

Ahmed Lesfari

L3
M1
M2

Étude des systèmes hamiltoniens et leur complète intégrabilité

Cours, exercices et problèmes corrigés



Table des matières

1	Théorie de Hamilton-Jacobi	9
1.1	Problème variationnel, équations de Lagrange	9
1.1.1	Calcul des variations	9
1.1.2	Équation d'Euler-Lagrange	13
1.2	Transformations de Legendre	16
1.3	Equations canoniques de Hamilton	19
1.4	Transformations canoniques et équation d'Hamilton-Jacobi . . .	20
1.5	Théorème de Jacobi	25
1.6	Exercices	29
2	Flots, dérivée de Lie et produit intérieur	41
2.1	Généralités	41
2.2	Groupes à un paramètre de difféomorphismes	44
2.3	Théorème de Liouville et conservation du volume	46
2.4	Commutativité des champs de vecteurs	51
2.5	Dérivée de Lie et produit intérieur	57
2.6	Exercices	65
3	Structures symplectiques sur une variété différentiable	69
3.1	Orbites coadjointes d'un groupe de Lie	69
3.2	Structure symplectique sur une variété	73
3.3	Lemme de Moser et théorème de Darboux	80
3.4	Champs de vecteurs hamiltoniens	84
3.5	Intégrales premières et théorème de Noether	88
3.6	Structure symplectique sur les orbites	98
3.7	Exercices	99
4	Étude de l'intégrabilité des systèmes hamiltoniens	109
4.1	Théorème d'Arnold-Liouville	109
4.2	Systèmes hamiltoniens complètement intégrables	119
4.3	Applications	121
4.3.1	Étude de la rotation d'un solide autour d'un point fixe .	121

4.3.2	Mouvement d'un solide dans un fluide parfait	139
4.3.3	Flot géodésique sur le groupe $SO(4)$	142
4.4	Exercices	146
5	Systèmes intégrables et théorie spectrale	157
5.1	Equations de Lax et courbes algébriques	157
5.2	Méthode des déformations isospectrales	158
5.3	Spectre des matrices de Jacobi et opérateurs aux différences . .	163
5.4	Méthode de linéarisation de Griffiths	170
5.5	Applications	174
5.5.1	Flot géodésique sur le groupe $SO(n)$	174
5.5.2	Flot géodésique sur un ellipsoïde, problème de C. Neumann	179
5.5.3	Le réseau de Toda	180
5.6	Exercices	185
6	Problèmes ou projets de fin d'étude	189
6.1	Structures symplectiques (cas du groupe $SO(n)$)	189
6.2	Une famille de systèmes intégrables	203
6.3	Équations de Nahm	206
6.4	Potentiel quartique, système de Garnier	207
6.5	Equations couplées non-linéaires de Schrödinger	212
6.6	Champ de Yang-Mills avec groupe de jauge $SU(2)$	213
6.7	La toupie de Kowalewski	215
6.8	La toupie de Goryachev-Chaplygin	216
6.9	Étude de l'intégrabilité algébrique et applications	217
6.10	Équations de Schrödinger, Gelfand-Levitan et Korteweg-de-Vries	244
7	Appendices	265
7.1	Espaces projectifs complexes	265
7.2	Surfaces de Riemann compactes	269
7.3	Fonctions et intégrales elliptiques	278
7.4	Variétés abéliennes complexes	287
7.5	Groupes et algèbres de Lie	292
	Bibliographie	307
	Index	311