Rachid Ellaia
Bouchta Khaoulani

Processus markoviens de sauts et réseaux de files d'attente

Cours, exemples et exercices corrigés

ellipses

Chapitre 1

Espaces et fonctions mesurables, mesures positives

1.1 Espaces et fonctions mesurables

La théorie de la mesure et de l'intégration a démarré essentiellement avec les travaux de Lebesgue qui a étendu le concept du volume euclidien aux ensembles qu'il a appelés mesurables. Radon, Borel et d'autres ont développé ces concepts en connection avec les probabilités. Nous ne faisons qu'une brève introduction à ces concepts. Il existe toute une bibliographie sur ce domaine dont, entre autres, [2], [15], [29], [30] et [14]. Le lecteur familier avec ces concepts peut aller directement à la partie « Chaînes de Markov et processus markoviens de sauts ».

Définition 1.

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(\Omega)$.

-1 $\mathcal{A}$ est un clan (ou algèbre) si

$i)$ $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$, où $A^c = \Omega \setminus A$.

$ii)$ $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$.

-2 $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre si de plus :

$A_1, A_2, \cdots A_n, \cdots$ est une suite dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\cup_n A_n$ est aussi un élément de $\mathcal{A}$.

Si $\Omega \in \mathcal{C}$ on dit que $\mathcal{C}$ est une tribu. Dans ce cas $\emptyset$ est aussi un élément de $\mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A}$ est une tribu, on a aussi la stabilité par intersection dénombrable :

$$\text{Si} \quad A_n \in \mathcal{A}, \quad \text{pour tout n, alors} \quad \cap_n A_n \in \mathcal{A}.$$

En théorie des probabilités, une tribu $\mathcal{A}$ sur un ensemble Ω représente l'ensemble des informations susceptibles d'être observées durant la répétition indéfinie d'une expérience dans les mêmes conditions. Ω est l'ensemble des informations élémentaires ou résultats possibles, dit encore ensemble fondamental ou univers. Une information est un sous-ensemble $A \in \mathcal{A}$. On convient que son complémentaire A^c appartient aussi à $\mathcal{A}$. Il en est de même de Ω ainsi que toute réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$. On dit que l'événement A est réalisé, si le résultat ω de l'expérience qui s'est produit appartient à A.
Dans tout ce qui suit, sauf cas contraire, $\mathcal{A}$ sera toujours considéré comme une tribu. $(\Omega\,;\mathcal{A})$ est appelé espace mesurable (ou probabilisable).
Il est facile de montrer le théorème suivant très utile.

Théorème 2.

L'intersection d'une famille quelconque de tribus de Ω est une tribu de Ω.

Exemples

i) $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu, dite tribu grossière de Ω. Aucune information à part celle de Ω.

ii) $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω est une tribu, dite tribu discrète de Ω. Nous avons toutes les informations possibles. On utilise cette tribu dans le cas où Ω est fini ou dénombrable. C'est le cas, par exemple, où Ω représente l'ensemble des résultats d'un jet de dé à 6 faces. Alors $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Définition 3.

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. On note $\sigma(\mathcal{C})$ la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$, c'est aussi l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$.

Exemples

i) Si $\mathcal{C}= \{A\}$ où $A \subset \Omega$, alors $\sigma(\mathcal{C}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$

ii) Si $\mathcal{C} = \{A, B\}$, alors
$\sigma(\mathcal{C}) = \{\emptyset, A, B, A^c, B^c, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A^c \cap B^c, A^c \cup B^c, \Omega\}$

iii) Si $\mathcal{C} = \{A_1, \cdots, A_n\}$ est une partition de Ω ; les ensembles A_i sont appelés atomes, de la tribu $\sigma(\mathcal{C})$.

iv) Si Ω est muni d'une topologie $\mathcal{T}$, $\sigma(\mathcal{T})$ est appelée tribu des boréliens de $(\Omega,\mathcal{T})$. Elle est notée $\mathcal{B}(\Omega)$.
Comme exemple, si $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, cette tribu est aussi engendrée par l'ensemble des pavés.

v) Si $\Omega = [0,1]$ et $\mathcal{D}_n = \sigma\Big(\Big\{\Big[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\Big[; 0 \leq k \leq 2^n - 1\Big\}\Big)$ la tribu engendrée par les intervalles dyadiques d'ordre n. La suite des tribus $\mathcal{D}_n$ est strictement croissante et $\sigma\Big(\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{D}_n\Big) = \mathcal{B}([0,1])$ la tribu borélienne de l'intervalle $[0,1]$.

vi) Si $\Omega = \mathbb{N}^n$, $\mathcal{B}(\mathbb{N}^n) = \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$.

La proposition suivante est très utile.

Proposition 4.

L'image réciproque d'une tribu par une application est une tribu.

En effet, si f est une application de Ω dans E et $\mathcal{E}$ une tribu de E.
$\mathcal{A} := f^{-1}(\mathcal{E}) = \{f^{-1}(B); B \in \mathcal{E}\} = \{A \subset \Omega; f(A) \in \mathcal{E}\}$ vérifie bien la définition d'une tribu.
On note $\sigma(f)$ la tribu $\{f^{-1}(B); B \in \mathcal{E}\}$. Elle est appelée tribu engendrée par f. Dans ce cas, l'application f est dite $\sigma(f) - \mathcal{E}$ mesurable.
Plus généralement, soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'applications de Ω dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. La plus petite tribu sur Ω rendant mesurables les applications f_i est appelée tribu engendrée par les f_i et est notée $\sigma(f_i, i \in I)$.

Proposition 5.

Toute fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^d$ continue par pavés (continue par morceaux dans le cas de $\mathbb{R}$) est mesurable.

En effet, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^d$ étant munies de leurs tribus boréliennes lesquelles sont engendrées par les pavés, l'image réciproque d'un ouvert par une application continue est par définition un ouvert, donc toute fonction continue par pavés est mesurable.
On admet le théorème suivant.

Théorème 6.

-1 Si f et g sont deux fonctions mesurables de $(\Omega, Ą)$ dans $\mathbb{R}^d$, alors pour tous réels a et b : $a \cdot f + b \cdot g,\quad f \cdot g\quad$ et $\quad \frac{f}{g}\quad$ sont mesurables.

-2 Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f, alors f est mesurable.

-3 Si (f_n) est une suite d'applications mesurables de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors

$$\inf_n f_n,\quad \sup_n f_n,\quad \liminf_n f_n \quad \text{et} \quad \limsup_n f_n$$

sont mesurables, où

$$\liminf_n f_n(x) = \sup_n \inf_{m\geq n} f_(x) \quad \text{et} \quad \limsup_n f_n(x) = \inf_n \sup_{m\geq n} f_n(x)$$

1.2 Espaces mesurés

Pour $n \geq 1$, on va noter $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 7.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application μ de $\mathcal{A}$dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, telle que :
$i)\quad \mu(\emptyset) = 0$,
$ii)$ Pour toute famille dénombrable d'éléments A_n de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints.

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est appelé espace mesuré.
$iii)$ Si de plus $\mu(\Omega) = 1$, On dit que μ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de probabilités.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.
μ est bornée, si $\mu(\Omega) < +\infty$.
μ est σ-finie, si $\exists \{A_n\} \subset \mathcal{A},\quad$ tel que $\quad \Omega = \cup_n A_n,\quad$ et $\quad \mu(A_n) < +\infty \quad \forall n$

Proposition 8.

Soit μ une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$, alors pour tout A et B de $\mathcal{A}$, on a

i) $A \subset B$ implique $\mu(A) \leq \mu(B)$ et $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

ii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

iii) Pour toute famille dénombrable d'éléments A_n de $\mathcal{A}$.

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Preuve

$i)$ On a $B = A \cup (B - A)$ et $A \cap (B - A) = \emptyset$, d'où

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \quad \text{et} \quad \mu(A) \leq \mu(B).$$

$ii)$ On a $A \cup B = A \cup (B - (A \cap B))$ ce qui donne l'égalité.

Proposition 9.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}; \mu)$ un espace mesuré.

i) Si (A_n) est une suite croissante dans $\mathcal{A}$ et $A = \cup_n A_n$, alors

$$\mu(A_n) \nearrow \mu(A).$$

ii) Si (A_n) est une suite décroissante dans $\mathcal{A}$ telle que,

$$A = \cap_n A_n \text{ et } \exists n_0 : \ \mu(A_{n_0}) < \infty, \quad \text{alors } \mu(A_n) \searrow \mu(A).$$

Définition 10.

Un ensemble $\mathcal{M}$ de parties de Ω est appelé une classe monotone si,

$i)$ $\Omega \in \mathcal{M}$.

$ii)$ Si $A, B \in \mathcal{M}$, et $B \subset A$, alors, $A \setminus B \in \mathcal{M}$.

$iii)$ Si $A_n \nearrow A$ et $A_n \in \mathcal{M}$ $\forall n$, alors $A \in \mathcal{M}$.

Il s'ensuit de cette définition que $\mathcal{C}$ est stable par intersection décroissante.

Le théorème fondamental de la classe monotone [15].

Théorème 11.

Si $\mathcal{C}$ est un ensemble de parties de Ω stable par intersection finie et contenant Ω, alors $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{M}(\mathcal{C})$ où $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est la plus petite classe monotone contenant $\mathcal{C}$.

Proposition 12.

Si μ_1 et μ_2 sont deux mesures σ-finies sur $(\Omega, \mathcal{A})$ qui sont égales sur un sous-ensemble $\mathcal{C}$ stable par intersections finies et engendrant $\mathcal{A}$. Alors $\mu_1 = \mu_2$.

Preuve
Remarquons que $\Omega \in \mathcal{C}$ et $A \in \mathcal{C}, \implies A^c \in \mathcal{C}$. Donc $\mathcal{C}$ est clan unitaire. Par le théorème fondamental de la classe monotone on a $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{M}(\mathcal{C})$. Comme μ_1 et μ_2 sont des mesures, elles sont égales sur $\mathcal{M}(\mathcal{C})$, qui est aussi égal à $\sigma(\mathcal{C})$ qui n'est autre que $\mathcal{A}$.
Le théorème de prolongement suivant est utile pour la construction d'une probabilité.

Théorème 13.

Soit μ une application additive et positive, définie sur un clan unitaire $\mathcal{C}$. Une condition nécessaire et suffisante pour étendre μ en une mesure sur $\sigma(\mathcal{C})$ est qu'elle vérifie la condition suivante

$$\{A_n\} \subset \mathcal{C}, \quad \text{et} \quad A_n \searrow \emptyset \implies \mu(A_n) \searrow 0.$$

Si de plus elle est σ-finie, le prolongement est unique et est σ-fini.
En particulier si $\mu(\Omega) = 1$ alors μ s'étend en une probabilité unique sur $\sigma(\mathcal{C})$.

Exemples

-1 Si Ω est dénombrable, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, et μ une mesure à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, vérifiant :

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{card}(A) & \text{si card}(A) < +\infty \\ +\infty & \text{si card}(A) = \infty. \end{cases}$$

Alors μ est une mesure σ-finie, dite mesure de dénombrement, ou mesure de comptage sur Ω.

-2 Soit p une fonction définie sur $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega))$, ($\Omega$ dénombrable) et à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. On pose pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega))$

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} p(x)$$

μ est une mesure positive sur Ω.
μ est bornée si

$$\sum_{x \in \Omega} p(x) < +\infty$$

-3 **La mesure de Dirac**
Soit $x_0 \in \Omega$, on définit la mesure de Dirac en x_0 par

$$\delta_x(A) = 1, \text{ si } x \in A \text{ et } \delta_x(A) = 0, \text{ si } x \notin A$$

-4 **La mesure de Lebesgue**
- **Sur** $\mathbb{R}$
On la note souvent par λ. C'est une mesure positive définie sur les intervalles de $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$\lambda([a,b[) = \lambda(]a,b]) = \lambda(]a,b[) = b - a \tag{1.1}$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on va noter indifféremment ces intervalles par $)a,b($ pour tout a, b dans $\mathbb{R}$.
Elle est σ-additive non bornée, nulle sur les ensembles dénombrables et se prolonge de manière unique à la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.
- **Sur** $\mathbb{R}^d$
On la définit sur les pavés de $\mathbb{R}^d$ de la forme $\prod_{i=1}^{d})a_i, b_i($ par

$$\lambda\Big(\prod_{i=1}^{d})a_i, b_i(\Big) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i). \tag{1.2}$$

Elle est σ-additive, non bornée, se prolonge de manière unique à la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$ et nulle sur les ensembles dénombrables et les surfaces de dimension $m < d$. On la note souvent par λ^d.
Notons que les tribus boréliennes $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ sont strictement incluses dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ car il existe des sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ qui ne sont pas mesurables par rapport à la mesure de Lebesgue, (voir [15], pp. 68-69).

1.3 Aperçu de la théorie de l'intégration

Les théories de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue, ont permis d'introduire une classe de fonctions plus large que les fonctions continues. Avec la topologie, ils sont à la base du développement de l'analyse et ce, en introduisant et étudiant une large classe d'espaces autres que $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ et les espaces de Hilbert. Un exemple important de ces espaces est les $L^p (p \in [1,\infty])$.

Définition 14.

Une fonction f mesurable de $(\Omega,\mathcal{A})$ à valeurs dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est étagée, si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes $y_1,\cdots,y_n$.

On peut alors écrire f sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^{n} y_i \chi_{A_i}, \quad \text{avec} \quad A_i = f^{-1}(\{y_i\}) \in \mathcal{A} \tag{1.3}$$

Théorème 15.

Soit $(\Omega,\mathcal{A})$ un espace mesurable. Alors toute fonction numérique à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Preuve
Posons pour $n \geq 1$ et $k \geq 0$,

$$A_{n,k} = f^{-1}\Big(\Big[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\Big[\Big) \quad \text{et} \quad A_\infty = f^{-1}(\{+\infty\}).$$

Ces ensembles sont mesurables puisque f l'est. Les fonctions

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \chi_{A_{n,k}} + n\chi_{A_\infty}$$

sont des fonctions étagées à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
La suite (f_n) est croissante. Montrons qu'elle converge vers f.
Si $f(x)$ est fini, il existe n_0, tel que $f(x) \leq n_0$, il existe donc un intervalle $A_{n,k}$ (k