Olivier Vanbésien

Outils mathématiques pour les sciences de l'ingénieur

37 fiches de cours et 71 exercices corrigés

ellipses

FICHE 1 : Nombres et représentations des nombres

Les nombres sont classés dans de grands ensembles, inclus les uns dans les autres :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

- $\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels (0,1,2,3…)
- $\mathbb{Z}$: ensemble des entiers relatifs $(\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots)$
- $\mathbb{D}$: ensemble des décimaux (quotients d'entiers par des puissances de 10)
- $\mathbb{Q}$: ensemble des rationnels (tout quotient de deux entiers relatifs)
- $\mathbb{R}$: ensemble des réels (nombre quelconque avec éventuellement un nombre infini de chiffres après la virgule)
- $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes (formés d'une partie réelle et d'une partie imaginaire de type $a + ib$ avec $i^2 = -1$, voir fiche 6)

Sur ces nombres, toutes les opérations de type addition, soustraction, multiplication et division peuvent être définies.

1. Représentation scientifique

On privilégie de représenter tout nombre d'une manière unique avec un réel possédant une partie entière à un chiffre, multiplié par une puissance de 10.

Exemples :

nombre	notation scientifique
$0{,}000981$	$9{,}81\ 10^{-4}$
$-0{,}001732$	$-1{,}732\ 10^{-3}$
$602\ 10^{21}$	$6{,}02\ 10^{23}$
-345	$-3{,}45\ 10^{2}$

2. Puissances d'un nombre (non nul)

Soit a un nombre et n un entier positif, alors :

$$a^0 = 1$$
$$a^1 = a$$
$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$
$$a^n = a * a * a * \dots * a \ (n\ fois)$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

a^{-1} est appelé l'inverse de a.
a^2 se lit « a au carré », a^3 se lit « a au cube » et a^n se lit « a puissance n »

On définit la racine n-ième de a par :

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

Par défaut, $\sqrt{a}$ est appelée la racine carrée de a ($n = 2 \rightarrow a^{1/2}$).
$\sqrt[3]{a}$ est appelée racine cubique de a.

On a également, pour a et b non nuls et deux entiers relatifs m et n :

$$a^m . a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m.n} \qquad (a.b)^n = a^n . b^n$$

3. Les fractions

Soient les nombres a, b, c et d supposés non nuls, on peut écrire :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}; \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd} \quad ; \quad \frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}; \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Corollairement :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}; \qquad \frac{a}{b}.\frac{b}{c}=\frac{a}{c}$$

4. Valeur absolue

La valeur absolue d'un nombre réel est définie par :

- Si $a \geq 0$ alors $|a| = a$ - Si $a \leq 0$ alors $|a| = -a$

La valeur absolue d'un nombre est toujours positive ou nulle.

5. La factorielle

Pour un nombre entier n, on définit sa factorielle par :

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.2.1$$

Par convention, on supposera : $0! = 1$.

6. Les ordres de grandeur

Norme ISO – multiples et sous-multiples de l'unité

10^{30}	1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000	quetta-	Q
10^{27}	1 000 000 000 000 000 000 000 000 000	ronna-	R
10^{24}	1 000 000 000 000 000 000 000 000	yotta-	Y
10^{21}	1 000 000 000 000 000 000 000	zetta-	Z
10^{18}	1 000 000 000 000 000 000	exa-	E
10^{15}	1 000 000 000 000 000	péta-	P
10^{12}	1 000 000 000 000	téra-	T
10^{9}	1 000 000 000	giga-	G
10^{6}	1 000 000	méga-	M
10^{3}	1 000	kilo-	k
10^{2}	100	hecto-	h
10^{1}	10	déca-	da
10^{0}	1	unité	-
10^{-1}	0,1	déci-	d
10^{-2}	0,01	centi-	c
10^{-3}	0,001	milli-	m
10^{-6}	0,000 001	micro-	µ
10^{-9}	0,000 000 001	nano-	n
10^{-12}	0,000 000 000 0001	pico-	p
10^{-15}	0,000 000 000 000 001	femto-	f
10^{-18}	0,000 000 000 000 000 001	atto-	a
10^{-21}	0,000 000 000 000 000 000 001	zepto-	z
10^{-24}	0,000 000 000 000 000 000 000 001	yocto-	y
10^{-27}	0,000 000 000 000 000 000 000 000 001	ronto-	r
10^{-30}	0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 001	quecto-	q

FICHE 2 : Points et vecteurs

Pour pouvoir se repérer ou repérer toute grandeur dans l'espace, on utilise principalement deux notions : le point et le vecteur. Si on est habitué à raisonner en trois dimensions (celles de notre espace réel), toutes les notions qui vont suivre peuvent être adaptées à un nombre quelconque de dimensions de 1 à n (au moins théoriquement, car pour les dimensions supérieures ou égales à 4, on ne peut qu'imaginer une représentation).

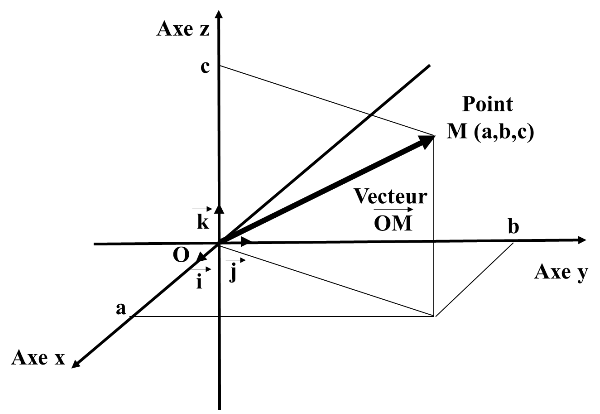
1. Points et vecteurs

Pour se repérer et se déplacer dans l'espace réel, on a besoin de 3 informations qui peuvent correspondre à gauche-droite, devant-derrière et haut-bas. Notons les x, y et z. On pourra localiser un objet à un endroit donné en se donnant une position de référence appelée origine $O(x = 0, y = 0, z = 0)$ et la position de l'objet par rapport à cette référence $M(x = a, y = b, z = c)$. Cette écriture suppose qu'il existe une mesure qui permette de quantifier la distance entre l'origine O et la position du point M comme le montre le schéma ci-dessous.

On définit ensuite le vecteur $\overrightarrow{OM}$, reliant le point O au point M dans la direction allant de 0 à M.

Les coordonnées de ce vecteur sont la différence entre les coordonnées du point M et les coordonnées du point O. Soit ici, puisque les coordonnées de 0 sont nulles :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$



Pour compléter la description, on peut se donner trois vecteurs de référence $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$, respectivement dans les directions x, y et z de coordonnées :

$\vec{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ces trois vecteurs forment une base de l'espace réel)

pour écrire :

$$\overrightarrow{OM} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$$

On appelle ce système les coordonnées cartésiennes.

2. Généralisation : Espace vectoriel

Comme vu ci-dessus, un vecteur est un segment de droite « orienté », contenant donc deux informations une amplitude et une direction. Il est représenté graphiquement par une flèche dont la longueur est proportionnelle à son amplitude. La flèche pointe dans le même sens que le vecteur. On le représente par une lettre surmontée d'une flèche : $\vec{U}$.

Un espace vectoriel sur ℝ est un ensemble E de vecteurs ($\vec{U}, \vec{V}, \vec{W} \in E$), d'élément neutre le vecteur nul $\vec{0}$, muni de deux opérations :

- L'addition, vérifiant les propriétés de commutativité et d'associativité :

$$\vec{U} + \vec{V} = \vec{V} + \vec{U} \qquad (\vec{U} + \vec{V}) + \vec{W} = \vec{U} + (\vec{V} + \vec{W})$$
$$\vec{U} + \vec{0} = \vec{U} \qquad \vec{U} + (-\vec{U}) = \vec{0}$$

- La multiplication par un scalaire ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) :

$$\lambda(\vec{U} + \vec{V}) = \lambda\vec{U} + \lambda\vec{V} \qquad (\lambda + \mu)\vec{U} = \lambda\vec{U} + \mu\vec{U}$$
$$\lambda(\mu\vec{U}) = (\lambda\mu)\vec{U} \qquad 1.\vec{U} = \vec{U}$$

L'espace vectoriel dans lequel on est amené le plus souvent à travailler est le système de coordonnées cartésiennes (autrement noté espace vectoriel E_3).

Pour $\vec{U}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on définit le module (amplitude ou norme) du vecteur $\vec{U}$, par :

$$\|\vec{U}\| = |U| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

On peut alors définir un vecteur unitaire (de module 1) : $\vec{u} = \frac{\vec{U}}{|U|}$ (noté aussi $\hat{u}$).

3. Relation de Chasles

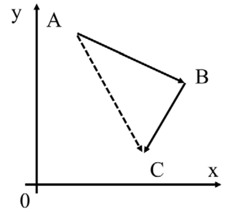
Une autre approche de la représentation : l'espace E_3 peut être considéré comme un continuum de points, avec chacun leurs coordonnées sur les trois axes.

À tout couple (A, B) de points que l'on appelle bipoint de E_3, on associe un vecteur unique $\overrightarrow{AB}$ de E_3 représenté par une flèche d'origine A et d'extrémité B.

$$A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B) \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

De plus, quels que soient les points A, B et C, on pourra écrire (relation de Chasles) :

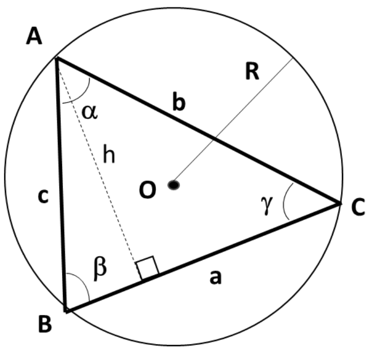
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



FICHE 3 : Géométrie 2D - Triangles

Un polygone est une figure géométrique plane formée d'une ligne brisée fermée. Chaque segment de cette ligne brisée est appelé « côté » du polygone. Le nombre de côtés définit l'ordre du polygone. Parmi les nombreuses formes que l'on peut trouver, nous allons nous focaliser sur les propriétés principales des deux polygones les plus simples : le « triangle » - 3 côtés - et le « quadrilatère » - 4 côtés.

1. Les triangles



Triangle ABC - Notations :

- Longueur côté BC : a
- Longueur côté AC : b
- Longueur côté AB : c
- Angle BAC : α
- Angle ABC : β
- Angle ACB : γ

Le triangle ABC peut s'inscrire dans un cercle de rayon R et de centre 0

Dans tout triangle, on a :

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi = 180°$$

On appellera :

- Triangle « isocèle » : un triangle possédant deux côtés de même longueur ;
- Triangle « équilatéral » : un triangle possédant trois côtés de même longueur ;

Sinon on l'appellera triangle « scalène ».

Dans cette dernière catégorie, on appellera « rectangle » un triangle possédant un angle droit (90°).

L'aire A d'un triangle est donnée par :

$$A = \frac{1}{2}(base).(hauteur)$$

La base est un des côtés au choix. La hauteur est la longueur du segment de droite issue du sommet opposé au côté choisi, coupant perpendiculairement ce dernier.

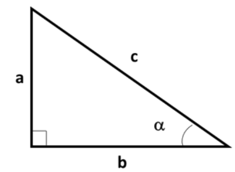
Le périmètre P du triangle est :

$$P = a + b + c$$

2. Théorèmes associés au triangle

a. Théorème de Pythagore :

Pour un triangle rectangle : $a^2 + b^2 = c^2$
« c » est appelé l'hypoténuse (côté opposé à l'angle droit).
Pour l'angle α, « a » est appelé le côté opposé et « b » le côté adjacent.
On définit les grandeurs sinus, cosinus et tangente par :



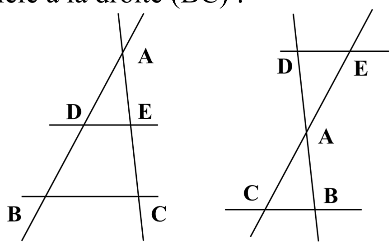
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}; \quad \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

b. Théorème de Thalès :

Soit un triangle ABC, et deux points D et E, D sur la droite (AB) et E sur la droite (AC), de sorte que la droite (DE) soit parallèle à la droite (BC) :

Alors :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



À partir de ces expressions de base, d'autres relations peuvent être trouvées entre les différents segments. Attention toutefois à bien respecter les règles d'établissement des égalités à savoir le choix d'un point référence.

c. Autres relations pour un triangle quelconque

- À partir des définitions du sinus, on peut trouver l'aire d'un triangle quelconque en choisissant base et hauteur (comme par exemple sur le dessin de la page précédente - base : a, hauteur : $h = c\sin\beta$) :

$$A = \frac{1}{2}ac\sin\beta \left(= \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \right)$$

- Pour tout triangle, on peut aussi écrire (théorème d'Al-Kashi ou théorème de Carnot) :

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{cases}$$

- Enfin, tout triangle peut s'inscrire dans un cercle de rayon R et de centre 0 tel que :

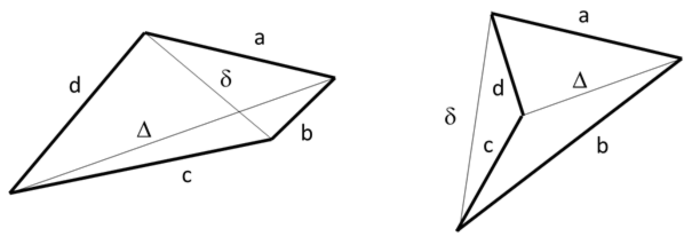
$$2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Le centre 0 est le point de croisement des médiatrices du triangle. La médiatrice d'un côté est définie comme la droite perpendiculaire coupant un côté en son milieu.

FICHE 4 : Géométrie 2D – Quadrilatères – Droites

1. Les quadrilatères quelconques

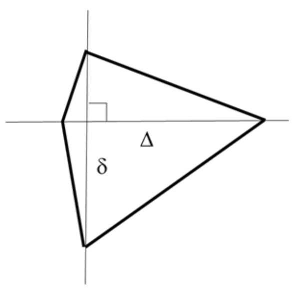
Pour les polygones à 4 côtés, on distinguera les quadrilatères convexes et non convexes (concaves ou croisés). Les quadrilatères convexes sont ceux dont les deux diagonales (reliant les sommets opposés) sont inscrites à l'intérieur du polygone, comme le montre le schéma de gauche ci-dessous :



Leur point commun est le périmètre P qui vaut : $P = a + b + c + d$.

Pour leur surface, différents cas peuvent être à considérer mais dans tous les cas, cela revient à faire la somme des surfaces de deux triangles.

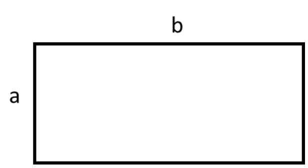
Pour un quadrilatère convexe, si les deux diagonales se coupent à angle droit alors :

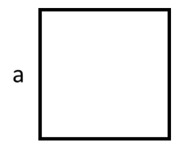
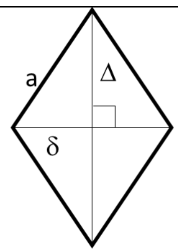
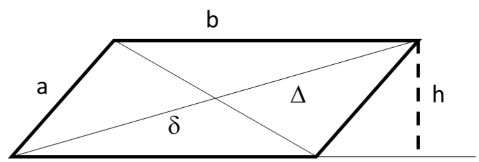


$$S = \frac{1}{2}\Delta\delta$$

2. Les quadrilatères convexes

Dans les quadrilatères convexes, si les côtés sont égaux et parallèles deux à deux, on obtiendra la famille des parallélogrammes et des trapèzes parmi lesquels le carré, le rectangle et le losange (P : périmètre, S surface) :

	Rectangle : $P = 2a + 2b$ $S = ab$

	Carré : $P = 4a$ $S = a^2$
	Losange : $P = 4a$ $S = \frac{1}{2}\Delta\delta$ $\delta^2 + \Delta^2 = 4a^2$
	Parallélogramme : $P = 2a + 2b$ $S = bh$ $\delta^2 + \Delta^2 = 2(a^2 + b^2)$

3. Droite (à 2 dimensions)

Dans un espace à 2 dimensions représenté par les coordonnées (x, y), une droite (ou fonction affine) est représentée par une équation unique du type :

$$y = ax + b \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

a est appelé le coefficient directeur (ou pente de la droite) et b est appelé l'ordonnée à l'origine.
Pour déterminer ces deux valeurs, il faut connaître deux points de coordonnées (x_1, y_1) et (x_2, y_2) par lesquels passe cette droite et on détermine a et b en résolvant le système de deux équations à deux inconnues (voir également fiche 12) obtenu en remplaçant x et y par les valeurs des deux points. On trouve :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

Quelques propriétés :

- Si deux droites ont même pente, alors elles sont parallèles et ne se croisent jamais.
- En représentation cartésienne (axes x et y orthogonaux) :
  - Une droite de pente nulle est horizontale et s'exprime par $y = \beta, \forall x$;
  - Une droite de pente infinie est verticale et s'exprime par $x = \alpha, \forall y$.