

BASES ET TECHNIQUES AVANCEES EN TRAITEMENT DU SIGNAL

Du capteur à la mesure

2^e éd.



Patrick Nayman

ellipses

1.1. Introduction

La classification des signaux en catégories même si elle peut sembler, à première vue, théorique et d'un intérêt limité, présente cependant quelques avantages. L'idée est que pour chaque rubrique de signaux on définira des traitements bien particuliers. Il semble assez intuitif que les signaux à caractère déterministe (prévisibles ou certains) soient différents des signaux dits aléatoires (ou non-prévisible). Chacune de ces catégories demande des traitements spécifiques.

Un autre type de classification est possible selon que l'on soit capable de définir la puissance ou l'énergie d'un signal. Les signaux de type distribution forment également une catégorie particulière.

Dans une seconde partie, on montre l'intérêt simplificateur d'utiliser une représentation vectorielle des signaux dans une base orthonormée. Finalement, on démontrera le fameux théorème de Parseval, qui explicite que l'énergie d'un signal est égale à la somme des énergies de ses composantes et ne dépend pas de son mode de représentation. Cet énoncé est largement utilisé dans cet ouvrage.

1.2. Classification déterministe-aléatoire

1.2.1. Déterministes

Ce sont les signaux dont l'évolution en fonction du temps est prévisible par un modèle mathématique approprié (signaux de test, d'étalonnage, etc.) sont à caractère déterministe.

1.2.2. Aléatoires

Ce sont les signaux qui ont un caractère non-reproductible et imprévisible. Par exemple, les signaux issus de capteurs ou encore la parole sont à caractère aléatoire.

1.3. Classification énergétique

Notions d'énergie et de puissance d'un signal

Quel que soit le signal, on peut définir l'énergie du signal (si elle existe) par (1.1).

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1.1)$$

L'énergie d'un signal correspond à l'aire sous la courbe du carré du signal et s'exprime en joule (J).

La puissance moyenne (si elle existe) peut être définie par (1.2).

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt \quad (1.2)$$

La puissance est une énergie par seconde et s'exprime en watt (W).

Remarque 1

En traitement du signal, il est très courant de considérer qu'une grandeur élevée au carré est assimilable à une puissance ou à une énergie dans une résistance de 1 ohm.

Remarque 2

- *Les signaux tels que $0 < E_x < \infty$ sont des signaux à énergie finie ($P_x = 0$). Par exemple, les signaux transitoires sont des signaux à énergie finie.*
- *Les signaux tels que $0 < P_x < \infty$ sont des signaux à puissance moyenne finie ($E_x = \infty$). Par exemple, les signaux permanents, comme les signaux périodiques ou encore les signaux aléatoires permanents, sont à puissance moyenne finie.*
- *Ces signaux font partie de l'espace L^2 des signaux de carré intégrable.*

L'équation 1.3 donne une autre définition de la puissance moyenne.

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^T |x(t)|^2 dt \quad (1.3)$$

1.4. Autres types de signaux

1.4.1. La distribution de Dirac

Une propriété fondamentale de la distribution de Dirac est donnée par la formule suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.4)$$

La particularité de cette distribution est d'avoir une valeur unique (∞) au point d'abscisse 0.

On peut imaginer de nombreuses représentations de la distribution de Dirac. La figure 1.1 propose deux représentations possibles. Dans ce cas, on suppose que : $\varepsilon \rightarrow 0$. On remarquera que l'intégrale (1.4) est bien vérifiée.

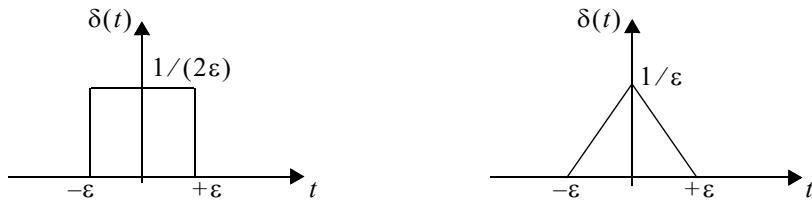


Figure 1.1 : impulsion de Dirac

1.4.2. Le peigne de Dirac

Un peigne de Dirac est une suite d'impulsions de Dirac décalées dans le temps. Le peigne de Dirac est défini par (1.5).

$$png(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \quad (1.5)$$

1.4.3. Les signaux nuls à gauche

Exemple 1.1. : l'échelon unité.

L'échelon unité est un signal nul à gauche, c'est-à-dire que $U(t) = 0$ pour $t < 0$.

La figure 1.2 représente l'échelon unité $U(t)$

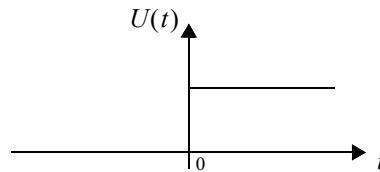


Figure 1.2 : le signal nul à gauche

On remarquera que la dérivée de l'échelon unité est une impulsion de Dirac : $\frac{d(U(t))}{dt} = \delta(t)$.

Exemple 1.2. : signal nul à gauche.

Pour spécifier que le signal $x(t)$ est nul pour les temps négatifs, on peut définir un nouveau signal $y(t)$ tel que : $y(t) = x(t) \cdot U(t)$.

1.5. Classification continu/discret

La figure 1.3 est un exemple de représentation d'un signal continu ou analogique.

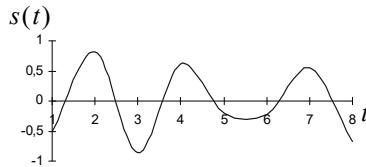


Figure 1.3 : représentation continue d'un signal

La figure 1.4 est un exemple de représentation discrète du signal analogique de la figure 1.3, dans ce cas le signal est défini par une suite d'échantillons.

Les signaux continus se prêtent bien à un traitement analogique alors que les signaux discrets seront utiles lors du processus de conversion analogique-numérique ainsi que pour le traitement numérique.

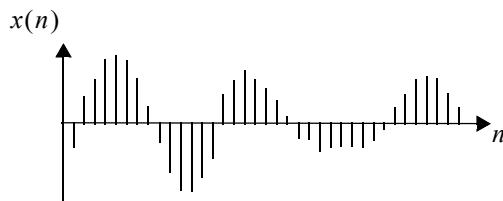


Figure 1.4 : représentation discrète d'un signal

1.6. Représentation vectorielle des signaux

1.6.1. L'intérêt d'une représentation vectorielle

L'idée est de décomposer le signal $x(t)$ en une combinaison linéaire de fonctions connues $\phi_k(t)$ pondérées par des coefficients a_k .

Les coefficients a_k constituent une représentation discrète du signal $x(t)$.

On obtient dans ce cas une structure d'espace vectoriel.

Un signal apparaît comme un vecteur d'un espace vectoriel et admettra plusieurs représentations possibles selon la base de décomposition (espace de Hilbert). Cette représentation qui peut, dans un premier temps, apparaître complexe permet en fait de considérablement simplifier les calculs comme nous allons le montrer.

1.6.2. Espace vectoriel des signaux

Soit $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux signaux complexes, d'énergie finie E_x , appartenant au même espace L^2 des signaux $x(t)$.

$(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2^*(t)dt$ représente le produit scalaire de x_1 et de x_2 .

$$d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\| = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt \right]^{1/2}.$$

$d(x_1, x_2)$ représente la distance associée, c'est la mesure de dissemblance entre $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

1.6.2.1 Forme hermitienne

Le produit scalaire $(f, g) = \langle \overline{g}, f \rangle$ est appelé forme hermitienne.

1.6.3. Développement en série de fonctions orthogonales

Dans un premier temps, considérons un signal \vec{x} que l'on désire décomposer dans une base à 2 éléments $\vec{\phi}_1$ et $\vec{\phi}_2$ (figure 1.5).

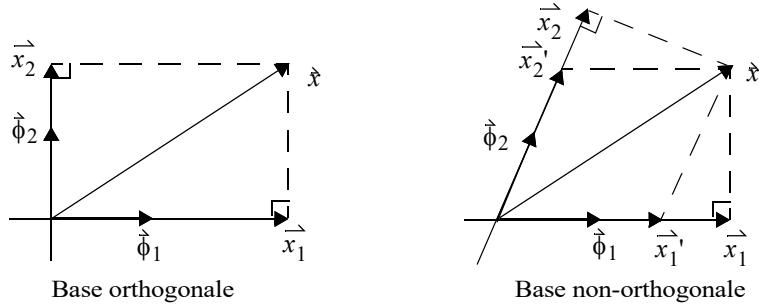


Figure 1.5 : un signal dans une base orthogonale et dans une base non-orthogonale

Dans le cas d'une base orthogonale, le signal peut être défini en fonction de ses projections : $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, $\vec{x}_1 = a_1 \vec{\phi}_1$ et $\vec{x}_2 = a_2 \vec{\phi}_2$.

$$\vec{x} = a_1 \vec{\phi}_1 + a_2 \vec{\phi}_2 \quad (1.6)$$

Le produit scalaire de \vec{x} et $\vec{\phi}_1$ permet de déterminer le coefficient a_1 associé :

$$(\hat{x}, \hat{\phi}_1) = (a_1 \hat{\phi}_1 + a_2 \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_1) = a_1 (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_1) + a_2 (\hat{\phi}_2, \hat{\phi}_1).$$

Comme la base est orthogonale : $(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_1) = 1$ et $(\hat{\phi}_2, \hat{\phi}_1) = 0$.

$$(\hat{x}, \hat{\phi}_1) = a_1 \quad (1.7)$$

Un seul produit scalaire suffit pour déterminer un coefficient. Ce dernier est indépendant des autres coefficients.

On généralise facilement (1.6), dans le cas d'une base orthogonale à n éléments :

$$\hat{x} = \sum_i a_i \hat{\phi}_i \quad (1.8)$$

L'équation 1.7 devient :

$$(\hat{x}, \hat{\phi}_i) = \left(\sum_i a_i \hat{\phi}_i, \hat{\phi}_i \right) = a_i \quad (1.9)$$

Dans le cas d'une base non-orthogonale, on ne peut plus reconstruire le signal à partir de ses seules projections : $\hat{x} \neq \hat{x}_1 + \hat{x}_2$. Il est nécessaire de trouver un jeu de vecteurs tel que : $\hat{x} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$ (figure 1.5). Pour le calcul d'un coefficient, tous les vecteurs de la base vont intervenir ce qui peut rapidement devenir compliqué.

Lorsque les signaux appartiennent à une base vectorielle orthogonale les calculs sont considérablement simplifiés, la détermination d'un coefficient s'obtient par un simple produit scalaire, en effet considérons $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ un ensemble de fonctions orthogonales. Le produit scalaire $(\phi_i, \phi_j) = \delta_{i,j}$ est tel que :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

On peut approcher $x(t)$ par la quantité $\hat{x}(t)$ définie par la relation suivante :

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \phi_i.$$

L'erreur quadratique donne une mesure absolue de cette approximation :

$$\varepsilon = \|x - \hat{x}\|^2 = \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t) - \hat{x}(t)|^2 dt$$

Il est évident que l'on cherchera à obtenir une erreur la plus petite possible.

On montre que ε est minimal si (1.10) est vérifiée.

$$a_i = (x, \phi_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \phi_i^* dt \quad (1.10)$$

On dit que le système est complet si quel que soit $x(t) : \lim_{T \rightarrow \infty} \varepsilon = 0$.

La démonstration de (1.10) est proposée dans le paragraphe 1.6.4. dans le cadre du théorème de Parseval.

1.6.4. Théorème de Parseval

L'énergie du signal $x(t)$ est égale à la somme des énergies de chacune de ses composantes. Ce résultat important est très utilisé en traitement du signal. On parle également d'égalité de Parseval.

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \quad (1.11)$$

C'est l'égalité de Parseval : l'énergie de x est égale à la somme des énergies de ses composantes. L'énergie totale ne dépend pas de la représentation temporelle ou fréquentielle.

Démonstration

Rappel : $|A - B|^2 = (A - B)(A - B)^ = AA^* + BB^* - AB^* - A^*B$.*

$$\varepsilon = \|x - \hat{x}\|^2 = \int |x - \sum a_i \phi_i|^2 dt.$$

$$\varepsilon = \int (xx^* + \hat{x}\hat{x}^* - x\hat{x}^* - \hat{x}x^*) dt = \|x\|^2 + \|\hat{x}\|^2 - \int x\hat{x}^* dt - \int \hat{x}x^* dt.$$

$$\hat{x} = \sum a_i \phi_i.$$

$$\|\hat{x}\|^2 = \int \hat{x}\hat{x}^* dt = \int \sum_i a_i \phi_i \sum_j a_j^* \phi_j^* dt = \sum |a_i|^2.$$

$$\text{Rappel : } \int \phi_i \phi_j^* dt = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}.$$

$$\varepsilon = \|x\|^2 + \sum |a_i|^2 - \int x \sum_i a_i^* \phi_i^* dt - \int x^* \sum_i a_i \phi_i dt.$$

$$\varepsilon = \|x\|^2 + \sum (|a_i|^2 - \int x a_i^* \phi_i^* dt - \int x^* a_i \phi_i dt) \varepsilon = \|x\|^2 + \sum (|a_i|^2 - a_i^* (x, \phi_i) - a_i (\phi_i, x)).$$

$$(\phi_i x) = \int \phi_i x^* dt \quad (x^*, \phi_i) = \int x^* \phi_i dt.$$

Donc : $(\phi_i x) = (x^*, \phi_i)$.

$$\varepsilon = \|x\|^2 + \sum (|a_i|^2 - a_i^*(x, \phi_i) - a_i(x^*, \phi_i^*)) \quad \varepsilon = \|x\|^2 + \sum [|a_i|^2 - a_i^*(x, \phi_i) - a_i(x^*, \phi_i^*)].$$

$$\varepsilon = \|x\|^2 - \sum |(x, \phi_i)|^2 + \sum [|a_i|^2 + |(x, \phi_i)|^2 - a_i^*(x, \phi_i) - a_i(x^*, \phi_i^*)].$$

$$\varepsilon = \|x\|^2 - \sum |(x, \phi_i)|^2 + \sum |a_i - (x, \phi_i)|^2.$$

De l'équation précédente, on trouve que l'erreur ε est minimale si : $\forall i \quad a_i = (x, \phi_i)$.

Dans ce cas $\varepsilon_{min} = \|x\|^2 - \sum_i |a_i|^2$.

D'où l'inégalité de Bessel-Parseval :

$$\sum_i |a_i|^2 \leq \|x\|^2 \quad (1.12)$$

Le système est complet ou total si $\forall i$:

$$\sum_i |a_i|^2 = \|x\|^2 \quad (1.13)$$