chapitre 1

Le langage des ensembles

1.1 Introduction

On commence le livre par l'étude du langage des ensembles. En effet, celui-ci nous servira subséquemment pour représenter et pour nous représenter de façon palpable ce à quoi correspondent les divers objets du modèle probabiliste.

Aucun prérequis n'est nécessaire si ce n'est une base solide de Terminale. Il serait toutefois très positif de savoir ce qu'est une bijection et d'avoir déjà entendu parler d'ensembles dénombrables.

Les principaux objectifs de ce chapitre sont la découverte des diagrammes de Venn (les patates) et des opérations sur les ensembles (inclusion, intersection, réunion et complémentation). Il est également attendu qu'à l'issue du chapitre, le lecteur ait bien compris la notion de distributivité ainsi que les lois de Morgan. Enfin, savoir identifier un ensemble dénombrable a un rôle clef dans les chapitres suivants. Il est donc fortement conseillé de porter une attention toute particulière à la section relative à la notion de dénombrabilité.

1.2 Définitions

1.2.1 Notion d'ensemble

On considère la notion suivante d'un ensemble Ω (qui désignera dans les prochains chapitres l'univers, que l'on appellera aussi l'espace fondamental).

Définition 1.2.1. *Un ensemble Ω est une collection d'objets. Il est déterminé lorsque l'on peut dire si un objet ω lui appartient ou ne lui appartient pas.*

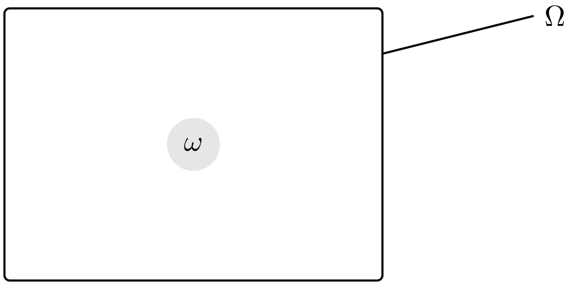
Notation 1.2.2. *Si l'objet ω appartient à l'ensemble Ω, on note : $\omega \in \Omega$.*

Si l'objet ω n'appartient pas à l'ensemble Ω, on note : $\omega \notin \Omega$.

Définition 1.2.3. *Un objet ω appartenant à l'ensemble Ω ($\omega \in \Omega$) est appelé un élément de Ω.*

Il peut être pratique d'utiliser un diagramme de Venn (diagramme avec les patates) pour se représenter l'appartenance à un ensemble :

FIGURE 1.1 – Élément d'un ensemble



Il faut toutefois garder à l'esprit que le diagramme de Venn ne saurait se substituer au raisonnement.

1.2.2 Ensemble vide

Définition 1.2.4. *On définit l'ensemble vide comme étant l'ensemble qui ne contient aucun élément.*

Notation 1.2.5. *L'ensemble vide est noté* $\emptyset$.

Remarque 1.2.6. *Il ne faut pas confondre l'ensemble vide (*$\emptyset$*) avec le zéro (*0*). On a coutume de dire : « Être nul, c'est déjà exister ».*

1.2.3 Inclusion, sous-ensembles

Définition 1.2.7. *On dit qu'un ensemble* A *est inclus dans un ensemble* B *lorsque tout élément de* A *appartient à* B*. Plus formellement,* A *est inclus dans* B *lorsque*

$$\forall \omega \in A\,,\ \omega \in B\,.$$

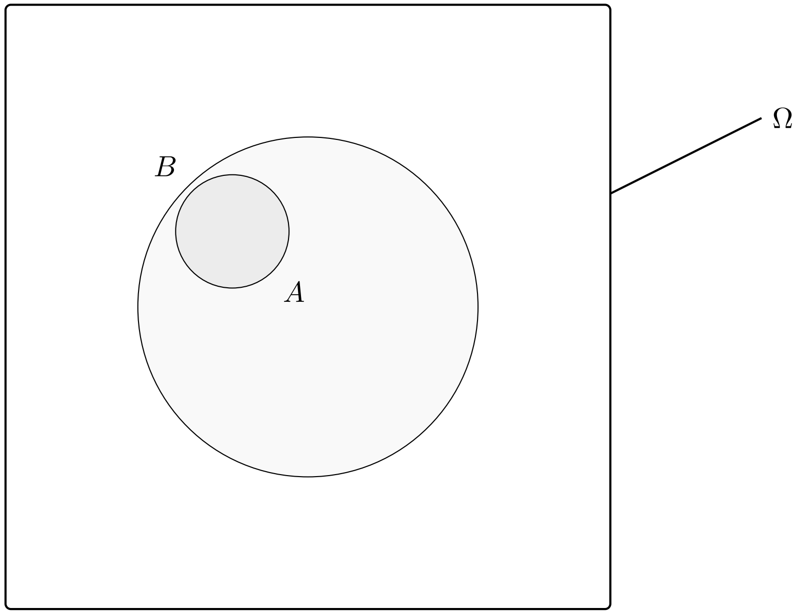
Remarque 1.2.8. *On dit aussi que* B *contient* A *ou que* A *est un sous-ensemble de* B.

Notation 1.2.9. *Si* A *est un sous-ensemble de* B*, on note :* $A \subset B$.

On peut aussi trouver la notation $B \supset A$.

Il peut être pratique d'utiliser un diagramme de Venn pour se représenter l'inclusion d'un ensemble dans un autre :

Figure 1.2 – Inclusion d'un ensemble



Exemple 1.2.10. *Soit Ω l'ensemble des étudiants en France. Soit B l'ensemble des étudiants de Télécom Saint-Étienne. Soit A l'ensemble des FISE1 de Télécom Saint-Étienne.*

Alors, A est inclus dans B : $A \subset B$.

Remarque 1.2.11. *On peut remarquer dans l'exemple précédent que l'on a bien $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$.*

Théorème 1.2.12. *Soient deux ensembles A et B.*
Alors, $A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.

Remarque 1.2.13. *Dans la pratique, démontrer que deux ensembles sont égaux n'est pas toujours évident. On peut alors, d'après le Théorème 1.2.12 procéder par double inclusion.*

1.3 Opérations sur les ensembles

La mathématique est une science logico-formelle. Nous présentons donc maintenant les opérations logiques élémentaires, traduites en langage ensembliste. Nous verrons ainsi l'intersection, la réunion et la complémentation. Également, nous verrons les propriétés de ces différentes opérations.

1.3.1 Intersection de deux ensembles

Définition 1.3.1. *On appelle intersection de deux ensembles A et B l'ensemble des éléments communs à A et à B.*

Notation 1.3.2. *L'intersection de deux ensembles A et B est notée $A \cap B$.*

Plus formellement, on peut écrire :

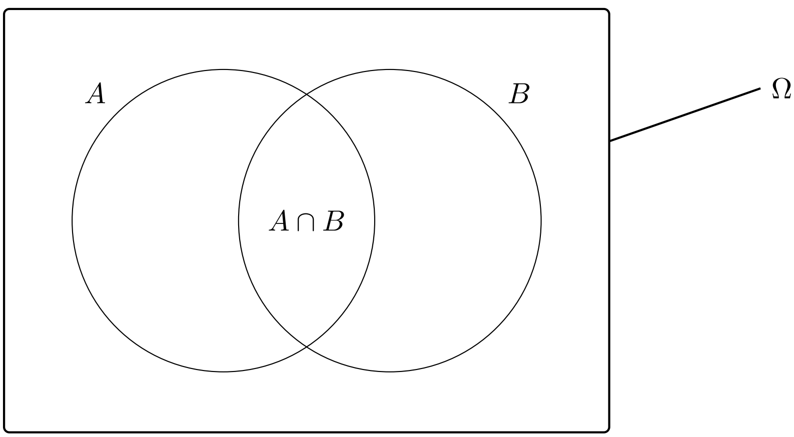
$$A \cap B = \{\omega \ : \ \omega \in A \, , \omega \in B\}$$

ou

$$\omega \in A \cap B \iff \omega \in A \text{ et } \omega \in B \, .$$

Avec un diagramme de Venn :

Figure 1.3 – Intersection de deux ensembles



Exemple 1.3.3 (Ensembles finis petits)**.** *Soit $\Omega := \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ un ensemble de lettres. Soient les deux sous-ensembles de Ω : $A := \{a, b, c, d, e\}$ et $B := \{c, d, e, f, g\}$. Alors, on a : $A \cap B = \{c, d, e\}$.*

Exemple 1.3.4 (Ensembles finis grands)**.** *Soit Ω l'ensemble des ingénieurs formés en France. Soit A le sous-ensemble des ingénieurs exerçant dans l'informatique. Soit B l'ensemble des ingénieurs diplômés de Télécom Saint-Étienne (TSE). Alors, $A \cap B$ est l'ensemble des ingénieurs diplômés de TSE qui travaillent dans l'informatique.*

Remarque 1.3.5. *Ici, les mots « petits » et « grands » ne recouvrent aucune réalité mathématique et doivent être compris comme étant dans leur sens courant.*

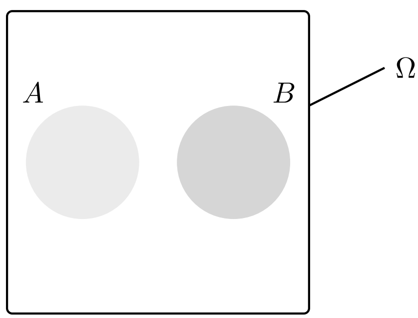
Exemple 1.3.6 (Ensembles infinis dénombrables)**.** *Soit $\Omega := \mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls. Soit A le sous-ensemble des nombres premiers et soit B celui des nombres pairs. Alors, $A \cap B$ est le singleton $\{2\}$.*

Exemple 1.3.7 (Ensembles infinis non dénombrables)**.** *Soit Ω l'ensemble des réels strictement positifs. Soit A l'ensemble des réels strictement plus grands que 1. Soit $B :=]0;4]$. Alors, $A \cap B$ est l'intervalle $]1;4]$.*

Définition 1.3.8 (Ensembles disjoints)**.** *On dit que deux ensembles A et B sont disjoints si leur intersection est vide : ils n'ont aucun élément en commun. En d'autres termes, on dit que A et B sont disjoints si l'on a $A \cap B = \emptyset$.*

Avec un diagramme de Venn :

Figure 1.4 – Ensembles disjoints



On présente maintenant les propriétés basiques de l'intersection.

Proposition 1.3.9 (Commutativité)**.** *Soient deux ensembles A et B.*
Alors : $A \cap B = B \cap A$.

Proposition 1.3.10 (Associativité)**.** *Soient trois ensembles A, B et C. Alors :*

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C =: A \cap B \cap C\,.$$

Ainsi, s'il n'y a que de l'intersection, les parenthèses sont superflues.

Proposition 1.3.11. *Soit un ensemble A. Alors, on a $A \cap A = A$.*

Proposition 1.3.12. *Soit un ensemble A. Alors, on a $A \cap \emptyset = \emptyset$.*

1.3.2 Réunion de deux ensembles

Définition 1.3.13. *On appelle réunion de deux ensembles A et B l'ensemble des éléments qui sont dans A ou (au sens inclusif) qui sont dans B.*

Notation 1.3.14. *La réunion de deux ensembles A et B est notée $A \cup B$.*

Plus formellement, on peut écrire :

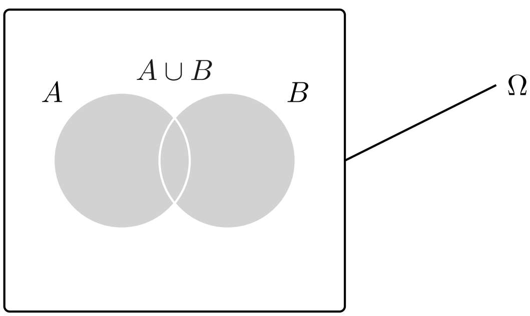
$$A \cup B = \{\omega \ : \ \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$$

ou

$$\omega \in A \cup B \iff \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\,.$$

Avec un diagramme de Venn :

FIGURE 1.5 – Réunion de deux ensembles



On remarque dans ce diagramme que l'on a

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B \quad \text{et} \quad A \cap B \subset B \subset A \cup B\,.$$

Exemple 1.3.15 (Ensembles finis petits)**.** *Soit Ω l'alphabet français. Soient les deux ensembles de lettres : $A := \{a, b, c, d, e\}$ et $B := \{c, d, e, f, g\}$. Alors, on a : $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.*

Exemple 1.3.16 (Ensembles finis grands)**.** *Soit Ω l'ensemble des étudiants de Saint-Étienne. Soit A l'ensemble des étudiants de Télécom Saint-Étienne et soit B l'ensemble des étudiants de l'IUT de Saint-Étienne. Alors $A \cup B$ est l'ensemble des étudiants stéphanois de TSE ou de l'IUT.*

Remarque 1.3.17. *À nouveau, les mots « petits » et « grands » ne recouvrent aucune réalité mathématique et doivent être compris comme étant dans leur sens courant.*

Exemple 1.3.18 (Ensembles infinis dénombrables)**.** *Soit $\Omega := \mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. Soit A le sous-ensemble des nombres pairs positifs et soit B celui des nombres impairs positifs. Alors, $A \cup B = \mathbb{N}$.*

Exemple 1.3.19 (Ensembles infinis non dénombrables)**.** *Soit Ω l'ensemble des réels strictement positifs. Soit $A := [1; 3]$ et soit $B :=]2; 4]$. Alors, $A \cup B$ est l'intervalle $[1; 4]$.*

On présente maintenant les propriétés basiques de la réunion.

Proposition 1.3.20 (Commutativité)**.** *Soient deux ensembles A et B.*

Alors $A \cup B = B \cup A$.

Proposition 1.3.21 (Associativité)**.** *Soient trois ensembles A, B et C.*

Alors :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C =: A \cup B \cup C\,.$$

Ainsi, s'il n'y a que de la réunion entre les ensembles, les parenthèses sont superflues.

Proposition 1.3.22. *Soit un ensemble A. Alors, on a $A \cup A = A$.*

Proposition 1.3.23. *Soit un ensemble A. Alors, on a $A \cup \emptyset = A$.*

1.3.3 Propriétés de distributivité

Considérons trois ensembles A, B et C quelconques, inclus dans Ω. Alors :

Proposition 1.3.24. *L'opération d'intersection est distributive par rapport à la réunion : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.*

Démonstration. Prouvons d'abord $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Soit $\omega \in A \cap (B \cup C)$. Par définition, ω appartient à A. De même, ω appartient à $B \cup C$. Ainsi, ω appartient à B ou il appartient à C. Si ω appartient à B, alors $\omega \in A \cap B$ d'où $\omega \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Si ω appartient à C, alors $\omega \in A \cap C$ d'où $\omega \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Prouvons maintenant la réciproque.
Soit $\omega \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Alors, $\omega \in A \cap B$ ou $\omega \in A \cap C$. Si $\omega \in A \cap B$, alors $\omega \in A$. Mais aussi, $\omega \in B \subset B \cup C$. Donc $\omega \in A \cap (B \cup C)$. De même, si $\omega \in A \cap C$, alors $\omega \in A$. Mais aussi, $\omega \in C \subset B \cup C$. Donc $\omega \in A \cap (B \cup C)$. La preuve est achevée en appliquant le Théorème 1.2.12. $\square$

Illustrons, au moyen de diagrammes de Venn, la propriété de distributivité, que nous venons de voir. On commence par griser $A \cap B$ et $A \cap C$:

Figure 1.6 – Distributivité de l'intersection - 1