

Luc Chevalier

# Mécanique des systèmes et des milieux déformables

Cours, exercices et problèmes corrigés

3<sup>e</sup> édition

- Sciences industrielles de l'ingénieur
- Agrégation
- Licences
- Master de Mécanique
- Génie Mécanique
- Génie Civil et Sciences pour l'ingénieur
- Écoles d'ingénieurs



# Avant-propos : pourquoi écrire encore un livre de Mécanique ?

## **Bref rappel historique du développement de la mécanique**

Les pères de la Mécanique du solide sont Galilée (1564-1642), Huygens (1629-1695) et Newton (1642-1726). Le premier a mis en évidence la notion d'accélération d'une particule et établi la correspondance entre le temps et l'espace parcouru, le second a essentiellement étudié les systèmes de plusieurs particules et a mis en évidence la notion de centre de masse et d'inertie. Le dernier, enfin, a proposé une modélisation des actions gravitationnelles et a formulé le premier Principe Fondamental de la Dynamique connu sous les termes 1<sup>er</sup>, 2<sup>nd</sup>, etc. loi de Newton.

Des progrès étaient encore à faire mais avec ces trois personnages les bases de la dynamique du solide étaient posées. Par la suite, une autre école de la Mécanique a percé. Avec Leibniz (1646-1716), d'Alembert (1717-1783), Lagrange (1736-1818) une formulation plus énergétique de la Dynamique a vu le jour. D'abord en compétition avec l'approche traditionnelle, l'approche énergétique s'est rapidement imposée comme plus générale et plus ouverte à la mise en place de nouveaux modèles.

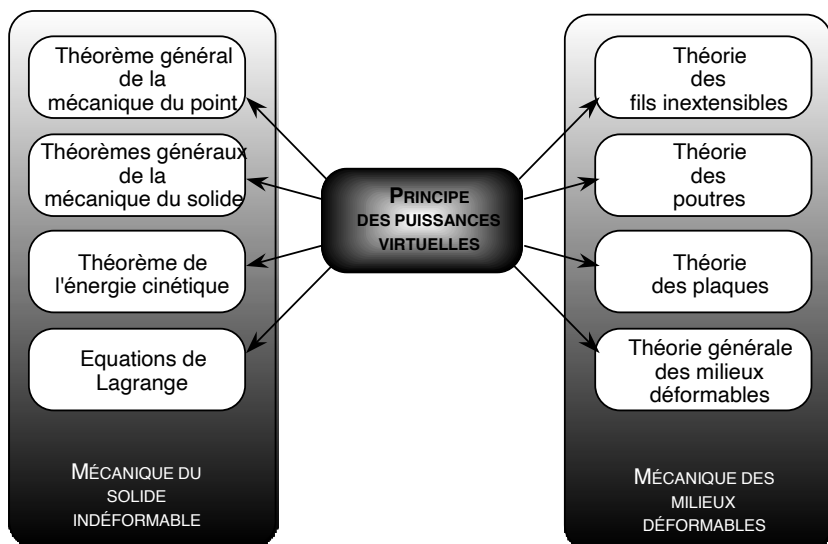
La formulation du Principe des Puissances Virtuelles qui découle de ces travaux est le nouveau point de départ des modélisations mécaniques. Ce principe permet de mettre en place les concepts dans un ordre qui respecte l'évolution historique de la Mécanique. En effet, qu'est-ce que la Mécanique ? C'est l'étude du mouvement des corps, phénomènes observables. Qu'est-ce qui provoque le mouvement des corps ? Ce sont les actions mécaniques, malheureusement non observables directement.

La modélisation mécanique consiste donc en la modélisation des mouvements des corps, adaptée à leur spécificité géométrique (par exemple, corps minces ou élancés) ou comportementale (parfaitement indéformables, légèrement déformables ou sujets à de grandes déformations) afin de mettre en place les actions mécaniques associées. Le principe des puissances virtuelles s'avère un outil très efficace dans ce contexte.

## **Principe des puissances virtuelles**

Si la description géométrique du mouvement (cinématique) est une notion assez naturelle, il en va tout autrement de la description d'une action mécanique. Cette dernière ne se caractérise que par l'effet qu'elle produit (mouvement), la description d'une action mécanique n'est donc pas du tout naturelle. Même si l'usage des « forces » par exemple, nous semble tout naturel, il est impossible d'observer une force sans passer par son effet sur la déformation ou le mouvement d'un objet. Ainsi, on laisse tomber une masse pour mesurer le mouvement et mettre en évidence l'effet de la pesanteur, on place des jauges de déformation sur un élément déformable afin d'évaluer le poids d'une personne ou d'un objet sur une balance, etc...

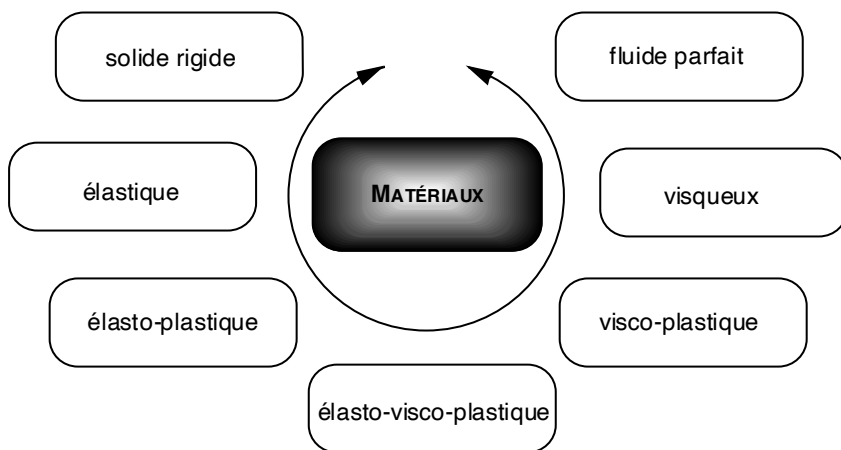
L'intérêt majeur du Principe des Puissances Virtuelles est d'assurer la cohérence entre la description retenue pour le mouvement et celle retenue pour l'action mécanique qui engendre ce mouvement.



Dans chacun des domaines qui constituent les deux parties de ce livre : Mécanique du solide indéformable (chapitres 1 à 5) et Mécanique des milieux déformables (chapitres 6 à 10), le Principe des Puissances Virtuelles permet de mettre en place le cadre théorique.

### Classification des comportements de matériaux

Le comportement du système étudié dépend ensuite du type de matériau utilisé. Dans un premier temps, pour les solides, on peut faire l'hypothèse qu'il n'y a pas de déformation ce qui impose des relations entre les mouvements des différents points d'un même solide : ce type de modèle est traité dans la première partie de ce livre.



Si on s'intéresse à la façon dont les corps étudiés se comportent sous l'effet des actions mécaniques exercées il faut ajouter un ingrédient supplémentaire. En effet, ce qui permet de savoir comment le matériau se déforme c'est la loi de comportement. Celle-ci peut

très fortement varier entre les plus rigides (solides) et les plus fluides (liquides). Avec l'évolution technologique en science des matériaux, on peut intercaler d'autres comportement spécifiques aux microstructures élaborées. Ces comportements sont identifiés à partir de résultats expérimentaux, d'essais effectués sur un échantillon de ce matériau et/ou à partir de modélisations de la microstructure associées à des techniques d'homogénéisation mais on sort largement du cadre de ce livre. La seconde partie est limitée à l'étude des solides élastiques et des fluides parfaits et visqueux en fin de volume.

**Introduction à la modélisation**

La mécanique est une modélisation du réel. Le mécanicien substitue aux objets réels, des corps géométriques au comportement établi, leur donne des masses, leur impose des efforts, eux-mêmes modélisés ; et met en équations, c'est-à-dire transforme un problème réel en un problème mathématique. Si le problème mathématique est bien posé, il sera alors possible de le résoudre et de comparer les résultats obtenus avec l'expérience. C'est là, l'épreuve ultime du mécanicien. Le modèle proposé est-il bon ?

Il n'existe pas de modèle parfait, il existe de bons modèles valables uniquement dans une certaine fourchette d'emplois. Quelques fois, la fourchette est grande, si grande qu'on a longtemps cru que la loi fondamentale de la mécanique que Newton avait énoncée était une loi de la nature. Ainsi Einstein a dû faire un effort d'innovation extraordinaire pour relativiser ce modèle et faire accepter par tous, que le principe de Newton (comme la simultanéité des événements) n'étaient qu'une modélisation dans un contexte défini et non un axiome immuable.

Les difficultés rencontrées par les mécaniciens sont donc de deux types, des difficultés calculatoires et mathématiques, mais aussi des difficultés de schématisation : c'est ce qui rend la mécanique délicate mais surtout intéressante. Une autre différence essentielle entre mécanicien et mathématicien est la dimension physique. En effet, une fois la modélisation accomplie, le mécanicien dispose de scalaires, de vecteurs, de torseurs sur lesquels il va manipuler, mais, à aucun moment, il ne doit oublier qu'à chaque grandeur est associée sa dimension physique. Chaque dimension physique est représentée par une unité. Le système d'unités adopté est arbitraire (la norme nous propose un système d'unités international SI), mais il doit être cohérent, c'est-à-dire que les relations liant entre elles les grandeurs doivent aussi lier entre elles les unités de ces grandeurs.

Vitesse	$V = LT^{-1}$	Mètre par seconde	$ms^{-1}$
Force	$F = MLT^{-2}$	Newton	$N = kg\ m\ s^{-2}$
Énergie	$E = ML^2T^{-2}$	Joule	$J = kg\ m^2\ s^{-2}$
Puissance	$P = ML^2T^{-3}$	Watt	$W = kg\ m^2\ s^{-3}$
Pression	$p = ML^{-1}T^{-2}$	Pascal	$P_a = kg\ m^{-1}\ s^{-2}$

**Présentation de l'ouvrage**

Depuis Galilée et Newton de nombreux livres ont été écrit sur la mécanique et pour répondre à la question de la nécessité d'un ouvrage supplémentaire sur le sujet, il suffit de faire le point sur la bibliographie proposée. On constate qu'il n'existe pas d'ouvrage de synthèse où l'on traite aussi bien de mécanique du solide (mécanique générale) de théorie des poutres (résistance des matériaux), de mécanique des fluides, de vibrations ou

d'éléments finis. Chacun de ces thèmes fait généralement l'objet d'un ouvrage particulier et c'est au lecteur de faire le lien entre ces différentes disciplines avec souvent des notations différentes d'un ouvrage à l'autre.

Ce cours de Mécanique fait le lien entre les différents domaines mécaniques en présentant l'ensemble des notions qui forment le contenu du programme de l'épreuve de Mécanique des systèmes et des milieux déformables de l'agrégation de Mécanique\*. On y fait donc la synthèse des connaissances indispensables pour aborder dans de bonnes conditions ce concours. Il va sans dire que ce livre est évidemment un excellent support pour les étudiants en Licence ou Master dans des filières Mécanique ou Génie Mécanique ainsi qu'aux étudiants d'école d'ingénieurs de la spécialité.

Les différents théorèmes et propriétés sont généralement présentés sous la forme : hypothèses et conditions d'utilisations, énoncé et ligne directrice de la démonstration, exemple d'utilisation. Dans quelques cas classiques les démonstrations ont été fournies. Pour tout approfondissement, chaque partie renvoie à une bibliographie (manuel scolaire, cours d'université, livre de spécialité). Chaque partie est accompagnée d'exercices et de problèmes. Des annexes facilitant la résolution (formulaire mathématique...) sont placées en fin d'ouvrage. Certains exercices sont corrigés dans le détail. Pour certains autres, on indique la méthode de résolution et les résultats. Pour d'autres enfin, seul l'énoncé est fourni, mettant ainsi le lecteur dans les conditions d'un concours.

Pour clore cet avant-propos, j'aimerais profiter de l'occasion qui m'est offerte, pour remercier tous ceux, parmi mes collègues et anciens professeurs qui ont forgé ma connaissance Mécanique. Il est certain que je leur dois beaucoup et certains se retrouveront aux détours de ces pages. Pour ma part, c'est en enseignant que c'est clarifiée ma perception Mécanique, aussi j'ai une attention particulière à Jean-Claude Bône pour m'avoir permis de travailler avec lui à l'Ecole Centrale de Paris. Un grand merci aussi à Dominique Legendre et Norbert Perrot qui m'ont accueilli dans leur équipe à l'EPF. Merci enfin, à Stan Konieska et Jean-Marie Virely qui m'ont fait confiance pour la rédaction de plusieurs polycopiés de cours pour la préparation à l'agrégation du CNED (qui sont à l'origine de ce livre). Au-delà de ces opportunités, je voudrai aussi remercier ceux qui m'ont emporté dans l'univers de la Mécanique et qui ont su par leur enseignement ou au travers de discussions, m'aider à affiner ma vision Mécanique voire Génie Mécanique : Jean Lemaitre, Claude Bortolussi, Jean-Pierre Cordebois, Guy Mollet, Arnaud Poitou et plus récemment, Christian Soize et de plus jeunes collègues, Benoit Jacquet, Julien Yvonnet, Vincent Monchiet, Eric Monteiro, Florent Pled...

Après ce rapide avant-propos il ne me reste plus qu'à vous souhaiter une bonne lecture et un bon voyage dans l'univers de la mécanique. N'oubliez pas qu'un tel document est du type que l'on lit un crayon et du papier à portée de main. Seule une recherche effective des réponses aux questions peut constituer un entraînement efficace. La simple lecture des corrigés ne peut donner que l'illusion de la compréhension.

*\*Depuis la session 2013, l'agrégation de mécanique est remplacée par l'agrégation de sciences industrielles de l'ingénieur option sciences industrielles et ingénierie mécanique.*

# Chapitre 1: Description du mouvement

La cinématique est l'étude du mouvement : on y introduit les notions de position, vitesse, trajectoire des points au cours du temps... et de repère pour décrire tout cela. Ces notions de position, vitesse et d'accélération ne sont définies que par rapport à un repère de référence et sont associées à un point.

La cinématique du solide prend en compte que les mouvements des points qui le constituent ne sont pas indépendants car les distances entre points ne varient pas au cours du temps. Néanmoins, hormis le cas particulier d'un solide en translation pour lequel tous les points ont la même vitesse, parler de la vitesse d'un solide n'a pas de sens.

Ce chapitre est capital car toute la suite sur la cinétique et la dynamique repose sur une maîtrise de la cinématique. Il est décomposé en trois parties :

- La première partie, sections de I à III, présente les concepts et outils de la cinématique du point. Les pré requis mathématiques sont de savoir dériver des fonctions du temps, manipuler les vecteurs et notamment connaître le produit vectoriel. Je recommande : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Produit\\_vectoriel](https://fr.wikipedia.org/wiki/Produit_vectoriel).  
A l'issue de ces sections, vous devez être capable de paramétrer le mouvement d'un point  $M$  par rapport à un repère ; d'écrire le vecteur position d'un point dans un repère et de dériver ce vecteur par rapport au temps ; de calculer le vecteur vitesse d'un point ; de calculer l'accélération d'un point... toujours par rapport à un repère.
- A partir de la section IV, on introduit la propriété d'équiprojectivité et la formule de Varignon qui lie les vitesses de différents points d'un même solide.
- Dans une dernière partie on décrit les mouvements relatifs lors de contacts entre deux solides.

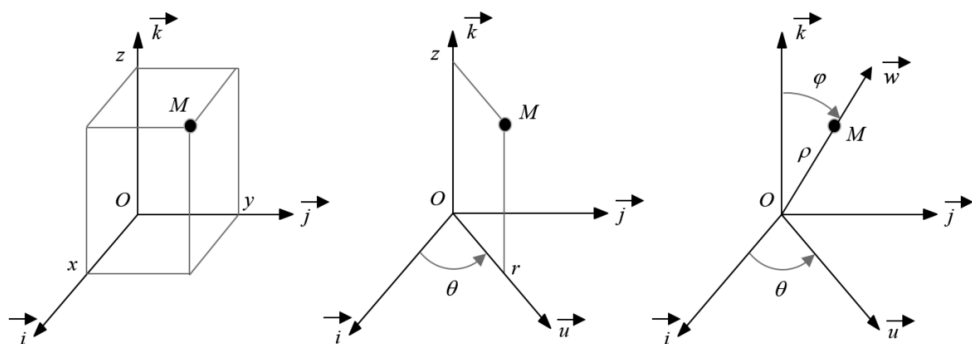
## I. TRAJECTOIRE, VECTEUR POSITION

### I.1 Référentiel

La position d'un point n'est définie que relativement à un repère. Imaginons une bille (un point !) dans un train roulant. On peut définir la position de la bille par rapport au train, par rapport à la Terre, éventuellement par rapport au Soleil sachant que la Terre tourne autour du soleil etc. Les mouvements de la même bille sont différents par rapport à ces différents repères. Notre premier souci, en cinématique, de mettre en place un repère de référence et toutes les quantités telles que position, sera donc vitesse, accélération... seront calculées par rapport à ce repère.

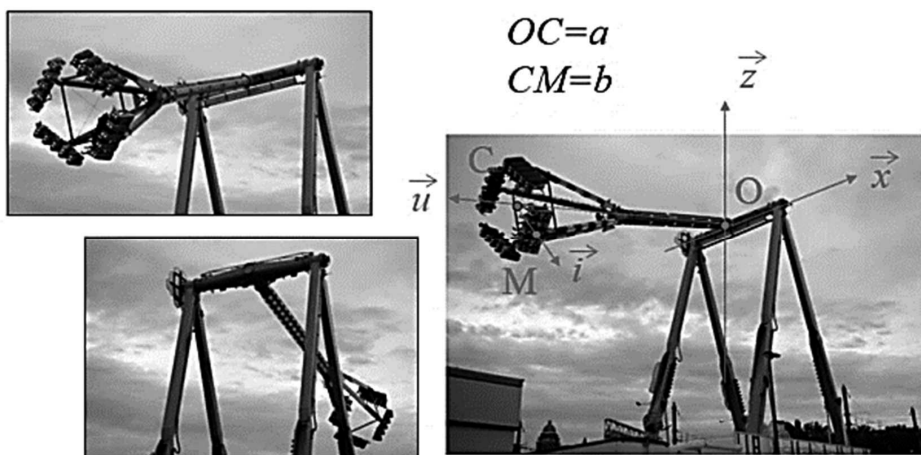
Le repère utilisé en mécanique doit pouvoir modéliser l'espace qui nous entoure. Nous choisirons donc une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  d'un espace vectoriel de dimension 3, nous la prendrons orthonormée pour la commodité des calculs, et directe pour pouvoir définir le produit vectoriel. Nous prendrons aussi un point de référence  $O$  pour construire ainsi un repère de référence. Le paramétrage de la position d'un point  $M$  peut se faire de différentes façons :

- en coordonnées cartésiennes  $M(x, y, z)$
- en coordonnées cylindriques  $M(r, \theta, z)$
- en coordonnées sphériques  $M(\rho, \theta, \varphi)$



La position du point  $M$  variant d'un instant à l'autre, il convient de définir une mesure scalaire appelée temps, caractérisant la simultanéité des événements dans les différents repères. L'unité légale et officielle de la mesure du temps  $t$  est la « seconde ». La position de  $M$  est une fonction à 3 variables d'espace  $(x, y, z)$  ou  $(r, \theta, z)$  ou  $(\rho, \theta, \varphi)$ . Chacune de ces variables est une fonction du temps  $t$ . L'espace à quatre dimensions  $(x, y, z, t)$  est appelé **référentiel**  $R$ . Par abus de langage (ou plutôt d'écriture) nous noterons de la même façon le repère associé à ce référentiel.

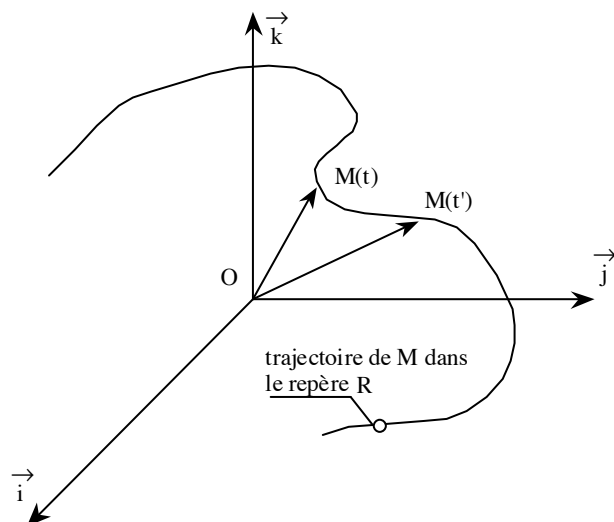
La position d'un point  $M$  peut aussi être repérée de manière plus spécifique en fonction du système sur lequel il apparaît.



Sur l'exemple ci-dessus, une attraction de fête foraine, le point  $O$ , centre d'un axe de rotation sur le portique « fixe » sur le sol est l'origine du repère de référence, orthonormé direct noté  $(O, x, y, z)$ . Un bras  $OC$  peut osciller autour de l'axe du portique et un système de 4 nacelles peut-tourner autour de  $OC$ . Pour décrire la position d'un point d'un passager assis en  $M$  il est nécessaire de connaître les longueurs  $a$  et  $b$  mais aussi deux paramètres angulaires qui décrivent les deux rotations. La position de  $M$  n'est donc décrite par aucun des systèmes classiques présentés plus haut mais adaptée à la structure cinématique de l'attraction.

## I.2 Trajectoire

On appelle **trajectoire** de  $M$  le lieu des positions successives occupées par un point  $M$  dans le repère  $R$  lorsque le temps  $t$  varie. On remarque alors, que les variables d'espace sont elles-mêmes des fonctions du temps si on suit le point  $M$  dans son mouvement :  $x = f(t)$  ;  $y = g(t)$  ;  $z = h(t)$ . Ce sont les équations paramétriques du mouvement.



Il faut bien insister sur le fait que la notion de trajectoire est directement liée au référentiel d'observation. Un exemple très classique est illustré ci-dessous : la valve d'une roue de bicyclette va décrire une trajectoire appelée cycloïde pour un observateur fixe par rapport au sol. En revanche, si l'observateur se trouve sur le cadre de la bicyclette, la trajectoire de la valve est un cercle ; c'est très différent. La notion de référentiel est capitale !

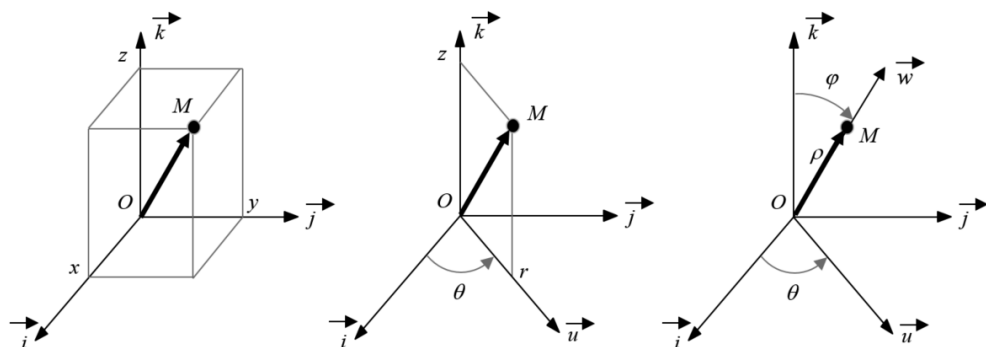


## I.3 Vecteur position

On appelle vecteur position de  $M$ , le vecteur qui lie le point  $M$  à l'origine  $O$  (a minima à un point fixe) du repère  $R$ . En fonction du type de coordonnées utilisées, le vecteur position peut s'écrire :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} ; \overrightarrow{OM} = r\vec{u} + z\vec{k} ; \overrightarrow{OM} = \rho\vec{w},$$





*Remarques :* Si on choisit un autre point fixe  $A$  dans le repère  $R$  le vecteur  $\overrightarrow{AM}$  est aussi un vecteur position caractéristique du mouvement du point  $M$  dans  $R$  et pourtant le vecteur  $\overrightarrow{AM}$  est différent de  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ . Le vecteur position n'étant pas directement caractéristique du mouvement de  $M$ , nous considérerons plutôt la **vitesse**, c'est-à-dire la variation de position de  $M$ , qui est unique pour un repère donné.

Dans le cas de l'attraction de fête foraine vue plus haut, le vecteur position de  $M$  s'écrit :  $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{i}$  la relative simplicité de cette expression cache le fait que les vecteurs unitaires  $\vec{u}$  et  $\vec{i}$  varient en orientation au cours du temps. Être capable de caractériser cette variation va permettre de calculer la vitesse de  $M$ .

## II. VECTEURS VITESSE ET ACCELERATION

### II.1 Vecteur vitesse

La variation de position de  $M$  dans  $R$  entre deux instants est caractérisée par la vitesse. On note celle-ci  $\overrightarrow{V}_{(M/R)}$ , c'est un vecteur tangent à la trajectoire du point  $M$  dans  $R$ . Son expression est donc :

$$\overrightarrow{V}_{(M/R)} = \left( \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_R$$

Pour que ce vecteur existe, il faut que les fonctions  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  soient dérivables, les composantes de la vitesse  $\overrightarrow{V}_{(M/R)}$  sont donc :

$\dot{x}(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  et  $\dot{z}(t)$  (la notation  $\dot{x}(t)$  désigne la dérivation par rapport au temps de  $x(t)$ )

Notons d'ores et déjà que si la position du point  $M$  est repérée par ses coordonnées cartésiennes dans le repère  $R$ , les seules variations du vecteur position proviendront des composantes.

Dans le cas où le vecteur position est écrit dans une base où les vecteurs unitaires « bougent » par rapport à  $R$  alors se pose la question de la dérivée de ces vecteurs : c'est la **formule de la base mobile** qui va apporter une réponse à cette question un peu plus loin.