Nicolas Fardin

12 ans d'Olympiades académiques de mathématiques

à l'usage des lycéens de Première

Une préparation
en 9 thèmes d'étude
et 75 exercices corrigés

2e édition

ellipses

Chapitre 1

Calculs de sommes

De nombreux exercices d'Olympiades font intervenir des calculs de sommes. Aussi est-il important, non seulement de connaître les formules permettant de calculer ces sommes (le plus souvent ces formules sont d'ailleurs rappelées dans les sujets proposés), mais aussi de savoir les retrouver par des approches différentes.

1.1 Somme des n premiers entiers

On considère, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, la somme :

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$

On cherche une formule explicite pour la somme S_n en fonction de n.
Nous allons l'établir de plusieurs façons.

Première méthode : par duplication.

On calcule $2 \times S_n$ en présentant les calculs sur deux lignes.

On écrit d'abord les termes de la somme dans l'ordre croissant de 1 à n sur la première ligne puis les mêmes termes dans l'ordre décroissant de n à 1 sur la deuxième ligne.

Ensuite on ajoute les deux lignes terme à terme en colonne.

On obtient ainsi :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
S_n & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n \\
S_n & = & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2\,S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

Le membre de droite de la dernière égalité comporte n termes indexés de 1 à n par les termes de la première ligne. On en déduit $2\,S_n = n \times (n+1)$.

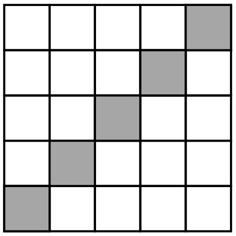
Proposition 1.1.1.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

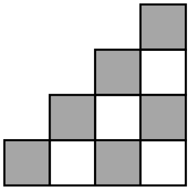
$$\boxed{1+2+\cdots+n=\frac{n\,(n+1)}{2}.}$$

Deuxième méthode : par double comptage sur une grille $n \times n$.

Donnons le principe en prenant l'exemple d'une grille 5×5.

Au total, la grille compte $5^2 = 25$ carrés de côté unité et 5 carrés forment la grande diagonale.





De chaque côté de la grande diagonale, on dénombre, en observant les carrés suivant les diagonales montantes de la grille, 1 puis 2 puis 3 puis 4 carrés *(sur le dessin ci-contre, les diagonales montantes de 2 et 4 carrés apparaissent grisées).*

On en compte donc $1+2+3+4 = S_4$.

Le nombre total de carrés de la grille 5×5 vaut donc aussi $2\,S_4 + 5$.

Ce double-comptage conduit à l'égalité : $5^2 = 2S_4 + 5$ soit $S_4 = \dfrac{5^2-5}{2}$,

ou encore : $S_4 = \dfrac{5 \times (5-1)}{2} = \dfrac{(4+1) \times 4}{2}$.

Le même raisonnement appliqué cette fois à une grille $(n+1) \times (n+1)$ donne alors :

$$S_n = \frac{(n+1) \times n}{2}.$$

Troisième méthode : par emploi d'un domino.

On remarque que pour tout entier naturel k non nul :

$$2 \times k = (k+1) \times k - k \times (k-1)\,.$$

On peut donc écrire, en prenant $k=1$: $2 \times 1 = [2 \times 1 - 1 \times 0]$.

De même, pour $k = 2$: $2 \times 2 = [3 \times 2 - 2 \times 1]$; pour $k = 3$: $2 \times 3 = [4 \times 3 - 3 \times 2]$, etc., jusqu'à $k = n$: $2 \times n = [(n+1) \times n - n \times (n-1)]$.

On en déduit la somme :

$$2 \times n + \cdots + 2 \times 1 = [(n+1) \times n - n \times (n-1)] + [n \times (n-1) - (n-1) \times (n-2)] + \cdots$$
$$\cdots + [4 \times 3 - 3 \times 2] + [3 \times 2 - 2 \times 1] + [2 \times 1 - 1 \times 0].$$

Le membre de droite de cette égalité s'appelle **une somme domino**.

Quel est le rapport avec le jeu de dominos ? Dans la somme, chaque crochet fait penser à un domino et la somme se réduit, après simplification, à la somme des termes extrêmes de la même façon, qu'aux dominos, les dés jouables sont situés aux deux bouts de la chaîne.

Par exemple :

$$[5 \times 4 - \underbrace{4 \times 3] + [4 \times 3}_{=0} - \underbrace{3 \times 2] + [3 \times 2}_{=0} - \underbrace{2 \times 1] + [2 \times 1}_{=0} - 1 \times 0] = [5 \times 4 - 1 \times 0]$$

Finalement, on obtient :

$2 \times n + \cdots + 2 \times 2 + 2 \times 1 = [(n+1) \times n - 1 \times 0]$ (principe des dominos).

Après factorisation par 2 du membre de gauche :

$2 \times (n + \cdots + 2 + 1) = (n+1) \times n$, soit $2\,S_n = (n+1) \times n$

et on retrouve : $S_n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$.

Au passage, on a obtenu une formule pour la somme des n premiers entiers naturels non nuls pairs :

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n - 2 + 2n = [(n+1) \times n - 1 \times 0] = n\,(n+1)\,.$$

1.2 Le symbole de somme $\sum$

On considère la somme de n réels $a_1, a_2, \cdots, a_n$: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Le symbole de somme, $\sum$, permet d'écrire cette somme de manière plus condensée et sans ambiguïté :

$$\boxed{a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.}$$

La variable k qui apparaît est appelée **variable d'indice** ou, plus simplement, **l'indice de la somme**.

Cette variable k parcourt l'ensemble des entiers naturels de 1 jusqu'à n, ce qui fait que la somme compte n termes.

1 et n sont les bornes, respectivement inférieure et supérieure, de la somme.

La variable d'indice est une variable dite **muette**, ce qui signifie que l'on peut changer le nom de la variable d'indice sans altérer la signification de la notation.

Ainsi, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$

Remarque. En pratique, on peut employer les deux notations, celle utilisant le symbole de somme et celle en extension avec les points de suspension.

On écrira donc par la suite : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$

D'un point de vue algorithmique, la variable k joue le rôle de la variable k d'une boucle itérative Pour - Fin pour.

Observer l'analogie avec le programme suivant :

```
from math import *

def somme(n):
  s=0
  for k in range(n):
    s+=(k+1)
  return s
```

```
>>> somme(10)
55
```

L'instruction `somme(n)` retourne, pour la valeur de n choisie, par exemple $n = 10$ ci-dessus dans la console , la somme des entiers de 1 à n.

Signalons aussi une propriété importante du symbole $\sum$: sa **linéarité**.

Soit $a_1, a_2, \cdots, a_n$ et $b_1, b_2, \cdots, b_n$ des réels. Soit α un réel quelconque.

On a :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} (a_k + \alpha\, b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \alpha \sum_{k=1}^{n} b_k.}$$

Détaillons cette propriété de linéarité dans le cas particulier où $n = 3$.

$$\sum_{k=1}^{3} (a_k + \alpha\, b_k) = (a_1 + \alpha\, b_1) + (a_2 + \alpha\, b_2) + (a_3 + \alpha\, b_3).$$

On regroupe les termes a_n entre eux et les termes $\alpha\, b_n$ entre eux :

$$\sum_{k=1}^{3}(a_k+\alpha\, b_k)=(a_1+a_2+a_3)+(\alpha\, b_1+\alpha\, b_2+\alpha\, b_3)=\sum_{k=1}^{3} a_k\ +\ \sum_{k=1}^{3}(\alpha\, b_k).$$

On factorise la deuxième parenthèse par le facteur commun α :

$$\sum_{k=1}^{3}(a_k+\alpha\, b_k)=(a_1+a_2+a_3)+\alpha\,(b_1+b_2+b_3)=\sum_{k=1}^{3} a_k\ +\ \alpha\sum_{k=1}^{3} b_k.$$

Remarque. Prendre garde au fait que l'on peut « sortir » le facteur α de l'argument du signe somme parce que ce facteur α ne dépend pas de la variable d'indice k.

Nous avons rencontré la propriété avec la somme des n premiers entiers naturels pairs :

$$\sum_{k=1}^{n}(2k)=2\sum_{k=1}^{n}k=2\times\frac{n(n+1)}{2}=n\,(n+1).$$

1.3 Somme des n premiers nombres impairs

Il s'agit de donner une formule, en fonction de n, de la somme :

$$T_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1).$$

Première méthode : par duplication.

On calcule le double de la somme :

$$\begin{array}{ccccccccccc} T_n & = & 1 & + & 3 & + & \cdots & + & (2n-3) & + & (2n-1) \\ T_n & = & (2n-1) & + & (2n-3) & + & \cdots & + & 3 & + & 1 \\ \hline 2\,T_n & = & 2n & + & 2n & + & \cdots & + & 2n & + & 2n \end{array}$$

On en déduit $2\,T_n=(2n)\times n$ soit après simplification par 2 : $T_n=n^2$.

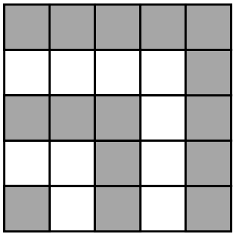
Proposition 1.3.1.
Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$:

$$\boxed{1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.}$$

Deuxième méthode : par double comptage sur une grille $n \times n$.

Donnons le principe en prenant l'exemple d'une grille 5×5.

Au total, la grille compte $5^2 = 25$ carrés de côté unité.



Sur la grille, les « chevrons » alternativement grisés et clairs contiennent un nombre impair de carrés.

Par conséquent, 25 s'obtient comme une somme de nombres impairs :

$5^2 = 25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$. On remarque que $9 = 2 \times 5 - 1$ et on en déduit :

$5^2 = 1+3+5+7+9 = (2\times 1 - 1) + (2 \times 2 - 1) + (2 \times 3 - 1) + (2 \times 4 - 1) + (2 \times 5 - 1)$.

Sur une grille $n \times n$, le raisonnement précédent conduit à l'égalité :

$$n \times n = n^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)\,.$$

Troisième méthode : par emploi d'un domino.

L'identité remarquable : $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$ permet d'écrire un nombre impair comme différence de deux carrés consécutifs :

$$2a + 1 = (a+1)^2 - a^2.$$

On obtient ainsi le domino $\left[(a+1)^2 - a^2\right]$.

Par conséquent : $T_n = \left[n^2 - (n-1)^2\right] + \left[(n-1)^2 - (n-2)^2\right] + \cdots + \left[1^2 - 0^2\right] = n^2$.

1.4 Généralisation

On étend les calculs qui précèdent aux sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique.

On considère une suite arithmétique (u_n) de raison r et on cherche à calculer la somme :

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n \quad \text{où} \quad 0 \leqslant p \leqslant n.$$

On utilise la méthode par duplication.

$$\begin{array}{rcccccccccc} S & = & u_p & + & u_{p+1} & + & \cdots & + & u_{n-1} & + & u_n \\ S & = & u_n & + & u_{n-1} & + & \cdots & + & u_{p+1} & + & u_p \\ \hline 2\,S & = & (u_p+u_n) & + & (u_{p+1}+u_{n-1}) & + & \cdots & + & (u_{n-1}+u_{p+1}) & + & (u_n+u_p) \end{array}$$

Dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus, chacune des parenthèses est de la forme $(u_{p+k}+u_{n-k})$ avec $0 \leqslant k \leqslant n-p$.

Or, puisque la suite (u_n) est arithmétique de raison r,

$$u_{p+k} = u_p + k \times r \quad \text{et} \quad u_{n-k} = u_n - k \times r.$$

On en déduit que, pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n-p$:

$$(u_{p+k}+u_{n-k}) = (u_p+u_n)\,.$$

On obtient : $2\,S = (u_n+u_p) + (u_n+u_p) + \cdots + (u_n+u_p)$.

On observe maintenant que dans le membre de droite, figurent autant de parenthèses que de termes dans la somme S.

On compte ce nombre de termes :

$S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n$;

$S = u_{(p-1)+1} + u_{(p-1)+2} + \cdots + u_{(p-1)+(n-p)} + u_{(p-1)+(n-p+1)}$.

L'indexation des termes ci-dessus montre que la somme S comporte $(n-p+1)$ termes.

Par conséquent,

$$\boxed{u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n-p+1) \times \frac{u_p+u_n}{2}.}$$

On retient :

Proposition 1.4.1.
Une somme formée de termes ***consécutifs*** *d'une suite arithmétique est égale au nombre de termes de la somme multiplié par la moyenne des deux termes extrêmes de cette somme :*

$$\boxed{S = \textit{nbre de termes} \times \frac{\textit{premier terme} + \textit{dernier terme}}{2}.}$$

1.5 Somme des n premiers cubes

On considère la somme des premiers cubes : $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

Il est remarquable que cette somme soit égale au carré de la somme des n premiers entiers.

Proposition 1.5.1. *Pour tout entier $n \geqslant 1$,*

$$\boxed{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.}$$

Preuve.

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{k(k-1)}{2}\right)^2 = \left[\frac{k(k+1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2}\right] \times \left[\frac{k(k+1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2}\right];$$

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{k(k-1)}{2}\right)^2 = k^2 \times k = k^3.$$

Principe des dominos : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{1 \times (1-1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

On peut retrouver ce résultat par double comptage sur une grille carrée $m \times m$.