Sandrine Le Ballois

L2
L3

Automatique

Systèmes linéaires et continus

Cours et exercices traités sous Matlab/Simulink

ellipses

Introduction générale

I. But de l’automatique

L’automatique est un domaine de l'ingénierie qui consiste en l’analyse des systèmes et l’étude des moyens à mettre en œuvre pour qu’ils se comportent de manière autonome, sans intervention humaine directe. Ces systèmes peuvent être des machines, des véhicules, des robots… On distingue deux grands domaines de l’automatique : les automatismes séquentiels et les asservissements. Dans le 1er cas, on recherche l’automatisation d’une séquence d’instructions connues à l’avance, on a alors affaire à un système dit séquentiel. Ce travail est réalisé à l’aide d’un automate programmable industriel (API). Dans le 2e cas, on cherche à assurer la régulation d’une grandeur physique (son maintien à une valeur constante) ou bien à imposer à une grandeur physique une certaine évolution (on parle de suivi de consigne). Le but principal des asservissements est donc de faire en sorte que les grandeurs de sortie aient le comportement souhaité et ceci malgré d’éventuelles perturbations externes ou de possibles variations des conditions de fonctionnement.

L’automatique s’est introduite dans quasiment tous les domaines de la vie quotidienne. On sait que la température des pièces est régulée pour rester constante quelle que soit la température extérieure mais le domaine des transports recèle également de très nombreux exemples. Autrefois, les marins devaient être à la barre en permanence pour conserver leur cap. De nos jours, la barre est sous le « contrôle » du pilote automatique. Seules les entrées et sorties de port, c’est-à-dire les opérations délicates, nécessitent l’intervention humaine. Les avions sont sous pilote automatique pendant une bonne partie de leurs vols et seules les phases difficiles, décollage, atterrissage, sont aux mains du commandant de bord. Nos voitures contiennent de plus en plus de systèmes automatiques : régulateur d’allure, contrôle de trajectoire, essuie-glaces s’adaptant à l’importance de la pluie, phares s’allumant automatiquement selon la luminosité… L’industrie fait aussi très largement appel à l’automatique : on trouve des robots dans les chaînes de montage automobile ou dans des milieux trop hostiles pour l’homme (domaine nucléaire par exemple). Même l’être humain a un comportement régulateur : quand il fait froid, on se couvre puis on allume le chauffage ; quand il fait trop chaud, on ouvre une fenêtre, voire deux pour produire un courant d’air.

En résumé, un système automatique cherche toujours à réaliser un certain nombre d’opérations sans intervention humaine. Dans certains cas, le but est de remplacer l’homme pour des raisons économiques ou pour lui éviter des tâches pénibles, dans d’autres ce sera pour obtenir un produit de meilleure qualité. Dans cet ouvrage, nous ne traiterons que les asservissements et en particulier ceux des systèmes linéaires continus et invariants (ces termes seront précisés par la suite).

II. Notion de système

Nous allons chercher à commander des systèmes, mais qu'est-ce qu'un système ? De façon succincte, nous dirons que c'est une boîte noire qui possède des entrées sur lesquelles nous allons pouvoir agir et des sorties qui nous permettent d'observer les réactions induites. Schématiquement, nous avons la représentation suivante :

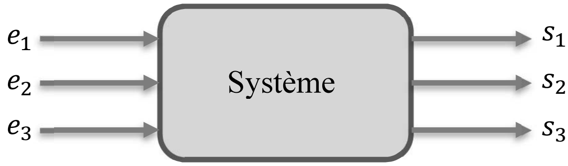


Figure I.1

Le système évolue en fonction de lois physiques qui le régissent mais il s'inscrit aussi dans un certain environnement et subit donc des interactions avec ce dernier. Une représentation plus réaliste d'un système est donnée sur la figure ci-après. Notons que les entrées p_1, p_2, p_3 sont subies. Ce sont des perturbations dont l'automaticien se passerait bien.

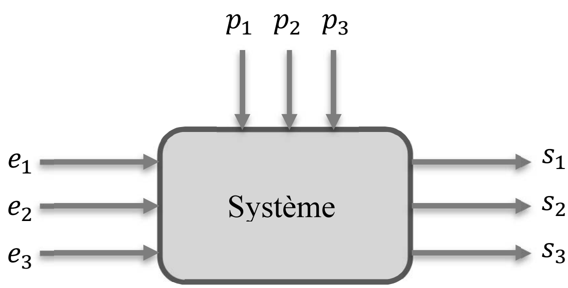


Figure I.2

Prenons l'exemple d'une automobile. Elle peut être vue comme un système physique possédant, de manière très grossière, trois entrées et deux sorties. Pour les entrées, nous considérons le volant qui permet de diriger le véhicule, l'accélérateur de le faire avancer, le frein de l'arrêter. Pour les sorties, nous citerons la position de la voiture et sa vitesse. Il existe une multitude de perturbations extérieures parmi lesquelles on peut citer les rafales de vent, les autres véhicules, l'état de la route... Nous pouvons représenter une automobile par un schéma comme celui de la figure I.3.

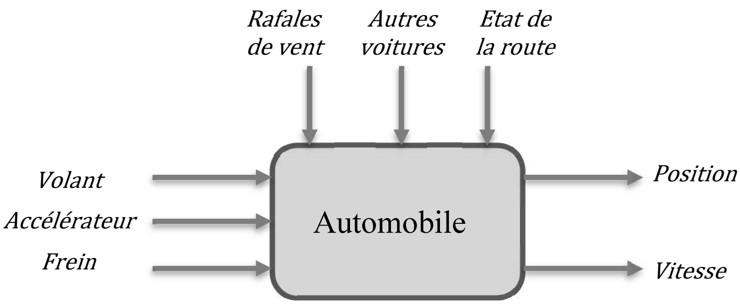


Figure I.3

Dans le cas où il existe plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties, nous dirons que le système est multivariable. Quand il n'y a qu'une seule entrée et qu'une seule sortie, le système est dit monovariable. Bien que ce dernier cas ne soit pas le plus fréquent, la plupart des systèmes étant multivariables, l'automaticien cherche très souvent à se ramener à de tels systèmes du fait de leur relative facilité d'étude. Nous nous limiterons à l'étude des systèmes monovariables dans cet ouvrage.

III. Notion de bouclage

Nous avons introduit précédemment le système représentant une automobile. Analysons maintenant le comportement du conducteur.

Supposons le conducteur sur une route parfaitement rectiligne, dans une zone où le vent est nul, route qu'il est le seul à emprunter. Les conditions sont « idéales » et nous considérerons donc que les perturbations sont nulles. Dans cette configuration, le conducteur n'a qu'à orienter son volant correctement et appuyer sur l'accélérateur pour donner la vitesse adéquate à son véhicule. Il peut ensuite profiter du paysage. Pour être tranquilles, il nous faudra supposer que cette belle route n'est pas faite de revêtements différents. On appellera la situation que l'on vient de décrire le cas n°1.

Maintenant, nous allons envisager une route qui serpente. Si le conducteur connaît parfaitement l'itinéraire, il sait à l'avance l'évolution que suit son chemin. Il peut, sans regarder la route, connaissant sa vitesse, orienter le volant dans le bon sens et au bon moment de façon à suivre correctement la route. Ce sera notre cas n°2.

Laissons de côté les cas idéaux pour nous rapprocher de la réalité. La route a été refaite sur 2 km donc le revêtement change de nature, il y a du vent, des voitures roulant moins vite... Le conducteur est obligé de regarder la route pour en « corriger » les défauts à l'aide du volant (c'est l'une des entrées du système qu'il commande), de ralentir lorsqu'une voiture est devant lui... On constate, dans ce troisième cas, que le conducteur, dans la mesure où il observe la route et surtout sa position sur celle-ci, agit en permanence sur les commandes de son véhicule afin d’assurer un bon suivi de sa trajectoire. Dans ce dernier cas, l’automobiliste assure un bouclage naturel : nous sommes en présence d’un système en boucle fermée.

Dans les cas n°1 et n°2, le fait de ne pas regarder la route engendre une commande de l’automobile en boucle ouverte. Le résultat risque d’être désastreux…

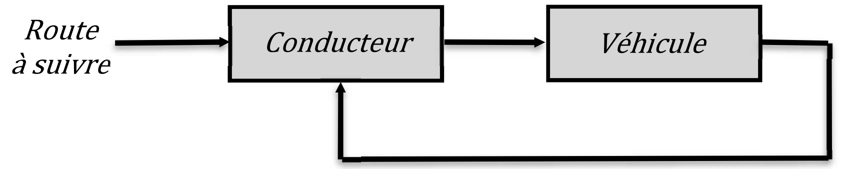


Figure I.4 Système en boucle fermée

IV. Structure d’un système asservi

Nous allons donner les définitions d’une régulation et d’un asservissement. La régulation permet de maintenir une grandeur physique constante. On a déjà cité l’exemple de la régulation de température d’une pièce. Ceci se fera via un thermostat.

Un asservissement est une opération qui cherche à asservir les sorties du système sur les grandeurs d’entrée. Ces dernières sont dites grandeurs de consigne ou de référence. On souhaite, en introduisant un bouclage, que les sorties du système suivent le plus fidèlement possible les entrées, en dépit de variations sur celles-ci ou malgré d’éventuelles perturbations extérieures.

La structure générale d’un système asservi se représente par le synoptique suivant :

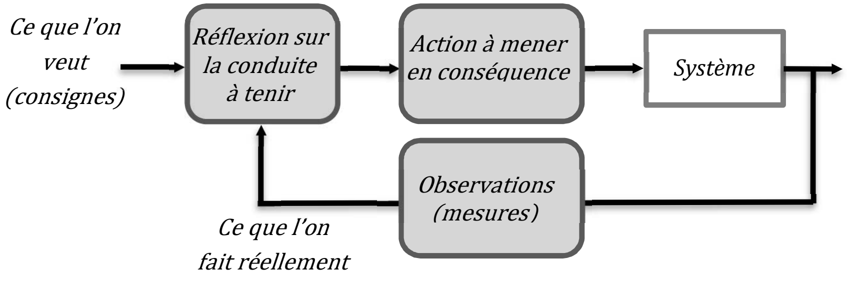


Figure I.5 Structure d’un système asservi

Par rapport au schéma du conducteur et de son véhicule (figure I.4), on pourrait dire que les trois blocs (observations, réflexion, action) sont symbolisés sur la figure I.4 par le seul conducteur. On a l’habitude, en automatique, de séparer ces trois opérations et d’associer à chacune un bloc différent. En effet, en pratique, il est rare qu’elles soient toutes trois dues à un seul organe. Nous reverrons cette structure de système asservi et nous associerons des noms plus précis à chacun des blocs.

Chapitre 1 – Outils mathématiques

Introduction

L'automatique repose en grande partie sur l'utilisation des mathématiques appliquées et fait appel à de nombreux outils mathématiques. Afin d'éviter des rappels au cours des chapitres suivants, il nous a semblé intéressant de regrouper ici les notions mathématiques dont nous aurons besoin.

Nous nous intéressons, dans ce volume, aux systèmes linéaires, invariants et décrits dans le domaine continu. Ces systèmes voient leur évolution temporelle décrite, mathématiquement parlant, par des équations différentielles à coefficients constants. Nous rappelons ce qu'est une équation différentielle et nous en donnons des éléments de résolution mais nous supposons que ce domaine n'est pas totalement inconnu.

Nous rappelons brièvement ce qu'est une fonction du plan complexe et nous présentons la transformée de Laplace et sa transformée inverse.

I. Équations différentielles

1. Définitions

Une équation différentielle linéaire à coefficients constants a la forme générale :

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} \dots + b_{m-1}\dot{u} + b_m u \qquad (1.1)$$

De façon générale, y et u sont des fonctions du temps continu dont les dérivées successives sont données ci-dessous. On omettra souvent la variable t si elle n'est pas nécessaire à la compréhension.

$$y^{(n)} = \frac{d^n y(t)}{dt^n} \quad y^{(n-1)} = \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \cdots \quad \dot{y} = \frac{dy(t)}{dt} \quad u^{(m)} = \frac{d^m u(t)}{dt^m} \cdots \quad \dot{u} = \frac{du(t)}{dt}$$

Une équation différentielle linéaire fait donc apparaître une combinaison linéaire des dérivées successives de y et u. L'équation différentielle est dite d'ordre n lorsque, dans le membre de gauche, la dérivée n-ième de la variable y apparaît. Les coefficients a_0, a_1, a_2… a_n, b_0, b_1, b_2… b_m sont des constantes réelles.

Par la suite, nous nous limitons aux équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre inférieur ou égal à 2. Nous pourrions aller plus loin mais la résolution de telles équations pour un ordre supérieur devient vite compliquée. Nous verrons plus loin que nous avons des outils plus agréables à manipuler.

2. Résolution

L'équation (1.1) limitée à l'ordre 2 peut se réécrire :

$$a_0\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2 u \qquad (1.2)$$

On obtient toutes les solutions de (1.2) en ajoutant à une solution particulière de l'équation (1.2) – dite équation avec second membre (EASM) – toutes les solutions de l'équation sans second membre (ESSM), dite encore équation homogène.

Classiquement, on commence donc par chercher les solutions de l'ESSM :

$$a_0\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = 0 \qquad (1.3)$$

On cherche les solutions de (1.3) sous la forme : $y = e^{rt}$ où $r \in \mathbb{C}$. On a donc $\dot{y} = re^{rt}$ et $\ddot{y} = r^2 e^{rt}$ que l'on remplace ensuite dans (1.3). On obtient :

$$e^{rt}(a_0 r^2 + a_1 r + a_2) = 0 \qquad (1.4)$$

La résolution de l'équation du 2e degré en r nous donne les solutions de l'ESSM. En posant $\Delta = a_1^2 - 4a_0 a_2$, les solutions de (1.4) sont :

$$\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2a_0} \qquad \begin{matrix} r_1 \\ \bar{r}_1 \end{matrix} = \frac{-a_1 \pm j\sqrt{\Delta'}}{2a_0} \qquad (1.5)$$

Remarque : Les solution sont réelles si $\Delta \geq 0$ (r_1 et r_2) et complexes conjugués si $\Delta < 0$ (r_1 et $\overline{r_1}$). On a évidemment dans ce dernier cas $\Delta' = -\Delta$.

Les solutions de l'ESSM sont :

$$\begin{cases} y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} & \text{si } \Delta > 0 \\ y(t) = (At + B)e^{r_1 t} & \text{si } \Delta = 0 \\ y(t) = Ae^{r_1 t} + \bar{A}e^{\bar{r}_1 t} & \text{si } \Delta < 0 \end{cases} \qquad (1.6)$$

Remarque : A et *B* sont déterminées si l'on connaît des valeurs particulières de $y(t)$.

Considérons l'EASM et cherchons une solution particulière. On peut écrire :

$$a_0\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = f(u, \dot{u}, \ddot{u}) \qquad (1.7)$$

où $f(u, \dot{u}, \ddot{u})$ est, par exemple, un polynôme de degré 2 en t que l'on écrit $P_2(t)$. Trois cas se présentent pour la recherche de la solution particulière :

$$\begin{array}{ll} a_2 \neq 0 & y \text{ est un polynôme d'ordre 2 : } y = Q_2(t) \\ a_2 = 0, a_1 \neq 0 & y \text{ est un polynôme d'ordre 3 : } y = Q_3(t) \\ a_2 = 0, a_1 = 0, a_0 \neq 0 & y \text{ est un polynôme d'ordre 4 : } y = Q_4(t) \end{array} \qquad (1.8)$$

La solution finale de (1.2) est donc constituée de (1.6) + (1.8).

3. Exemple

Soit à résoudre l'équation (1.9). Suivons la démarche proposée précédemment :

$$\ddot{y} + \dot{y} - 6y = 12t + 20 \qquad (1.9)$$

Résolution de l'ESSM

L'équation caractéristique est $r^2 + r - 6 = 0$. Le discriminant Δ vaut 25 donc les deux racines r_1 et r_2 sont réelles et distinctes :

$$\begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = -3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = Ae^{2t} + Be^{-3t}$$

Résolution de l'EASM

On a $a_2 \neq 0$, on cherche alors la solution particulière sous la forme d'un polynôme $Q_1(t)$ puisque le membre de droite de (1.9) est d'ordre 1 : $f(u, \dot{u}, \ddot{u}) = 12t + 20$.

$$\begin{cases} y(t) = at + b \\ \dot{y}(t) = a \\ \ddot{y}(t) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow a - 6at - 6b = 12t + 20$$

Par identification terme à terme, on trouve :

$$\begin{cases} -6at = 12t \\ a - 6b = 20 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = -2 \\ 6b = -22 \end{cases}$$

La solution complète de l'équation (1.9) est finalement :

$$y(t) = -11/3 - 2t + Ae^{2t} + Be^{-3t} \qquad (1.10)$$

On détermine A et B si l'on connaît des CI ($y(0)$ et $\dot{y}(0)$) ou des points particuliers. On peut vérifier (1.10) en utilisant Maple (*cf.* figure 1.1). On constate que l'on retrouve le même résultat que celui auquel nous avons abouti « à la main », il suffit de considérer $A = \_C_2$ et $B = \_C_1$.

Remarque : Si $f(u, \dot{u}, \ddot{u})$ n'est pas un polynôme en t, nous invitons le lecteur à consulter des ouvrages mathématiques dédiés aux équations différentielles. Dans le domaine de l'automatique, le cas du polynôme est, en effet, l'un des plus courants.

Définition de l'équation différentielle à résoudre

```
> eq:=diff(y(t),t,t)+diff(y(t),t)-6*y(t)=12*t+20;
```

$$eq := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(t)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} y(t)\right) - 6\, y(t) = 12\, t + 20$$

Résolution de l'équation différentielle

```
> dsolve(eq, y(t));
```

$$y(t) = -\frac{11}{3} - 2\, t + \_C1\, e^{(-3\, t)} + \_C2\, e^{(2\, t)}$$

Figure 1.1 Feuille de calcul Maple

II. Produit de convolution

1. Définition

Soient deux fonctions temporelles $x(t)$ et $y(t)$. On appelle produit de convolution de ces deux signaux, s'il existe, la fonction donnée par :

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \qquad (1.11)$$

2. Existence

Le produit de convolution de $x(t)$ par $y(t)$ existe si l'une des fonctions est sommable et l'autre bornée.

Remarque : Si l'une des fonctions est continue, le produit de convolution est continu.

3. Propriétés du produit de convolution

On suppose que les différents produits de convolution considérés existent.

Commutativité

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

Associativité

$$x(t) * [y(t) * z(t)] = [x(t) * y(t)] * z(t)$$

Distributivité par rapport à l'addition

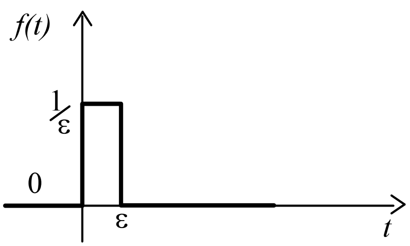
$$x(t) * [y(t) + z(t)] = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$$

Unité de convolution

Il n'existe pas de fonction $u(t)$ – au sens mathématique du terme – telle que :

$$x(t) * u(t) = u(t) * x(t)$$

$\forall\, x(t)$ mais l'impulsion de Dirac, notée $\delta(t)$, peut jouer ce rôle. L'impulsion de Dirac peut être définie à partir de la fonction $f(t)$ représentée sur la figure 1.2, lorsque ε tend vers 0. On a alors $x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t)$.



$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(t)$$

Figure 1.2 Représentation symbolique de l'impulsion de Dirac