

Rachid Ellaia  
Bouchta Khaoulani

# Processus markoviens de sauts et réseaux de files d'attente

Cours, exemples et exercices corrigés



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Rappels sur la théorie de la mesure et des probabilités</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Espaces et fonctions mesurables, mesures positives</b>	<b>1</b>
1.1	Espaces et fonctions mesurables . . . . .	1
1.2	Espaces mesurés . . . . .	4
1.3	Aperçu de la théorie de l'intégration . . . . .	8
1.3.1	L'intégrale de Lebesgue . . . . .	9
1.3.2	Mesure image . . . . .	13
1.3.3	Mesures absolument continues . . . . .	14
1.3.4	Espaces produits . . . . .	15
1.4	Intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue . . . . .	16
1.5	Mesures de probabilités . . . . .	17
1.6	Indépendance d'événements . . . . .	18
1.7	Probabilité conditionnelle d'un événement . . . . .	18
1.8	Variables aléatoires . . . . .	19
1.8.1	Variables aléatoires discrètes . . . . .	19
1.8.2	Variables aléatoires absolument continues . . . . .	21
1.8.3	Variables aléatoires mixtes . . . . .	23
1.9	Convergence des suites de variables aléatoires . . . . .	23
1.9.1	L'espace $L^0$ . . . . .	23
1.9.2	Quelques inégalités très utiles . . . . .	27
1.10	Variance d'une variable aléatoire réelle . . . . .	28
1.10.1	Variance de la somme de <i>v.a.</i> indépendantes . . . . .	29
1.11	Exercices . . . . .	30
<b>2</b>	<b>Lois de probabilité d'usage courant</b>	<b>43</b>
2.1	Lois discrètes usuelles . . . . .	43
2.1.1	Loi uniforme sur un ensemble fini . . . . .	43
2.1.2	Loi de Bernoulli . . . . .	43
2.1.3	Loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ . . . . .	44

2.1.4	Loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N; n, p)$ . . . . .	45
2.1.5	Loi géométrique . . . . .	46
2.1.6	Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ . . . . .	47
2.2	Lois continues . . . . .	49
2.2.1	Loi uniforme sur $[a, b]$ . . . . .	49
2.2.2	Loi exponentielle . . . . .	49
2.2.3	Loi gamma . . . . .	50
2.2.4	Loi bêta . . . . .	50
2.2.5	Loi normale réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ . . . . .	51
2.2.6	Loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ . . . . .	51
2.2.7	Fonction génératrice d'une variable aléatoire . . . . .	51
2.2.8	Transformée de Laplace d'une variable aléatoire continue . . . . .	52
2.2.9	Fonction caractéristique . . . . .	53
2.2.10	Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ . . . . .	54
2.2.11	Indépendance . . . . .	57
2.2.12	Le théorème de changement de variable . . . . .	57
2.2.13	Produit de convolution . . . . .	59
2.2.14	Simulation de variables aléatoires . . . . .	61
2.3	Exercices . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Le calcul conditionnel</b> . . . . .	<b>71</b>
3.1	Espérance conditionnelle par rapport à une tribu . . . . .	72
3.1.1	Propriétés de l'espérance conditionnelle . . . . .	75
3.2	Espérance conditionnelle par rapport à une famille de <i>v.a.</i> . . . . .	78
3.2.1	Le calcul conditionnel . . . . .	78
3.3	Exercices . . . . .	83
<b>II</b>	<b>Chaînes de Markov et processus markoviens de sauts</b> . . . . .	<b>89</b>
<b>4</b>	<b>Les chaînes de Markov</b> . . . . .	<b>91</b>
4.1	Chaînes de Markov homogènes . . . . .	92
4.1.1	Réurrences markoviennes . . . . .	96
4.1.2	Propriété de Markov . . . . .	99
4.2	Étude dynamique d'une <i>CMH</i> . . . . .	101
4.2.1	Calcul direct de $m_{x,y}$ . . . . .	106
4.3	Classification des états . . . . .	107
4.4	Étude asymptotique d'une chaîne de Markov . . . . .	110
4.4.1	Mesures invariantes . . . . .	111
4.4.2	Théorèmes limites . . . . .	118

4.4.3	Périodicité des états . . . . .	119
4.5	Chaînes de Markov réversibles . . . . .	124
4.6	Chaînes de Markov à espaces d'états finis . . . . .	126
4.6.1	Chaînes de Markov homogènes finies absorbantes . . . . .	130
4.7	Absorption par une classe récurrente . . . . .	136
4.8	Estimation des paramètres d'une chaîne de Markov . . . . .	138
4.9	Exercices . . . . .	139
<b>5</b>	<b>Les processus de Poisson</b>	<b>149</b>
5.1	Les processus de Poisson . . . . .	149
5.1.1	Décomposition d'un processus de Poisson . . . . .	154
5.1.2	Superposition de processus de Poisson . . . . .	156
5.1.3	Comportement asymptotique . . . . .	158
5.2	Exercices . . . . .	160
<b>6</b>	<b>Les processus markoviens de sauts homogènes</b>	<b>165</b>
6.1	Définitions et exemples . . . . .	165
6.1.1	Exemple de <i>PMSH</i> : le processus de Poisson . . . . .	169
6.1.2	Temps d'arrêt . . . . .	169
6.1.3	Générateur infinitésimal et chaîne de Markov incluse . . . . .	172
6.1.4	Construction d'un <i>PMSH</i> . . . . .	181
6.1.5	Classification des états . . . . .	183
6.1.6	Théorèmes ergodique et limite . . . . .	186
6.1.7	Réversibilité . . . . .	187
6.2	Exercices . . . . .	188
<b>III</b>	<b>Systèmes et réseaux de files d'attente</b>	<b>195</b>
<b>7</b>	<b>Introduction aux systèmes de files d'attente</b>	<b>197</b>
7.1	Analyse mathématique . . . . .	199
7.1.1	Hypothèse d'indépendance . . . . .	200
7.1.2	Notations de Kandall : <i>I/S/c/K</i> ouvert . . . . .	201
7.2	Quelques résultats généraux . . . . .	201
7.2.1	La formule de Little . . . . .	203
7.3	Les processus de croissance et de décroissance . . . . .	206
<b>8</b>	<b>Les systèmes d'attente de type <i>M/M/c/K</i>, ouverts, <i>FIFO</i></b>	<b>211</b>
8.1	Systèmes d'attente <i>M/M/1</i> , ouvert, <i>FIFO</i> . . . . .	212
8.1.1	Mesures de performance . . . . .	215
8.1.2	Distribution du temps de séjour $W_s$ . . . . .	217

8.1.3	Distribution du temps d'attente dans la file $W_q$ . . . . .	218
8.2	Système d'attente $M/M/c$ ouvert, <i>FIFO</i> . . . . .	218
8.2.1	Calcul des probabilités stationnaires . . . . .	220
8.2.2	Nombre moyen asymptotique de clients dans le système d'attente $\bar{L}_s$ . . . . .	220
8.2.3	Temps moyens de séjour $\bar{W}_q$ et $\bar{W}_s$ . . . . .	220
8.2.4	Nombre moyen de stations inoccupées . . . . .	221
8.2.5	Processus de départ d'une file $M/M/c$ . . . . .	222
8.2.6	Cas particulier : systèmes d'attente $M/M/2$ . . . . .	222
8.3	Systèmes d'attente $M/M/\infty$ ouvert, <i>FIFO</i> . . . . .	223
8.3.1	Mesures de performance . . . . .	223
8.4	Systèmes d'attente $M/M/C/C$ ouvert, <i>FIFO</i> . . . . .	224
8.4.1	Mesures de performances . . . . .	225
8.5	Systèmes d'attente $M/M/c/K$ , $c \leq K$ ouvert, <i>FIFO</i> . . . . .	225
8.6	Système d'attente $M(n)/M/1/N$ . . . . .	226
8.6.1	Mesures de performances . . . . .	227
8.7	Système d'attente fermé $M(n)/M/c/K/N$ ; $c \leq K \leq N$ . . . . .	228
8.8	Exercices . . . . .	229
<b>9</b>	<b>Les systèmes d'attente <math>A/B/c</math> ouverts, <i>FIFO</i></b> . . . . .	<b>247</b>
9.1	Les systèmes d'attente $M/GI/1$ ouverts, <i>FIFO</i> . . . . .	247
9.1.1	Les formules de Pollaczek-Kintchine . . . . .	247
9.1.2	File d'attente $M/G/\infty$ . . . . .	254
9.2	Les systèmes d'attente $GI/M/1$ ouverts, <i>FIFO</i> . . . . .	255
9.3	Les systèmes d'attente $GI/GI/1$ , ouverts, <i>FIFO</i> . . . . .	259
9.3.1	Quelques lois de service utilisées . . . . .	261
9.4	Processus de sortie d'une file d'attente . . . . .	263
9.5	Exercices . . . . .	264
<b>10</b>	<b>Les réseaux de files d'attente</b> . . . . .	<b>269</b>
10.1	Les réseaux de Jackson monoclasses . . . . .	269
10.1.1	Les réseaux de Jackson ouverts monoclasse . . . . .	270
10.1.2	Calcul des indicateurs de performance . . . . .	280
10.1.3	Programmation avec le langage Python . . . . .	282
10.1.4	Files d'attente $M/M/1$ avec rebouclage . . . . .	283
10.2	Exercices . . . . .	284
10.3	Les réseaux de Jackson fermés . . . . .	293
10.3.1	Calcul de $G(N, M)$ . . . . .	298
10.3.2	Calcul des probabilités marginales . . . . .	303
10.3.3	Calcul des mesures de performances . . . . .	305

---

10.3.4	Programmation de l'algorithme de convolution . . . . .	311
10.3.5	L'algorithme MVA . . . . .	314
10.3.6	Programmation de l'algorithme <i>MVA</i> . . . . .	319
10.4	Exercices . . . . .	323
<b>11</b>	<b>Les réseaux de Baskett, Chandy, Muntz et Palecios</b>	<b>333</b>
11.1	Définitions et notations . . . . .	333
11.1.1	Discipline de service . . . . .	336
11.2	Le théorème BCMP . . . . .	336
11.2.1	Réseaux BCMP, version simplifiée . . . . .	338
11.3	Exercices . . . . .	342
<b>12</b>	<b>Réduction des réseaux de files d'attente</b>	<b>347</b>
12.1	Réduction des réseaux de Jackson ouverts . . . . .	348
12.2	Réduction des réseaux de Jackson fermés . . . . .	355
	<b>Bibliographie</b>	<b>363</b>
	<b>Index alphabétique</b>	<b>367</b>