

Olivier Vanbésien

# Outils mathématiques pour les sciences de l'ingénieur

37 fiches de cours et 71 exercices corrigés



# Sommaire

<b>Fiches de cours - Objectifs et compétences visées</b>	<b>15</b>
<b>Fiche 1 : Nombres et représentations des nombres</b>	<b>16</b>
• Savoir identifier la nature d'un nombre selon sa représentation	
• Maîtriser la représentation et la manipulation des nombres sous forme de puissances	
• Maîtriser la représentation et la manipulation des nombres sous forme de fractions	
<b>Fiche 2 : Points et vecteurs</b>	<b>18</b>
• Savoir définir et différencier les notions de points et de vecteurs	
• Connaître la définition du système de coordonnées cartésiennes	
• Connaître la notion d'espace vectoriel et les relations d'addition sur les vecteurs (dont la relation de Chasles)	
<b>Fiche 3 : Géométrie 2D – Triangles</b>	<b>20</b>
• Maîtriser les relations géométriques dans un triangle quelconque	
• Connaître le théorème de Pythagore (triangle rectangle)	
• Connaître les relations de proportionnalité dans un triangle (théorème de Thalès)	
<b>Fiche 4 : Géométrie 2D – Quadrilatères – Droites</b>	<b>22</b>
• Appréhender les différentes formes de quadrilatères possibles	
• Savoir identifier les quadrilatères convexes (parallélogrammes et trapèzes) et connaître les surfaces et périmètres des quadrilatères de base (rectangles, carré, losange, parallélogramme)	
• Savoir reconnaître et retrouver l'équation d'une droite dans un espace à deux dimensions	
<b>Fiche 5 : Géométrie 3D – Polyèdres – Plans et droites</b>	<b>24</b>
• Connaître la définition d'un polyèdre	
• Savoir identifier pyramides, tétraèdres et hexaèdres. Savoir retrouver les surfaces et volumes de polyèdres réguliers	
• Savoir reconnaître et retrouver les équations d'un plan et d'une droite dans un espace à trois dimensions	

**Fiche 6 : Les nombres complexes (forme cartésienne)** 26

- Connaître la définition d'un nombre complexe et les notions de partie réelle et imaginaire
- Maîtriser les opérations d'algèbre simple sur les nombres complexes en représentation cartésienne
- Savoir extraire la racine d'un nombre complexe sous forme cartésienne

**Fiche 7 : Polynômes - Identités remarquables** 28

- Connaître les différentes écritures possibles d'un polynôme
- Savoir identifier l'ensemble dans lequel est défini un polynôme :  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$
- Maîtriser les identités remarquables : ordre 2 et généralisation à l'ordre  $n$

**Fiche 8 : Équations polynomiales d'ordres 1 et 2** 30

- Savoir résoudre une équation polynomiale d'ordre 1
- Savoir résoudre une équation polynomiale d'ordre 2 (dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ ) – Notion de discriminant
- Savoir écrire les formes factorisées d'un polynôme d'ordre 2

**Fiche 9 : Compléments sur les polynômes d'ordre 2** 32

- Savoir retrouver deux valeurs à partir de leur somme et de leur produit
- Savoir résoudre une équation bicarrée
- Connaître la forme canonique d'un polynôme

**Fiche 10 : Fraction de polynômes – Factorisation** 34

- Identifier les différentes composantes d'une fraction de polynômes : numérateur, dénominateur, partie entière.
- Maîtriser la division euclidienne de polynômes
- Savoir factoriser (réduire) un polynôme de degré quelconque

**Fiche 11 : Inéquations polynomiales d'ordre n** 36

- Connaître les règles de détermination du signe d'un polynôme (ordre 1 et 2)
- Savoir résoudre les inéquations polynomiales d'ordre 1 et 2
- Maîtriser la généralisation à l'ordre n. Construction d'un tableau de signes

**Fiche 12 : Systèmes de 2 équations à 2 inconnues – Déterminants** 38

- Savoir identifier un système de deux équations à deux inconnues
- Savoir résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la méthode des déterminants
- Connaître le cas particulier d'un système de Cramer

<b>Fiche 13 : Systèmes de n équations à n inconnues</b>	<b>40</b>
• Savoir résoudre un système de 3 équations à 3 inconnues par la méthode des déterminants	
• Connaître quelques règles de manipulation des déterminants d'ordre n	
• Savoir identifier et manipuler les déterminants d'ordre n sous forme triangulaire	
<b>Fiche 14 : Représentation matricielle</b>	<b>42</b>
• Connaître la définition d'une matrice de taille quelconque	
• Maîtriser les opérations simples d'addition et de multiplication sur des matrices de tailles quelconques	
• Savoir faire le lien entre une matrice carrée d'ordre 2 et un système de 2 équations à deux inconnues. Notion de matrice inverse	
<b>Fiche 15 : Opérations sur les matrices carrées</b>	<b>44</b>
• Maîtriser les opérations algébriques sur les matrices carrées d'ordre 2	
• Envisager la généralisation des opérations algébriques à l'ordre n	
• Connaître la méthode d'inversion d'une matrice carrée d'ordre 3	
<b>Fiche 16 : Étude de fonctions à une variable – I</b>	<b>46</b>
• Maîtriser les premières étapes d'étude d'une fonction à une variable : domaine de définition, propriétés particulières (parité, périodicité), limites aux bornes du domaine de définition	
• Savoir trouver les asymptotes (horizontale, verticale, oblique) d'une fonction	
• Maîtriser le passage à l'échelle logarithmique	
<b>Fiche 17 : Étude de fonctions à une variable – II</b>	<b>48</b>
• Savoir rechercher et identifier les extrema d'une fonction	
• Savoir construire le tableau de variation d'une fonction sur son domaine de définition	
• Savoir tracer une courbe représentative de la fonction étudiée (choix des unités d'axe)	
<b>Fiche 18 : Calculs de limites</b>	<b>50</b>
• Connaître la définition d'une limite en un point, limite à gauche, limite à droite	
• Maîtriser les propriétés algébriques du passage à la limite	
• Identifier les formes indéterminées de limites et connaître quelques méthodes « simples » pour lever ces indéterminations	

<b>Fiche 19 : Déivation</b>	<b>52</b>
• Connaître les notions de dérivabilité d'une fonction en un point et de fonction dérivée	
• Connaître les dérivées des fonctions usuelles et maîtriser la dérivation de fonctions plus complexes (propriétés algébriques et de composition)	
• Détermination de la tangente en un point	
<b>Fiche 20 : Les fonctions logarithme et exponentielle</b>	<b>54</b>
• Connaître les définitions et le lien entre les fonctions logarithme népérien et exponentielle	
• Connaître les propriétés principales des fonctions exponentielle et logarithme népérien	
• Connaître les autres fonctions associées : logarithme décimal (base 10) et sa fonction réciproque. Notion de décibel	
<b>Fiche 21 : Les fonctions sinusoïdales</b>	<b>56</b>
• Connaître les propriétés et savoir tracer les fonctions sinus et cosinus	
• Connaître les propriétés et savoir tracer les fonctions tangente et cotangente	
• Connaître les valeurs des fonctions sinusoïdales pour les angles remarquables	
<b>Fiche 22 : Trigonométrie circulaire - Formulaire</b>	<b>58</b>
• Identifier le lien entre fonctions sinusoïdales et propriétés du cercle	
• Maîtriser les formules de symétrie axiale	
• Maîtriser les formules d'addition et les transformations produit-somme et somme-produit	
<b>Fiche 23 : Les nombres complexes - Forme polaire</b>	<b>60</b>
• Identifier le lien entre représentations cartésienne, sinusoïdale et exponentielle des nombres complexes	
• Maîtriser les opérations algébriques entre nombres complexes sous forme exponentielle (polaire)	
• Maîtriser la formule de Moivre et son application à la recherche des racines n-ièmes d'un nombre complexe	
<b>Fiche 24 : Produits de vecteurs</b>	<b>62</b>
• Connaître les définitions générales des produits scalaire et vectoriel	
• Maîtriser le calcul des produits scalaire et vectoriel en coordonnées cartésiennes	
• Connaître la notion de produit mixte	

**Fiche 25 : Systèmes de coordonnées** 64

- Appréhender la notion de projection de vecteurs à 2 dimensions
- Maîtriser le passage de coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires à deux dimensions
- Maîtriser le passage de coordonnées cartésiennes en coordonnées cylindriques et sphériques à trois dimensions

**Fiche 26 : Géométrie circulaire, cylindrique, sphérique** 66

- Connaître la représentation en coordonnées cartésiennes des ellipsoïdes et sphères, des ellipses et cercles, des cylindres et cônes
- Maîtriser la représentation selon les situations des ellipsoïdes et sphères, des ellipses et cercles, des cylindres et cônes en coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques
- Appréhender la notion de calcul infinitésimal appliquée aux sphères et cercles

**Fiche 27 : Suites arithmétiques et géométriques** 68

- Connaître la définition d'une suite de nombres (récurrente ou non)
- Maîtriser la notion de suite arithmétique : propriétés et calcul de somme partielle
- Maîtriser la notion de suite géométrique : propriétés, notions de convergence et calcul de somme

**Fiche 28 : Étude des suites numériques** 70

- Savoir étudier une suite numérique : monotonie et bornes
- Connaître les méthodes d'étude de la monotonie d'une suite numérique : différence ou quotient de deux termes successifs, fonction réelle associée
- Savoir étudier une suite affine (arithmético-géométrique)

**Fiche 29 : Décomposition en éléments simples de première espèce** 72

- Connaître les conditions d'application d'une décomposition en éléments simples d'une fraction de polynômes
- Maîtriser la décomposition en éléments simples de première espèce : pôles simples d'ordre 1
- Maîtriser la décomposition en présence de pôles double ou d'ordre n

**Fiche 30 : Décomposition en éléments simples de seconde espèce** 74

- Maîtriser la décomposition en éléments simples de seconde espèce (polynômes réels d'ordre 2)
- Assimiler quelques techniques de calcul pour déterminer les paramètres d'une décomposition en éléments simples
- Savoir utiliser avec pertinence les règles de calcul de paramètres selon les situations rencontrées

**Fiche 31 : Primitives et intégrales** 76

- Maîtriser la différence entre une primitive et une intégrale
- Savoir faire le lien entre calcul d'intégrale et calcul d'une surface
- Connaître les primitives de fonctions usuelles

**Fiche 32 : Méthodes d'intégration de fonctions** 78

- Maîtriser l'intégration de fonctions composées (dont l'approche logarithmique)
- Maîtriser la notion d'intégration par parties et savoir identifier quand elle est pertinente pour un calcul d'intégrale
- Maîtriser les étapes d'application du changement de variable pour le calcul d'une intégrale

**Fiche 33 : Les développements limités** 80

- Connaître le sens physique de la notion de développement limité d'une fonction en un point : calcul approché
- Savoir calculer les coefficients d'un développement limité à partir des dérivées successives d'une fonction (formule de Taylor-Young)
- Connaître les développements limités en 0 de fonctions usuelles

**Fiche 34 : Propriétés des développements limités** 82

- Connaître les propriétés des développements limités de type somme, produit, composition, quotient, intégration et dérivation pour application à des fonctions quelconques
- Savoir identifier les conditions requises pour pouvoir faire un développement limité en 0
- Maîtriser l'application des développements limités à la levée d'indétermination de limites

**Fiche 35 : Équations différentielles d'ordre 1** 84

- Savoir identifier une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants
- Maîtriser la méthodologie de résolution d'une équation différentielle à coefficients constants : solution de l'équation homogène, recherche d'une solution particulière, écriture de la solution générale et application de la condition limite.
- Comprendre l'approche de résolution d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients non constants

**Fiche 36 : Probabilités discrètes – Dénombrement** **86**

- Connaître les notions d'événement et de dénombrement
- Savoir définir les probabilités associées à un ensemble d'événements, notions d'arrangement et de combinaison
- Appréhender les notions d'événements indépendants et de probabilité conditionnelle

**Fiche 37 : Variables aléatoires discrètes** **88**

- Connaître la définition d'une variable aléatoire discrète et maîtriser ses représentations possibles (table ou graphe de la loi, fonction cumulative)
- Maîtriser les calculs d'espérance, de variance et d'écart type sur une variable aléatoire discrète.
- Savoir reconnaître sur une situation donnée les lois discrètes usuelles (Bernoulli, binomiale, Poisson et géométrique) et connaître leurs caractéristiques (loi de probabilité, espérance, variance)

**Exercices corrigés** **91**

Liste des exercices et fiches de cours associées	91
Exercice 1 : Ordres de grandeurs	94
Exercice 2 : Simplification de fractions – I	95
Exercice 3 : Simplification de fractions – II	96
Exercice 4 : Vecteurs – I	97
Exercice 5 : Vecteurs – II	98
Exercice 6 : Géométrie 2D – I	99
Exercice 7 : Géométrie 2D – II	100
Exercice 8 : Calculs de volumes	101
Exercice 9 : Manipulation de nombres complexes – I	102
Exercice 10 : Polynômes complexes	103
Exercice 11 : Équations polynomiales	104
Exercice 12 : Équations bicarrées	105
Exercice 13 : Système d'équations	106
Exercice 14 : Inéquation polynomiale	107
Exercice 15 : Système d'équations paramétrées (2x2)	108
Exercice 16 : Système de 3 équations à 3 inconnues – I	109
Exercice 17 : Système de 3 équations à 3 inconnues – II	110
Exercice 18 : Déterminants d'ordre quelconque	111
Exercice 19 : Produits de matrices	112

Exercice 20 : Calcul matriciel – I	113
Exercice 21 : Calcul matriciel – II	114
Exercice 22 : Calcul matriciel – III	115
Exercice 23 : Inversions de matrice	116
Exercice 24 : Parité et périodicité	117
Exercice 25 : Étude de fonction – I	118
Exercice 26 : Étude de fonction – II	119
Exercice 27 : Étude de fonction – III	120
Exercice 28 : Étude de fonction – IV	121
Exercice 29 : Recherche d'asymptotes obliques – I	122
Exercice 30 : Recherche d'asymptotes obliques – II	123
Exercice 31 : Calcul de dérivées	124
Exercice 32 : Calcul de tangente à une courbe	125
Exercice 33 : Asymptotes en échelle logarithmique	126
Exercice 34 : Simplifications d'écriture	127
Exercice 35 : Trigonométrie	128
Exercice 36 : Équations trigonométriques	129
Exercice 37 : Manipulation de nombres complexes – II	130
Exercice 38 : Vecteurs et produit scalaire	131
Exercice 39 : Vecteurs et produit vectoriel	132
Exercice 40 : Systèmes de coordonnées 2D	133
Exercice 41 : Systèmes de coordonnées 3D – I	134
Exercice 42 : Systèmes de coordonnées 3D – II	135
Exercice 43 : Suites arithmétique, géométrique et calcul de limites	136
Exercice 44 : Monotonie des suites numériques – I	137
Exercice 45 : Monotonie des suites numériques – II	138
Exercice 46 : Suites affines	139
Exercice 47 : Décomposition en éléments simples – I	140
Exercice 48 : Décomposition en éléments simples – II	141
Exercice 49 : Décomposition en éléments simples – III	142
Exercice 50 : Intégration par parties – I	143
Exercice 51 : Intégration par parties – II	144
Exercice 52 : Calcul d'une surface (méthode intégrale)	145
Exercice 53 : Intégration par changement de variable	146
Exercice 54 : Intégration (via le logarithme)	147
Exercice 55 : Intégration et valeur absolue	148
Exercice 56 : Développement limité en 0 – I	149

Exercice 57 : Développement limité en 0 – II	150
Exercice 58 : Développement limité en $x_0$	151
Exercice 59 : Développement limité composé	152
Exercice 60 : Développement limité à l'infini	153
Exercice 61 : Levées d'indétermination de limites	154
Exercice 62 : Équation différentielle du 1 <sup>er</sup> ordre – I	155
Exercice 63 : Équation différentielle du 1 <sup>er</sup> ordre – II	156
Exercice 64 : Équation différentielle du 1 <sup>er</sup> ordre – III	157
Exercice 65 : Équation différentielle à coefficients non constants	158
Exercice 66 : Retrouver une équation différentielle	159
Exercice 67 : Dénombrement – I	160
Exercice 68 : Dénombrement – II	161
Exercice 69 : Probabilités discrètes	162
Exercice 70 : Variable aléatoire discrète – I	163
Exercice 71 : Variable aléatoire discrète – II	164

**Pour en savoir plus****165**