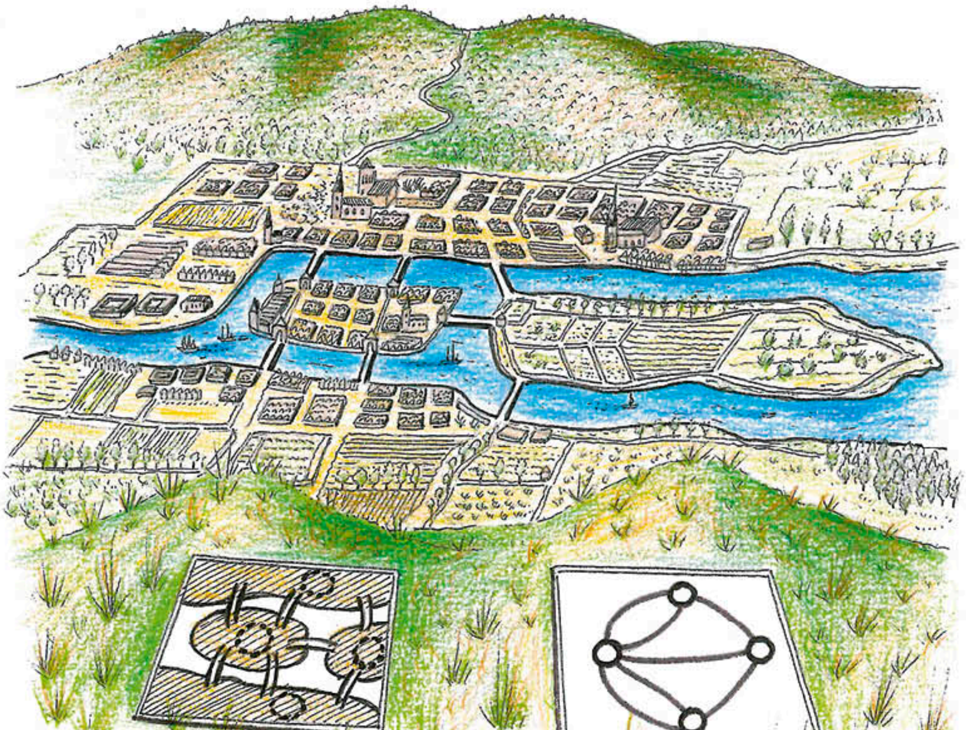
FONCTIONS & DONNÉES

De récits en théorèmes

Victor **Delétang**



Illustrations de
Nicolas Jambon

ellipses

CHAPITRE 1

GRANDEURS PROPORTIONNELLES ET AFFINES

Nous allons débuter ce livre par l'étude de la relation la plus simple qui puisse lier des grandeurs entre elles : la proportionnalité ! Elle répond à des questions que les hommes ont dû se poser il y a bien longtemps déjà : combien de nourriture pour une tribu deux fois plus grande ? combien de bois pour construire trois huttes au lieu de deux ?

On la retrouve ainsi dès le 17^{e} siècle avant J.-C., dans les problèmes du Papyrus Ahmès, en Égypte, ou encore dans les problèmes d'entraînement du *Jiu Zhang Suan Shu*[1], compilé en Chine entre le 10^{e} siècle avant J.-C. et le 2^{e} siècle après J.-C. ; ces deux documents reflétaient les connaissances nécessaires aux comptables, administrateurs, fonctionnaires, marchands et les méthodes de résolution de problèmes issues de la proportionnalité en faisaient logiquement partie !

Quinze siècles plus tard, la proportionnalité apparaissait, sous une forme déjà plus abstraite, dans la théorie des proportions d'Euclide. Mais qu'entend-on par « abstrait », ce mot qui revient si souvent en mathématiques ? Chez Euclide, il ne s'agissait plus de résoudre des problèmes pratiques mais de décrire, en toute généralité, des proportions entre nombres ou entre figures. Ainsi, les objets mathématiques naissent souvent de problèmes concrets : les fonctions de l'observation des lois physiques du monde qui nous entoure, les statistiques de la nécessité de gérer des royaumes ou des empires, les probabilités des jeux de hasard ; mais le propre des mathématiques est de créer des « idées[2] » abstraites qui permettent de répondre à ces problèmes…

On retrouve ensuite la proportionnalité dans l'ensemble des mathématiques : en théorie des nombres, dans les fractions ; en algèbre, dans les méthodes de résolution des équations linéaires ; en géométrie, dans les

1. Dont le titre signifie *« Neuf Chapitres sur l'art du calcul »*.
2. Pour les philosophes grecs et en particulier Platon, le plus célèbre d'entre eux, les idées nous permettent d'accéder à des vérités que nos sens nous cachent !

agrandissements et les réductions de figures semblables ; et, bien plus tard, après l'avènement du calcul littéral, sous la forme de fonctions linéaires ; enfin, elle est encore au centre de la structure d'espace vectoriel !

1 Proportionnalité

COLLÈGE

1 Définitions et méthodes multiplicatives

COLLÈGE

Dans la vie « courante », on utilise **la proportionnalité** à chaque fois que deux grandeurs (poids, tailles, prix, distances, aires, volumes, intensités, tensions, puissances, temps, etc.) dépendent l'une de l'autre par une simple multiplication par un facteur constant. Par exemple, la quantité de laine produite par un troupeau de mouton se déduit par une multiplication du nombre de bêtes ; de la même façon, on multiplie le temps de la chevauchée pour trouver la distance parcourue par un cheval au trot.

Le papyrus Ahmès s'attardait, lui, sur des problèmes de dilution de bière, peu adaptés à des lecteurs mineurs ; quant au *Jiu Zhang Suan Shu*, il traitait de problèmes commerciaux, un peu arides, liés aux échanges de différents types de céréales, voire de problèmes d'emprunts et de taux d'intérêt.

Développons donc plutôt nos exemples animaliers... Si 10 moutons produisent $10 \times 5 = 50$ kilogrammes de laine par tonte alors 25 bêtes en produisent $25 \times 5 = 125$ kilogrammes. Le cheval parcourt en 10 minutes $10 \times 250 = 2\,500$ mètres et en 1 heure pas moins de $60 \times 250 = 15\,000$ mètres !

Le nombre par lequel on multiplie une grandeur – nombre de bêtes ou temps dans nos exemples – pour obtenir l'autre grandeur s'appelle le **coefficient de proportionnalité** ; il vaut 5 dans l'exemple de la tonte et 250 dans celui de la chevauchée[3].

En mathématiques, la proportionnalité relie, de manière plus abstraite, des séries de nombres entre elles, dès lors que l'on passe de l'une à l'autre par une multiplication par un facteur identique. On la représente souvent sous forme de tableau, chaque série figurant sur une ligne ; l'utilisation d'un tableau pour établir un lien entre deux grandeurs sera d'ailleurs la

3. S'agissant de grandeurs physiques, les coefficients de proportionnalité ont des unités, correspondant à celles des grandeurs. Par exemple, dans le cas de la chevauchée, le coefficient de proportionnalité – égal à 250 – est ici une vitesse, exprimée en mètres par minute.

première manière de représenter des fonctions au chap. 4 sect. 3 ss-sect. 1, avant que le calcul littéral ne leur donne un visage de nombres, de lettres et d'opérations mêlés.

Reprenons l'exemple numérique correspondant à notre cheval au trot… on passe de la première ligne à la deuxième en multipliant chaque nombre par 250 :

temps (en minutes)	**10**	**20**	**35**	**60**
distance (en mètres)	2 500	5 000	8 750	15 000

$\times 250$

De cet exemple, nous pouvons tirer plusieurs remarques…

D'abord, la proportionnalité est « réversible » : si on passe de la première ligne à la seconde en multipliant par 250 alors on passe de la seconde à la première en divisant par 250 ; dès que l'on maîtrise un peu les opérations, on sait que cela revient à multiplier par $\frac{1}{250} = 0{,}004$!

Ensuite, on remarque qu'il existe aussi un **coefficient multiplicateur** entre colonnes ; par exemple, on passe de la première colonne à la deuxième, en multipliant par 2 ou bien de la deuxième à la quatrième en multipliant par 3 !

À défaut de démontrer ces propriétés dans le cas général, ce que nous ferons dès la sous-section suivante, on peut compléter notre tableau :

$\times 0{,}004$

10	**20**	**35**	**60**
2 500	5 000	8 750	15 000

$\times 250$

$\times 2$ $\times 3$

De ces observations découlent toute une série de méthodes de calcul permettant de trouver la valeur d'une des grandeurs lorsqu'on en connaît trois autres… on appelle cette grandeur manquante **la quatrième proportionnelle** !

Imaginons que deux grandeurs soient proportionnelles et que l'on cherche à déterminer les nombres correspondants aux points d'interrogations, dans le tableau ci-dessous :

5	**12**	**?**
17	?	34

On peut trouver la valeur du point d'interrogation du bas à l'aide du coefficient de proportionnalité ; encore faut-il calculer celui-ci... Il s'agit du nombre qui multiplié par 5 donne 17 : les mathématiques modernes nous indiquent que ce nombre est le résultat de la division $17 \div 5 = 3{,}4$! Il ne nous reste plus alors qu'à multiplier 12 par ce même coefficient :

$$? = 12 \times 3{,}4 = 40{,}8$$

Pour déterminer la valeur du point d'interrogation du haut, le plus simple est de constater que l'on passe de la première colonne à la dernière en multipliant par 2... on en déduit :

$$? = 5 \times 2 = 10$$

Les applications de la proportionnalité sont innombrables : égalités de fractions, figures semblables, algèbre linéaire, etc.

Attention cependant à ne pas se laisser charmer par la simplicité de ces calculs ! Bien des grandeurs et séries de nombres ne sont pas du tout proportionnelles entre elles ; d'autres fonctions peuvent décrire les liens existants entre grandeurs : addition, puissances, racines carrées, etc.

2 Rapports et fractions

COLLÈGE

Il n'est pas étonnant qu'Euclide ait fait de la proportionnalité une notion centrale de ses *Éléments* ; les termes qu'il utilisait pour la décrire peuvent paraître un peu compliqués car Euclide ne considérait que des grandeurs de même nature (essentiellement des longueurs) et, surtout, il ne divisait pas les grandeurs entre elles, il ne faisait que comparer leurs rapports :

> *« On dit de quatre grandeurs a, b, c, d prises dans cet ordre, que la première est à la deuxième dans le même rapport que la troisième est à la quatrième, quand n'importe quel équimultiple de la première et de la troisième grandeur est en même temps et respectivement soit supérieur, soit égal, soit inférieur à n'importe quel autre équimultiple de la deuxième et de la quatrième grandeur. »*

Vous constatez bien ici ce que l'absence de calcul littéral pouvait produire comme complexité. Ainsi, pour les Grecs d'abord, et jusqu'au Moyen Âge, deux grandeurs proportionnelles étaient « en rapport », noté $a : b$. Mais à aucun moment ce rapport n'était considéré comme étant lui-même un nombre !

Si deux grandeurs étaient dans le même rapport, on notait $a : b :: c : d$ ou bien on écrivait, comme Euclide, que « a est à b ce que c est à d ». Comme Euclide n'utilisait pas directement les quotients $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, il était contraint à la définition un peu alambiquée ci-dessus : si on multiplie a et c par le même nombre – p – et b et d par un même autre nombre – q – alors les les multiples pa et pc sont dans la même relation d'ordre par rapport à qb et qd !

Heureusement, nous avons, nous, à notre disposition, deux mille ans plus tard, la théorie des nombres et le calcul littéral ; nous n'allons pas nous priver de les utiliser pour formaliser un peu mieux les propriétés de la proportionnalité, mises en évidence dans la sous-section précédente...

Deux grandeurs, représentées par des séries de nombres a, b, c, d... et A, B, C, D... sont donc proportionnelles si on passe de l'une à l'autre en multipliant par un même coefficient de proportionnalité k :

$$A = ka \; ; B = kb \; ; C = kc \; ; D = kd\ldots$$

On peut alors écrire la même chose à l'aide de quotients :

$$k = \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d}\ldots$$

ou, en inversant tous les membres de l'égalité précédente :

$$\frac{1}{k} = \frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{d}{D}$$

$$a = \frac{1}{k}A \; ; b = \frac{1}{k}B \; ; c = \frac{1}{k}C \; ; d = \frac{1}{k}D\ldots$$

donc on passe également de la seconde grandeur à la première en multipliant par un même coefficient de proportionnalité $\frac{1}{k}$!

En reprenant les égalités de départ, on retrouve également l'existence de coefficients multiplicateurs entre valeurs des grandeurs ; par exemple :

$$\frac{D}{B} = \frac{\cancel{k}d}{\cancel{k}b} = \frac{d}{b}$$

On peut même ajouter une autre propriété à celles découvertes dans le paragraphe précédent ; les sommes et différences de chacune des grandeurs restent proportionnelles :

$$A + B = ka + kb = k(a + b)$$

Cette propriété est souvent utilisée instinctivement pour résoudre certains problèmes : si un cheval parcourt 14 kilomètres en une heure et 3,5 kilomètres en un quart d'heure, on combine ces données pour trouver la distance qu'il parcourra en deux heures et quart : $14 + 14 + 3{,}5 = 31{,}5$ kilomètres.

De manière plus théorique, ces différentes propriétés sont des conséquences directes de **la linéarité** de la relation de proportionnalité[4].

Nous pouvons alors démontrer la très pratique **égalité des produits en croix** entre fractions égales ; si $\frac{D}{B}=\frac{d}{b}$:

$$D\times b=d\times B$$

Cette égalité nous fournit un nouveau moyen de trouver des valeurs inconnues de grandeurs liées par une relation de proportionnalité :

a	*b*	?
A	?	*C*

D'après ce qui précède, on obtient pour le point d'interrogation du bas :

$$A\times b=a\times ?$$

d'où la célèbre « règle de trois », désormais abusivement renommée « produit en croix » :

$$\boxed{?=A\times b\div a}$$

On trouve de la même façon, pour le point d'interrogation du haut :

$$?=a\times C\div A \text{ ou } ?=b\times C\div\left(A\times b\div a\right)$$

3 Représentation graphique

COLLÈGE

Pour représenter le lien entre deux grandeurs on peut utiliser des tableaux, comme les tableaux de proportionnalité ou, pour mieux visualiser encore ce lien, des courbes !

On se sert alors de deux axes gradués – un pour chaque grandeur – et on place des points correspondants aux valeurs associées ; on finit par relier tous ces points en une courbe...

Reprenons l'exemple de notre cheval au trot, et utilisons l'axe horizontal pour figurer le temps de chevauchée en minutes et l'axe vertical pour la distance parcourue en kilomètres :

4. Ou de la fonction $f\left(x\right)=kx$.

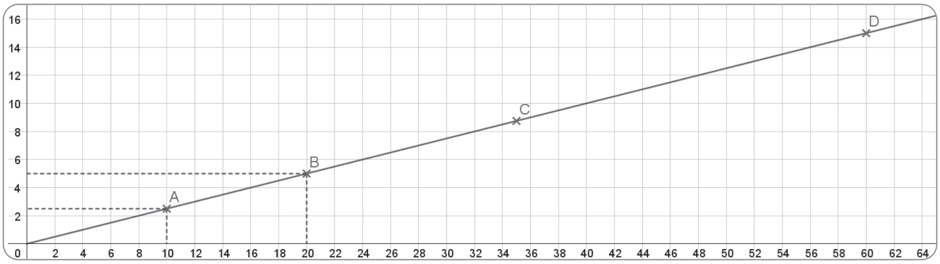


Figure 1 – Droite entre grandeurs proportionnelles

On relie ces points en une droite qui passe par l'origine commune des deux axes ! On se convaincra sans mal que, dans le cas de la proportionnalité, toutes les autres valeurs associées de temps et de distance donnent bien des points tous alignés !

Et même plus, cette droite sera d'autant plus « pentue » que le coefficient de proportionnalité – la vitesse dans notre exemple – est grand :

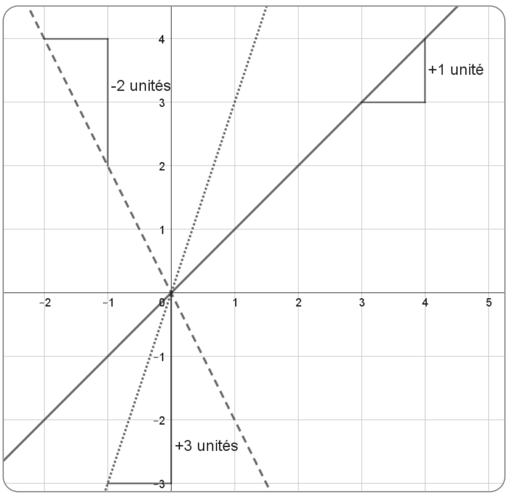


Figure 2 – Pentes

En effet, à chaque fois que l'on augmente d'une unité la grandeur sur l'axe horizontal, on augmente d'une unité multipliée par le coefficient de proportionnalité celle sur l'axe vertical ! Sur la figure précédente, le coefficient de proportionnalité entre les grandeurs figurées par la droite pleine vaut 1, celui entre celles correspondant à la droite en pointillé vaut 3 et celui de la droite en tirets vaut -2.

Il s'agit là d'une version élémentaire de ce que nous découvrirons lorsque nous tracerons les courbes représentatives de fonctions au chap. 4 sect. 2, voire lorsque nous étudierons leurs tangentes et dérivées au chap. 5 sect. 1 ss-sect. 1...

4 Exemples : échelles et pourcentages

COLLÈGE

4.1 Échelles

COLLÈGE

Les géomètres se sont très tôt intéressés aux cartes et à la façon de les tracer afin qu'elles soient les plus fidèles possible au monde qui les entouraient ; on peut penser à Ptolémée et Ératosthène dans l'Antiquité, aux savants du Moyen Âge islamique ou aux géographes de la Renaissance européenne à l'heure des grandes explorations navales. Toutes leurs cartes ont un point commun : elles doivent reproduire la réalité à taille réduite, c'est-à-dire que les longueurs doivent y être proportionnelles aux longueurs réelles !

Malheureusement, une sphère ne se projette pas simplement sur un plan et, à l'échelle de la Terre entière, c'est impossible ; cependant à l'échelle d'un canton, ou d'un département – voire d'un pays – les déformations dues à la projection d'une surface sphérique peuvent être négligées et on peut alors imaginer que les distances que l'on mesure sur la carte soient strictement proportionnelles aux distances correspondantes dans la réalité.

Le coefficient de proportionnalité, qui permet de passer des distances réelles à celles figurées sur la carte, s'appelle **l'échelle**.

Par exemple, dans la carte du Nord au $\dfrac{1}{267\,000}$ ci-dessous, datée de 1800, on multiplie les distances réelles par $\dfrac{1}{267\,000} \approx 0{,}0000037$ pour trouver les distances (dans la même unité !) sur la carte :

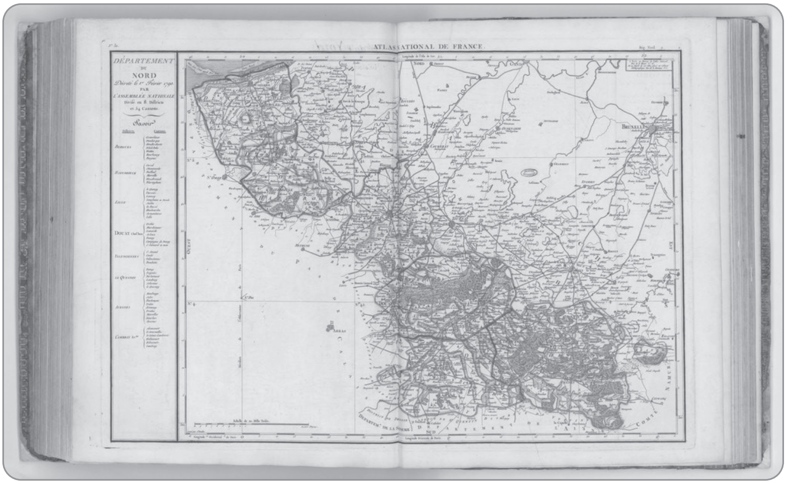


Figure 3 – Département du Nord

Source : Archives nationales, CP/NN//*/5