

Julian Tugaut

CPGE

Les bases indispensables des Probabilités et des Statistiques

Cours et exercices corrigés



Table des matières

Notations	1
I Probabilités	3
1 Le langage des ensembles	5
1.1 Introduction	5
1.2 Définitions	5
1.2.1 Notion d'ensemble	5
1.2.2 Ensemble vide	6
1.2.3 Inclusion, sous-ensembles	6
1.3 Opérations sur les ensembles	8
1.3.1 Intersection de deux ensembles	8
1.3.2 Réunion de deux ensembles	10
1.3.3 Propriétés de distributivité	11
1.3.4 Complémentaire d'un sous-ensemble	14
1.4 Partition d'un ensemble	16
1.5 Rappels sur la dénombrabilité	17
1.6 Ensemble des parties d'un ensemble	18
2 Le modèle probabiliste	19
2.1 Introduction	19
2.2 Modélisation d'une expérience aléatoire	19
2.2.1 L'espace fondamental	20
2.2.2 Les évènements	22
2.3 Définition et propriétés d'une probabilité	25
2.3.1 Définition	25
2.3.2 Propriétés	27
2.3.3 Espace fondamental dénombrable	31

2.4	Probabilité conditionnelle et indépendance	34
2.4.1	Probabilité conditionnelle	34
2.4.2	Indépendance d'évènements	38
2.4.3	Lemmes de Borel-Cantelli	41
3	Variables aléatoires	47
3.1	Introduction	47
3.2	Définition et opérations	48
3.2.1	Définition	48
3.2.2	Opérations sur les variables aléatoires réelles	50
3.3	Loi d'une variable aléatoire réelle	51
3.3.1	Définition	53
3.3.2	Fonction de répartition	53
3.4	Indépendance des variables aléatoires	58
3.4.1	Définition	58
3.4.2	Exemples	59
3.4.3	Contre-exemple	60
3.4.4	Propriétés	60
4	Variables aléatoires discrètes	63
4.1	Introduction	63
4.2	Caractérisation de la loi	64
4.2.1	En utilisant la loi de probabilité	65
4.2.2	En utilisant la fonction de répartition	65
4.3	Caractéristiques	66
4.3.1	Espérance d'une variable aléatoire réelle	66
4.3.2	Variance, écart-type	73
5	Probabilités discrètes classiques	83
5.1	Introduction	83
5.2	Loi de Bernoulli	84
5.3	Loi binomiale	85
5.3.1	Formulation	85
5.3.2	Espace fondamental	86
5.3.3	Solution	88
5.3.4	Définition	90
5.3.5	Décomposition de X	91
5.3.6	Caractéristiques	91
5.3.7	Somme de lois binomiales	93
5.3.8	Courbe représentative de la loi binomiale	94
5.3.9	Tables de la loi binomiale	95

5.3.10	Approximation de la loi binomiale pour n grand	96
5.4	Loi de Poisson	97
5.4.1	Définition	97
5.4.2	Courbe représentative de la loi de Poisson	98
5.4.3	Caractéristiques	99
5.4.4	Somme de lois de Poisson	100
5.4.5	Tables de la loi de Poisson	101
5.4.6	Approximation de la loi de Poisson pour n grand	101
6	Autres lois discrètes classiques	103
6.1	Introduction	103
6.2	Loi de Rademacher	103
6.3	Loi uniforme discrète	105
6.4	Loi triangulaire discrète	105
6.5	Loi géométrique	107
6.6	Loi hypergéométrique	110
6.7	Loi de Zipf	111
6.8	Loi de Benford	112
6.9	Loi logarithmique	113
6.10	Loi zéta	114
7	Fonctions génératrices	117
7.1	Introduction	117
7.2	Définition et premières propriétés	118
7.3	Fonctions génératrices des lois classiques	119
7.3.1	Si $\mathbb{P}_X = \mathcal{B}(p)$	119
7.3.2	Si $\mathbb{P}_X = \mathcal{B}(n; p)$	119
7.3.3	Si $\mathbb{P}_X = \mathcal{P}(\lambda)$	119
7.3.4	Pour d'autres lois discrètes usuelles	120
7.4	Résultats importants	120
7.5	Extinction des grands noms	124
8	Variables aléatoires à densité	127
8.1	Introduction	127
8.2	Densité : définition et propriétés	128
8.2.1	Définition	128
8.2.2	Propriétés	129
8.3	Calcul de la probabilité d'un intervalle	131
8.4	Caractéristiques	132
8.4.1	Espérance d'une variable aléatoire réelle	132
8.4.2	Variance, Écart-type	137

8.4.3	Mélange de variables discrètes et à densité	141
8.4.4	Skewness et kurtosis	141
9	Probabilités continues classiques	143
9.1	Introduction	143
9.2	Loi uniforme	144
9.2.1	Définition	144
9.2.2	Caractéristiques	146
9.3	Loi exponentielle	148
9.3.1	Définition	148
9.3.2	Caractéristiques	150
9.4	Loi normale (ou gaussienne)	151
9.4.1	Définition	151
9.4.2	Caractéristiques	154
9.4.3	Propriétés	155
9.4.4	Tables	157
10	Autres lois continues classiques	163
10.1	Introduction	163
10.2	Loi triangulaire	163
10.3	Loi logistique	166
10.4	Loi d'Erlang	167
10.5	Loi de Weibull	169
10.6	Loi Gamma	171
10.7	Loi du χ^2	173
10.8	Loi de Rayleigh	176
10.9	Loi log-normale	178
10.10	Loi de Student	180
10.11	Loi de Fisher	184
10.12	Loi de Pareto	185
10.13	Loi de Cauchy	186
11	Fonctions caractéristiques	189
11.1	Introduction	189
11.2	Définition et premières propriétés	190
11.3	Fonctions caractéristiques usuelles	194
11.3.1	Lois discrètes	194
11.3.2	Lois à densité	196
11.4	Résultats importants	198

12 Vecteurs aléatoires	203
12.1 Introduction	203
12.2 Premières définitions	204
12.3 Loi d'un vecteur aléatoire	204
12.4 Fonction de répartition	205
12.5 Fonction caractéristique	207
12.6 Vecteurs aléatoires discrets	207
12.7 Vecteurs aléatoires à densité	209
12.8 Indépendance des composantes	210
12.9 Lois conditionnelles	211
13 Vecteurs gaussiens	213
13.1 Introduction	213
13.2 Rappels et compléments	214
13.3 Définition	214
13.4 Existence	215
13.5 Fonction caractéristique	216
13.6 Densité de probabilité	218
13.7 Théorème de Cochran	218
14 Convergences	221
14.1 Introduction	221
14.1.1 Paradoxe	222
14.1.2 Convergence simple	224
14.2 Convergence presque sûre	225
14.2.1 Définition et premières propriétés	225
14.2.2 Caractérisation	226
14.3 Convergence dans L^p	228
14.3.1 Définition	228
14.3.2 Différence avec l'espace L^p en analyse	229
14.4 Convergence en probabilité	229
14.4.1 Définition	229
14.4.2 Liens avec les deux autres convergences	230
14.4.3 Remarque	231
14.4.4 Réciproques partielles	231
14.5 Convergence en loi	232
14.5.1 Définition et première propriété	232
14.5.2 Remarque	233
14.5.3 Liens avec les convergences précédentes	233
14.5.4 Obtenir une convergence en loi	234
14.6 Retour sur le paradoxe	235

14.7	Synthèse	236
15	LGN et TCL	239
15.1	Introduction	239
15.2	Petit jeu	239
15.3	Lois des grands nombres	240
15.3.1	Motivation : méthodes de Monte Carlo	240
15.3.2	Loi faible des grands nombres	240
15.3.3	Loi forte des grands nombres	241
15.3.4	Loi des grands nombres de Kolmogorov	242
15.4	Théorème central de la limite	243
15.4.1	Énoncé du théorème central limite	243
15.4.2	Preuve du théorème central limite	244
15.4.3	Inégalité de Berry-Esseen	245
15.5	Retour sur le jeu	246
15.5.1	Premier raisonnement (faux)	246
15.5.2	Deuxième raisonnement (faux également)	246
15.5.3	Troisième raisonnement	247
15.5.4	Synthèse	247
II	Statistiques	249
16	Statistiques descriptives	251
16.1	Introduction	251
16.2	Vocabulaire	252
16.3	Caractère qualitatif	254
16.4	Séries statistiques simples : présentation	257
16.4.1	Série à valeurs isolées	257
16.4.2	Série à valeurs classées	260
16.5	Séries statistiques : caractéristiques	264
16.5.1	Moyenne arithmétique	264
16.5.2	Quantiles	267
16.5.3	Variance, écart-type	270
16.5.4	Autres caractéristiques	274
16.6	Séries statistiques doubles	275
16.6.1	Définitions	275
16.6.2	Tableau de contingence	276
16.6.3	Indépendance de deux caractères	279
16.6.4	Nuage de points	282
16.6.5	Covariance	285

16.6.6 Description empirique de la dépendance	286
17 Estimation ponctuelle	287
17.1 Introduction	287
17.2 Préliminaires	287
17.3 Vocabulaire	288
17.4 Notion de statistique	290
17.5 Moyenne d'échantillon	291
17.6 Variance d'échantillon	292
17.7 Proportion d'échantillon	295
17.8 Estimateurs	296
17.8.1 Préliminaires	296
17.8.2 Qualité des estimateurs	297
17.8.3 Retour sur l'Exemple 17.8.3	302
18 Deux méthodes d'estimation	307
18.1 Introduction	307
18.2 Méthode des moments	308
18.2.1 Exemple introductif	308
18.2.2 Méthode générale	308
18.2.3 Exemples	309
18.2.4 Limites	311
18.3 Méthode du maximum de vraisemblance	311
18.3.1 Exemple introductif	312
18.3.2 Méthode générale	312
18.3.3 Exemples	313
19 Intervalles de confiance	319
19.1 Introduction	319
19.2 Préliminaires	319
19.2.1 Philosophie des intervalles de confiance	320
19.2.2 Définitions	321
19.2.3 Premier intervalle de confiance de la moyenne	321
19.3 Cas gaussien	322
19.3.1 Estimation de μ si σ^2 est connue	322
19.3.2 Estimation de μ si σ^2 est inconnue	323
19.3.3 Estimation de σ^2 si μ est connue	323
19.3.4 Estimation de σ^2 si μ est inconnue	324
19.3.5 Différence de deux moyennes	324
19.4 Intervalles de confiance asymptotiques	326
19.4.1 Loi de Poisson	326

19.4.2 Loi de Bernoulli	327
19.5 Cas exponentiel	327
19.5.1 Intervalles asymptotiques	327
19.5.2 Intervalles non asymptotiques	328
20 Tests statistiques	329
20.1 Introduction	329
20.1.1 Motivations	329
20.1.2 Définition	330
20.1.3 Deux familles de tests	330
20.1.4 Quels tests peut-on effectuer ?	331
20.2 Principe général	332
20.2.1 Formuler (H_0)	332
20.2.2 Définir (H_1)	332
20.2.3 Contrôler avec une statistique	333
20.2.4 Établir la distribution de la statistique de contrôle	333
20.2.5 Choisir α	333
20.2.6 Déterminer la région critique associée	334
20.2.7 Calculer la valeur empirique de la statistique	334
20.2.8 Décider	334
20.3 Erreur de première espèce	334
20.4 Erreur de seconde espèce	335
21 Tests d'hypothèse classiques	337
21.1 Introduction	337
21.2 Tests sur la moyenne μ	338
21.2.1 En supposant la variance σ^2 connue	338
21.2.2 En supposant la variance σ^2 inconnue	340
21.3 Tests sur la variance σ^2	341
21.3.1 En supposant la moyenne μ connue	341
21.3.2 En supposant la moyenne μ inconnue	343
21.4 Test sur une proportion f	344
21.4.1 Test bilatéral : (H_1^b)	345
21.4.2 Test unilatéral : (H_1^+)	345
21.4.3 Test unilatéral : (H_1^-)	346
21.5 Test de comparaison entre deux moyennes	346
21.5.1 En supposant les variances σ_X^2 et σ_Y^2 connues	347
21.5.2 En supposant les variances σ_X^2 et σ_Y^2 inconnues	347
21.6 Test de comparaison entre deux variances	349
21.7 Comparaison entre deux proportions	350
21.8 Test du χ^2 d'ajustement	351

21.8.1 Justification théorique du test	351
21.8.2 Pour une loi discrète	352
21.8.3 Pour une loi continue	354
21.8.4 Pour des lois qui dépendent d'un paramètre θ	354
21.9 Test du χ^2 d'indépendance	355
21.10 Test du χ^2 d'homogénéité	356
21.11 Tests de Kolmogorov-Smirnov	357
21.11.1 Test d'ajustement	357
21.11.2 Test d'homogénéité	358
22 Régression linéaire	359
22.1 Introduction	359
22.2 Équation de la droite de régression	359
22.3 Lien avec $r_{x,y}$	361
III Annexes	363
23 Rappels et compléments	365
23.1 Introduction	365
23.2 Ensembles	365
23.3 Suites	366
23.4 Fonctions	367
23.5 Topologie	368
23.6 Intégration de Riemann	369
24 Éléments de théorie de la mesure	371
24.1 Introduction	371
24.2 Tribus	372
24.3 Fonctions mesurables	375
24.4 Tribu borélienne	375
24.5 Mesures	377
24.6 Intégration de Lebesgue	380
24.7 Retour sur les chapitres précédents	383
25 Corrections des exercices	385
Bibliographie	459
Index	461